تمهيد:

مما لاشك فيه انه عند التمعن في الظواهر التي نحاول دراستها نلاحظ ان القيم التي تأخذها في الغالب نقترب من بعضها البعض وتتجمع حول قيمة معينة غير منظورة، فطول مجموعة من الأشخاص مثلا يتجمع حول قيمة معينة متوسطة، والقليل من الأشخاص لهم طول يبتعد كثيرا عن هذه القيمة من زيادة او نقصانا. تسمى هذه الظاهرة بهذه الظاهرة بظاهرة النزعة المركزية، وفي كثير من النواحي التطبيقية يكون الباحث في حاجة إلى حساب بعض المؤشرات التي يمكن الاعتماد عليها في وصف الظاهرة من حيث القيمة التي تتوسط القيم أو تنزع إليها القيم، ومن حيث التعرف على مدى تجانس القيم او تنزع اليها القيم، ومن حيث التعرف على مدى تجانس القيم التي يأخذها المتغير، والاعتماد على العرض البياني لا يفي بالغرض. والنزعة المركزية لها عدد من المتوسطات للتعبير عنها تختلف باختلاف الغرض الذي تستخدم فيه، وطبيعة البيانات المحسوبة منها، أهم هذه المتوسطات: المتوسط الحسابي، المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي، الوسيط، المنوال ومقاييس شبيهة بالوسيط تتمثل في الربيعات، العشيرات والمئينات، وميزة هذه المتوسطات كقيم عددية وحيدة توفر لنا فكرة عامة عن البيانات، وتصف الظاهرة المدروسة مثل الجداول الإحصائية، إلا أنها أكثر اختصارا وأكثر فائدة، حيث تمكننا من المقارنة بين مجموعة من القيم ومجموعة أخرى، أو بين ظاهرة وأخرى، لذلك سنتناول في هذا المحور بعض المقاييس الاحصائية التي يمكن من خلالها التعرف على خصائص الظاهرة محل البحث ومن أهمها مقاييس النزعة المركزية.

1- المتوسط الحسابي

من أهم مقاييس النزعة المركزية، وأكثرها استخداما في النواحي التطبيقية[1]، ويمكن حسابه للبيانات المبوبة وغير المبوبة، كما يلي:

1-1- حالة البيانات غير المبوبة:

نقصد بالبيانات الغير مبوبة تلك البيانات التي لا تكون مدرجة ضمن جدول تكراري، قيمة المتوسط الحسابي في هذه الحالة تساوي مجموع القيم مقسوم على عددها.

لتكن لدينا القيم التالية: $x_1.x_2.x_3............x_n$

[1] شرف الدين خليل، الإحصاء الوصفي، شبكة الأبحاث والدراسات الاقتصادية، www.rr4ee. Net، ص 31.

فمتوسطها الحسابي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{x1 + x2 + x3 + \cdots + xn}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n}$$

حيث: $\bar{X}$ المتوسط الحسابي

x:تمثل البيانات الظاهرة

n:عدد القيم الظاهرة

مثال: قام أحد التجار بحساب عدد الزبائن الذين يقصدون أحد محلاته التجارية لخمسة أيام متوالية فأعطت النتائج التالية: 50، 70، 60، 80، 90، أحسب المتوسط الحسابي هو:

الحل:

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{50 + 70 + 60 + 80 + 90}{5}$$

$$= 70 \bar{x} = \frac{350}{5}$$

اذن المحل يستقبل يوميا تقريبا 70 زبونا.

وهناك طريقة ثانية في حساب الوسط الحسابي تسمي بالطريقة غير المباشرة او طريقة الوسط الفرضي X_0 ، فإذا كانت لدينا القيم التالية: $x_1.x_2.x_3..........x_n$، فمتوسطها الحسابي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = XO + \frac{(x1 - xo) + (x2 - xo) + (x3 - xo) + \cdots + (xn - xo)}{n}$$

$$= xo + \frac{\sum(Xi - xo)}{n}$$

ويتم اختيار قيمة X_0 أي عدد حقيقي مختلف عن الصفر غير انه يفضل ان يكون أحد قيم السلسلة تسهيلا للحسابات كم ننصح الطلبة دوما بالقيام بالحسابات في جدول حتى لا يتم نسيان أي قيمة

مثال: قم بحساب المتوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي لمعطيات المثال السابق.

