تمهيد:

تمثل مقاييس التشتت الجانب الآخر من المقاييس الإحصائية الأساسية بجانب مقاييس النزعة، حيث تستخدم تلك المقاييس في وصف البيانات والتعرف على خصائصها. كما تعمل مقاييس التشتت كجزئية مكملة ومهمة جدا بجانب مقاييس النزعة المركزية في عمليات الاستدلال الإحصائي المبنية على عملية التعامل مع البيانات. وينصب الاهتمام عند التعامل مع مقاييس التشتت حول درجة الاختلاف بين القيم المختلفة للمتغير الكمي المدروس، ويتم ذلك من خلال عدة مقاييس مختلفة يهتم كل واحد منها بقياس درجة الاختلاف بين القيم المختلفة للمتغير الكمي المدروس، ويتم ذلك من خلال عدة مقاييس مختلفة يهتم كل واحد منها بقياس درجة الاختلاف من زاوية مختلفة.

1- مقاييس التشتت المطلق

يتم الحصول على مقياس التشتت بنفس وحدة القياس للظاهرة تحت الدراسة. هناك عدة مقاييس إحصائية لقياس التشتت المطلق، فيما بينها من حيث الدقة والسهولة، ومن أهمها نجد المدى العام، المدى الربيعي، نصف المدى الربيعي، الانحراف المتوسط، التباين، الانحراف المعياري.[1]

1-1 المدى العام:

يعرف بأنه الفرق بين أكبر و أصغر قيمة لمتغير معين، ويعتبر المدى من أبسط مقاييس التشتت. ومع ذلك فإن المدى يأخذ في الاعتبار فقط القيمتين المتطرفتين في المجموعة، ولا يمدنا بمقياس التشتت القيم الأخرى فيما عدا أنها تقع بين هاتين القيمتين المتطرفتين.[2]

أ- المدى في حالة البيانات الغير المبوبة: يحسب المدى بتطبيق المعادلة التالية:

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

$$R = X_{max} - X_{min}$$

مثال: أحسب المدى لمجموعة الأعداد التالية:

المجموعة الأولى: 12، 5، 6، 3، 15، 9، 18، 4.

[1] مصطفى عبد المنعم الخواجة، مرجع سابق، ص 119.

[2] معين أمين السيد، مرجع سابق، ص 98.

المجموعة الثانية: 8، 3، 7، 6، 9، 8، 9، 18.

الحل:

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

المدى بالنسبة للمجموعة الأولى = 18 – 3 = 15

المدى بالنسبة للمجموعة الثانية = 18 – 3 = 15

رغم أن المدى واحد في الحالتين فإن هناك تشتتا أكبر في المجموعة الأولى عنها في المجموعة الثانية.

ب- المدى في حالة البيانات الغير مبوبة: له أكثر من صيغة، ومنها المعادلة التالية:

المدى = (الحد الأعلى للفئة الأخيرة) – (الحد الأدنى للفئة الأولى)

مثال: الجدول التكراري التالي يبين توزيع 50 مزرعة حسب المساحة المزروعة بالقمح بالألف هكتار.

المساحة	[15-20]	[21-26]	[27-32]	[33-83]	[39-44]	[45-50]
عدد المزارع	3	7	10	15	12	**3**

المطلوب:حساب المدى للمساحة المزروعة بالقمح؟

الحل:

المدى = (الحد الأعلى للفئة الأخيرة) – (الحد الأدنى للفئة الأولى)

المدى= 50 – 15 = 35 هكتار

$R = 50 - 15 = 35$

1-2 المدى الربيعي:

هو الفرق بين الربيع الثالث والأول أي: $IQ = Q_3 - Q_1$

ملاحظة: نلاحظ أن المدى الربيعي قد ابتعد عن القيم المتطرفة فهو أحسن من المدى، ولكن بقي يستعمل قيمتين فقط ويهمل باقي البيانات فهو لا يعكس حقيقة التشتت.

خصائص المدى الربيعي:

يتميز المدى الربيعي بالخصائص التالية:[1]

1- يضم 50% من المجتمع مهما كان التوزيع الإحصائي.

2- يتغير طوله مقارنة بالمدى العام حسب طبيعة التوزيع.

3- استعمالاته محدودة نظرا لبساطته، غير أنه أحسن من المدى العام.

[1] جلاطو جيلالي، مرجع سبق ذكره، ص 71.