الحل:

$$\bar{x} = XO + \frac{(x1 - xo) + (x2 - xo) + (x3 - xo) + \cdots + (xn - xo)}{n}$$

$$= xo + \frac{\sum(Xi - xo)}{n}$$

أولا نفرض $x_0 = 60$

ثانيا نقوم بالحسابات في الجدول الموالي:

X_i	50	60	70	80	90	المجموع Σ
$X_i - 60$	-10	0	10	20	30	**50**

$$\bar{x} = XO + \frac{(x1 - xo) + (x2 - xo) + (x3 - xo) + \cdots + (xn - xo)}{n}$$

$$= 60 + \frac{50}{5}$$

$$\bar{x} = 70$$

لاحظ ان قيمة المتوسط الحسابي متساوية بالطريقتين وستكون كذلك مهما اخترنا قيمة مختلفة ل x_0

2-1- حالة البيانات المبوبة:

وهي المدرجة ضمن جدول تكراري وهنا نميز بين حالتين:

1-2-1- حالة متغير كمي منقطع:

لتكن لدينا قيم المتغير الكمي المنقطع التالية: $x_1.x_2.x_3............x_n$، والتي تقابلها التكرارات التالية: $n_1.n_2.n_3............n_n$ فإن المتوسط الحسابي لها يكون بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{n1x1 + n2x2 + n3x3 + \cdots + nnxn}{n}$$

$$= \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

حيث: $\bar{x}$: المتوسط الحسابي

xi: تمثل قيم المتغير

ni: تكرار كل قيمة

أي أن المتوسط الحسابي لبيانات متكررة يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها مقسوما على مجموع التكرارات

مثال: أحسب المتوسط الحسابي لمعطيات الجدول التالي الذي يمثل توزيع الاسر حسب عدد أفرادها.

عدد الافراد X_i	02	03	04	05	06	المجموع Σ
التكرار n_i	20	14	16	20	30	100

المصدر: افتراضي.

الحل:

$$\bar{x} = \frac{n1x1 + n2x2 + n3x3 + \cdots + nnxn}{n}$$

$$= \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

من الأفضل أن تتم الحسابات في الجدول وذلك بإضافة سطر مساعد نقوم بحساب $n_{i*}X_i$ للوصول للمجموع كما هو موضح في الجدول.

عدد الافراد X_i	02	03	04	05	06	المجموع Σ
التكرار n_i	20	14	16	20	30	100
$n_{i*}X_i$	40	42	64	100	180	**426**

$$\bar{x} = \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

$$\bar{x} = \frac{426}{100}$$

$$\bar{x} = 4.26$$

وعليه فإن متوسط عدد افراد الأسرة في العينة المختارة هو 4.26 شخص.

1-2-2- حالة متغير كمي مستمر:

يتم التعبير عن كل قيمة من القيم التي تقع داخل حدود الفئة **[A B [**: بمركز هذه الفئة (نعتبرها $\mathbf{X_i}$) مع توفر التكرارات n_i، وبذلك يكون المتوسط الحسابي يمثل مجموع ضرب مراكز الفئات في التكرارات المقابلة لها مقسوما على مجموع التكرارات.

مركز الفئة $\frac{A+B}{2}$ == $X_i = \frac{\text{الحد الادنى للفئة} + \text{الحد الاعلى للفئة}}{2}$

فإن المتوسط الحسابي بالطريقة المباشرة يعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = \frac{n1x1 + n2x2 + n3x3 + \cdots + nnxn}{n}$$

$$= \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

مثال:

الجدول التالي يبين توزيع دخل 40 موظف حسب مداخيلهم الشهرية، مقدرة بعشرة الاف دينار.

المطلوب: أحسب متوسط دخل الموظفين.

الدخل	]34-32]	]36-34]	]38-36]	]40-38]	]42-40]	]44-42]
عدد الموظفين	4	7	13	10	5	1

الحل:

1- إيجاد متوسط دخل الموظفين: بمعنى حساب $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{n1x1 + n2x2 + n3x3 + \cdots + nnxn}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

نحدد أولا مراكز الفئات في الجدول ونقوم بالحسابات المطلوبة في الجدول الموالي:

الدخل	]34-32]	]36-34]	]38-36]	]40-38]	]42-40]	]44-42]	المجموع Σ
X_i	33	35	37	39	41	43	//
عدد الموظفين n_i	4	7	13	10	5	1	40
$n_{i*}X_i$	132	245	481	390	205	43	1496

$$\bar{x} = \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

$$\bar{x} = \frac{1496}{40}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

$$\bar{x} = 37.4$$

ومنه فان متوسط دخل الموظفين هو 34700 دج.