4- يستعمل في المقارنة بين توزيعين إحصائيين أو أكثر.

مثال: السلسلة الإحصائية التالية تبين مداخيل 11 وحدة إحصائية:

700، 800، 900، 900، 1000، 1100، 1200،1100، 1300، 1300، 1400.

المطلوب: حساب المدى الربيعي؟

الحل:

-تحديد قيمة Q_1 ، ولحساب هذه القيمة نحدد مرتبتها، نلاحظ أن عدد القيم فردي إذن المرتبة هي:

$$\frac{11+1}{4}=3$$

-ترتيب القيم تصاعديا، فنجد أن: $Q_1 = 900$

وبنفس الطريقة نجد أن: $Q_3 = 1300$

ومنه: $IQ = Q_3 - Q_1$

$= 1300 - 900 = 400$

1-3 نصف المدى الربيعي:

ويطلق عليه الانحراف الربيعي، وهو يستخدم لمعالجة عيب المدى من تصادف وجود قيم شاذة طرفية للحد الأدنى والأعلى لقيم الظاهرة، ويعطى بالصيغة التالية:

$$\frac{IQ}{2}=\frac{Q3-Q1}{2}$$

مثال: بأخذ قيم المثال السابق:

$$\frac{IQ}{2}=\frac{1300-900}{2}=200$$

أما إذا أردنا أن نقلل من أثر القيم المتطرفة فإننا نقوم باستبعادها ويمكن أن يتم ذلك باستخدام الطرق التالية:

- المدى الربيعي = الربيع الثالث – الربيع الأول.
- المدى العشري= العشر التاسع – العشر الأول.
- المدى المئيني= المئين99 – المئين الأول.

4-1 الانحراف المتوسط:

يعرف الانحراف المتوسط بأنه البعد المتوسط لقيم المتغير الإحصائي عن قيمة مركزية.

أي هو عبارة بأنه المتوسط الحسابي للقيم المطلقة لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي، وسوف نرمز للانحراف المتوسط في دراستنا بالرمز MD.[1]

$$MD = \frac{\sum|xi - \bar{x}|}{n}$$

وهو يحسب وفقا لحالتين:

أ- حالة البيانات الغير مبوبة:

بعد حساب المتوسط الحسابي يمكن حساب الانحراف المتوسط مباشرة.

مثال: لتكن القيم التالية: 50، 70،60، 80، 90.

المطلوب: إيجاد الانحراف المتوسط؟

نحدد أولا المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{50 + 70 + 60 + 80 + 90}{5}$$

$$= 70$$

الانحراف المتوسط :

$$MD = \frac{\sum|xi - \bar{x}|}{n}$$

$$MD = \frac{|50 - 70| + |70 - 70| + |60 - 70| + |80 - 70| + |90 - 70|}{5}$$

$$= 12$$

ب-حالة البيانات المبوبة:

في هذه الحالة يحسب الانحراف المتوسط من خلال العلاقة:

$$MD = \frac{\sum|x_i - \bar{x}|n_i}{n_i}$$

حيث: x_i : مركز الفئات

n_i: التكرارات

مثال: يبين الجدول التكراري التالي توزيع 40 أسرة حسب الإنفاق الشهري بالألف دولار.

الإنفاق	[2-5]	[6-9]	[10-13]	[14-17]	[18-21]
عدد الأسرة	1	8	13	10	8

[1] جيلالي جلاطو، مرجع سابق، ص 73.

المطلوب: أوجد الانحراف المتوسط؟

الحل:

حدود الانفاق	عدد الأسر n_i	مركز الفئة X_i	X_in_i	$\|xi-x\|$	$\|xi-x\|n_i$
[2-5]	1	3.5	3.5	9.6	**9.6**
[6-9]	8	7.5	60	5.6	**44.8**
[10-13]	13	11.5	149.5	1.6	**20.8**
[14-17]	10	15.5	155	2.4	**24**
[18-21]	8	19.5	156	6.4	**51.2**
المجموع	**40**		**524**		150.4

حساب الوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{524}{40} = 13.1$$

إذا الانحراف المتوسط هو:

$$MD = \frac{\sum|xi-\bar{x}|n_i}{n_i} = \frac{150.4}{40} = 3.76$$

ويعتبر الانحراف المتوسط أفضل من سابقه (المدى) لأنه أقل تأثر بالقيم المتطرفة غير أنه لا يستعمل بشكل واسع بسبب اعتماده على القيم المطلقة لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي. وهو يتميز بالخواص التالية:

- يعتمد في حسابه على جميع القيم وليس على القيمة الكبرى والصغرى فقط.
- لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.
- يتأثر بالقيم المتطرفة، لأن انحرافها عن المتوسط الحسابي يكون كبيرا.

5-1 التباين:

هو عبارة عن المتوسط الحسابي لمربعات الفروق بين قيم المتغير الإحصائي ومتوسطها الحسابي، ويستخدم مربعات الفروق هنا تفاديا لاستخدام القيم المطلقة كما هو الشأن في الانحراف المتوسط.[1]

يرمز للتباين بالرمز V(x) .

[1] مصطفى يوسف كافي و آخرون، الإحصاء في الادارة والاقتصاد، مكتبة المجتمع العربي، الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص 127.

ويحسب حسب أنواع البيانات إن كانت مبوبة أو غير مبوبة وذلك كالتالي:

أ- حساب التباين في حالة البيانات الغير مبوبة:

يحسب من خلال العلاقة التالية:

$$V(x) = \frac{\sum|xi - \bar{x}|^2}{n}$$

مثال:لتكن القيم التالية:

50، 60، 70، 80، 90.

المطلوب: إيجاد التباين؟

الحل:

نحدد أولا المتوسط الحسابي:

$$= 70\bar{X} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{50+60+70+80+90}{5}$$

حساب التباين:

$$V(x) = \frac{\sum|xi-\bar{x}|^2}{n} = \frac{|50-70|^2+|60-70|^2+|70-70|^2+|80-70|^2+|90-70|^2}{5} = \frac{1000}{5}$$

$V(x) = 200$

ب-حساب التباين في حالة البيانات المبوبة:

في هذه الحالة يحسب التباين من خلال العلاقة التالية:

$$V(x) = \frac{\sum n_i|xi - \bar{x}|^2}{n_i}$$

مثال: لتكن لدينا المعطيات التالية:

x_i	**1**	**2**	**3**
n_i	7	5	8

المطلوب: إيجاد التباين؟

الحل:

x_i	n_i	n_ix_i	$\lvert Xi - \bar{X}\rvert$	$ni\lvert X_i - \bar{X}\rvert$	$\lvert Xi - \bar{X}\rvert^2$	$ni\lvert Xi - \bar{X}\rvert^2$
1	7	7	1.85	12.95	3.42	**23.94**
2	5	10	0.85	4.25	0.493	**2.465**
3	8	40	2.15	17.2	4.622	**36.98**
	20	**57**		**34.4**		63.385

نحسب المتوسط الحسابي:

$$\bar{X}=\frac{\sum X_i n_i}{\sum n_i}=\frac{57}{20}=2.85$$

$$V(x)=\frac{\sum n_i |xi-\bar{x}|^2}{n_i}=\frac{63.385}{20}=3.169$$

6-1 الانحراف المعياري:

من أهم مقاييس التشتت الانحراف المعياري ويرمز له بالرمز سيقما σ ويعرف بأنه الجذر التربيعي للتباين ويحسب بالطريقة التي يتم حساب التباين بها.

ويحسب الانحراف المعياري وفق حالتين:

أ- حالة البيانات الغير مبوبة: يحسب الانحراف المعياري بتجذير التباين.

$$\sigma=\sqrt{v(x)}=\sqrt{\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n}}$$

مثال:لتكن القيم التالية:

50، 60، 70، 80، 90.

المطلوب:احسب الانحراف المعياري؟

الحل:

إيجاد التباين: v(x)= 200

$$\sigma=\sqrt{v(x)}$$
$$=\sqrt{200}$$
$$=14.14$$

ب-حالة البيانات المبوبة: يحسب الانحراف المعياري بتجذير التباين.

$$\sigma=\sqrt{v(x)}$$
$$=\sqrt{\frac{\sum(xi-x)^2 n_i}{\sum n_i}}$$

مثال: أحسب الانحراف المعياري لمجموعة البيانات التالية:

الفئات	[5-10[	[10-15[	[15-20[	[20-25[	[25-30[	المجموع
التكرار	8	12	15	10	5	**50**

مطبوعة إحصاء وصفي لطلبة السنة الأولى جامعة بومرداس، د قرينات محمد ، m.grinat@univ-boumerdes.dz