وهناك طريقة ثانية في حساب الوسط الحسابي تسمي بالطريقة غير المباشرة او طريقة الوسط الفرضي X_0 ، فإذا كانت لدينا القيم التالية: $x_1.x_2.x_3..........x_n$، فمتوسطها الحسابي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = XO + = \frac{\sum ni(\mathrm{Xi} - \mathrm{xo})}{\sum \mathrm{ni}}$$

ويتم اختيار قيمة x_0 أي عدد حقيقي مختلف عن الصفر غير انه يفضل ان يكون أحد قيم مراكز الفئات.

مثال: نفس المثال السابق

المطلوب: أحسب متوسط دخل الموظفين بطريقة الوسط الفرضي.

الحل:

1- إيجاد متوسط دخل الموظفين: بمعنى حساب $\bar{x}$

$$\bar{x} = XO + = \frac{\sum ni(\mathrm{Xi} - \mathrm{xo})}{\sum \mathrm{ni}}$$

نفرض $x_0 = 35$ مثلا

نقوم بالحسابات المطلوبة في الجدول الموالي:

الدخل	]34-32]	]36-34]	]38-36]	]40-38]	]42-40]	]44-42]	المجموع **Σ**
X_i	33	35	37	39	41	43	//
عدد الموظفين n_i	4	7	13	10	5	1	40
$X_i - x_0$	2-	0	2	4	6	8	
$n_{i*}(X_i - x_0)$	-08	0	26	40	30	8	96

$$\bar{x} = XO + = \frac{\sum ni(\mathrm{Xi} - \mathrm{xo})}{\sum \mathrm{ni}}$$

$$\bar{x} = 35 + \frac{96}{40}$$

$$\bar{x} = 35 + 2.4$$

$$\bar{x} = 37.4$$

ومنه فان متوسط دخل الموظفين هو 34700 دج، نفس النتيجة السابقة.

يفضل استخدام طريقة الوسط الفرضي والتي تهدف الى تبسيط العمليات الحسابية الطويلة حتى يسهل التعامل معها، عندما تكون البيانات الموجودة في الجداول المعطاة كبيرة القيم فإن استخدام الطريقة المباشرة يصبح صعب، كما يزداد احتمال الوقوع في الأخطاء بذلك فإنه في مثل هذه الحالات.

ملاحظة: في حالة الجداول المفتوحة لا يمكننا حساب المتوسط الحسابي مباشرة، ولحسابه يجب غلق الجدول بجعل طول الفئة المفتوحة مساويا لطول الفئة الأقرب إليها. بمعنى اذا كان الجدول مفتوح عند الفئة الأولى نقوم بغلقه بجع الفئة الأولى معلومة الحدود بطول فئة يساوي طول الفئة الثانية، واذا كان مفتوح عند الفئة الأخيرة نجعلها بنفس طول الفئة ما قبل الأخيرة.

1-2-3- الوسط الحسابي المرجح:

أحيانا لا تكون القيم المراد حساب متوسطها الحسابي بنفس الأهمية بل أهميات نسبية مختلفة تختلف باختلاف معامل الترجيح الخاص بها. في مثل هذه الحالات فإن المتوسط الحسابي البسيط يمكن الاعتماد عليه في إيجاد المتوسط الصحيح والمنطقي، بل يتطلب الأمر استخدام صيغة أخرى تسمى بصيغة المتوسط الحسابي المرجح:

$$\text{المتوسط الحسابي المرجح} = \frac{\text{مجموع حاصل ضرب مل قيمة في معاملها}}{\text{مجموع المعاملات}} = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

حيث: x_i = تمثل القيم.

n_i = تمثل المعاملات او الترجيحات او وزن كل قيمة.