الحل:

الفئات	n_i	x_i	n_ix_i	$(X_i-\overline{X})$	$(Xi-\overline{X})^2$	$ni(Xi-\overline{X})^2$
[5-10[	8	7.5	60	-9.5	84.64	**677.12**
[10-15[	12	12.5	150	-4.5	17.64	**211.68**
[15-20[	15	17.5	262.5	0.8	0.64	**9.60**
[20-25[	10	22.5	225	5.8	33.64	**236.40**
[25-30[	5	27.5	137.5	10.8	116.64	**583.20**
المجموع	50		835			**1818**

نحسب المتوسط الحسابي:

$$\bar{X}=\frac{\sum X_i n_i}{\sum n_i}=\frac{835}{50}=16.7$$

ومنه الانحراف المعياري:

$$\sigma=\sqrt{v(x)}=\sqrt{\frac{\sum(xi-x)^2 n_i}{\sum n_i}}=\sqrt{\frac{1818}{50}}=6.0299$$

ج- خواص الانحراف المعياري:

1- إذا كان الانحراف المعياري أقل من 15% من المتوسط الحسابي دل ذلك على قلة التشتت وان كان أكبر من 30% من المتوسط الحسابي دل ذلك على قوة التشتت لعناصر المجموعة وقلة تجانسها.

2- الانحراف المعياري هو مقياس قوة أي لا يتأثر بعدد المجموعة (أي طول المجموعة).

3- يأخذ الانحراف المعياري نفس وحدة القياس للمتغير الأصلي (كلغ، متر، لتر.....) لذلك لا يمكن استخدامها كأساس للمقارنة بين تشتت توزيعين لهما وحدات قياس مختلفة.

4- بما أن الانحراف المعياري يتأثر بالمتوسط الحسابي لبيانات الظاهرة فإنه لا يمكن استخدامه للمقارنة بين تشتت بيانات توزيعين لهما متوسط حسابي مختلف ولو كان هذين التوزيعين من نفس النوعية.

5- لا يمكن إيجاده بالنسبة للتوزيعات التكرارية المفتوحة من البداية أو النهاية.

7-1 خواص المدى:[1]

1- يعتبر المدى مقياسا بسيطا وسهلا للتشتت.

2- يعتبر المدى مقياسا لمراكز القيم لاعتماده على القيم عند مراكز معينة في التوزيع.

3- يتأثر المدى بالقيمتين المتطرفتين في المجموعة فقط مع إهمال باقي القيم.

[1] معين أمين السيد، مرجع سابق، ص 100.

4- لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

يكثر استخدامه في المراقبة الإحصائية على جودة الإنتاج.

2-معامل الاختلاف:[1]

رأينا سابقا أن الانحراف المعياري هو مقياس واقعي ومؤشر صحيح عن مقدار التشتت غير أن الخاصيتين4 و5 السابقتين تبينان أنه إذا استخدمنا هذا المقياس للمقارنة بين تشتت ظاهرتين أو أكثر فإن المقارنة تكون واقعية وواقعية فقط إذا كانت الظواهر من نوعية واحدة ولها متوسطات متساوية. أي يمكن مقارنة تشتت درجات مادة ما بدرجات مادة أخرى أو مقارنة تشتت دخل مجموعة من العمال بدخل مجموعة أخرى، وتكون المقارنة أكثر واقعية إذا كانت المتوسطات متساوية أو قريبة من بعضها.

أما إذا كانت الظواهر من صفات مختلفة أو كانت متوسطاتها متباعدة، ولهذا السبب وجدت مقاييس أخرى سميت مقاييس التشتت النسبي تعتمد على تمييز البيانات وتقيس التشتت كنسبة مئوية للمتوسط،أهم هذه المقاييس هو معامل الاختلاف.

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times 100$$

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$$

مثال: إذا كان متوسط درجات مجموعة من الطلبة في مادة الإحصاء هو 16 بانحراف معياري 4 ومتوسط درجاتهم في مادة الرياضيات هو 10 بانحراف معياري 3، فأي الدرجات بنظرك أكثر تشتتا؟

الحل:

$$Cv = \frac{4}{16} \times 100 = 25\%$$

$$Cv = \frac{3}{10} \times 100 = 30\%$$

ومنه درجات مادة الرياضيات الأكثر تشتتا.

---

[1] Bernard PY , opit, p 133.