ويستخدم المتوسط الحسابي المرجع كذلك لإيجاد المتوسط الحسابي لمجموع البيانات أو أكثر في حالة دمجهم معا في مجموعة واحدة وبالتالي فإن متوسط الحسابي المرجح لمجموعتين من البيانات y,z يساوي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}{n+Z}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = n\overline{Z}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\overline{Y}$$

$$\overline{X} = \frac{n\overline{Z} + Z\overline{Y}}{n+Z}$$

مثال: الجدول التالي يبين عدد العمال ومتوسط الأجر للعامل الواحد في الوحدات المختلفة التي تشكل الشركة الوطنية لإنتاج الأنابيب البلاستيكية. المطلوب حساب متوسط الأجور التي توزعها هذه الشركة؟[1].

الفرع	وحدة الشمال	وحدة الشرق	وحدة الجنوب
عدد العمال	130	110	80
متوسط الأجور	13000	14500	18500

الحل:

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2 + n_3\overline{x}_3 \ldots\ldots\ldots + n_1\overline{x}_1}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots\ldots + n_4}$$

$$\overline{X} = \frac{(130x13000) + (110x14500) + (80x18500)}{130 + 110 + 80} = \frac{1690000 + 1595000 + 1480000}{320}$$

$$\overline{X} = \frac{4765000}{320} = 14890{,}62 = \text{متوسط أجر عمال الشركة}$$

ملاحظة: لا يمكن حل بشكل صحيح إذا اعتبرنا أن متوسط الأجر في شركة هو عبارة عن مجموع متوسط الأجر في الوحدات الثلاث مقسوما على عدد الوحدات فإن الإجابة تكون خاطئة فالإجابة الصحيحة هي تلك التي يمكن الحصول عليها من خلال علاقة المتوسط الحسابي المرجح.

1-2-4- خواص المتوسط الحسابي:

1 – يعتبر المتوسط الحسابي أبسط مقاييس المركزية حسابا وأكثرها استخداما.

2 – يأخذ المتوسط الحسابي بعين الاعتبار جميع قيم الظاهرة المدروسة.

3 – مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفر = $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X}) = 0$ وللتأكد من ذلك نقوم بتفكيك الطرف الأيمن:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})$$
$$= \sum X_i - \sum X$$
$$= \sum X_i - n\overline{X}$$

(كون: $n\overline{X} = \ldots\ldots\overline{X} + \overline{X} + \overline{X}$)

نضرب الحد الأول في n ونقسمه على n

[1] موسي عبد الناصر، سبق ذكره، ص 45.

$$= \frac{n\sum X_i}{n} - n\overline{X}$$
$$= n\overline{X} - n\overline{X} = 0$$

4- يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة).

مثال: أحسب المتوسط الحسابي للقيم التالية: 30، 35، 40، 45، 50، 100

الحل: $\bar{X} = \frac{1200}{6} = 200$

5- مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي تساوي الصفر .

مثال: أحسب المتوسط الحسابي للقيم التالية: 10، 20، 30، 40، 50.

الحل: $\bar{X} = \frac{150}{5} = 30$

أحسب مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي.

X_i	10	20	30	40	50
$X_i - \bar{X}$	-20	-10	0	10	20

و بالتالي: $\sum X_i - \bar{X} = 0$

6- مجموع مربع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي تكون أقل من مجموع مربع القيم عن أي قيمة أخرى.

مثال: لتكن لدينا القيم التالية: 5، 10، 15، 20، 25.

أحسب المتوسط الحسابي لهذه القيم و أحسب مربع انحرافاتها عن القيمة 5

الحل: $\bar{X} = \frac{75}{5} = 15$

X_i	5	10	15	20	25
$X_i - \bar{X}$	10 -	5 -	0	5	10
$(X_i - 5)^2$	0	25	100	225	400

2- **الوسيط** :

يعتبر الوسيط مقياس آخر للنزعة المركزية، حيث يتم من خلال الوسيط الوصول إلى رقم كمي يمثل القيمة التي تقع في منتصف قيم المتغير الكمي المدروس، لذا فإن الوسيط يمثل القيمة الكمية التي تكون نصف قراءات المتغير الكمي أقل منها بينما النصف الآخر أعلى منها[1].

عندما يكون عدد القيم معروف يمكن حساب الوسيط وفقا للخطوات التالية[2]:

- ترتيب القيم تصاعديا أو تنازليا.
- إذا كان عدد القيم فرديا فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في منتصف التوزيع، ويتم ايجاد ترتيب الوسيط حسب المعادلة التالية:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{N+1}{2}$$

فاذا كان لدينا البيانات التالية: 3، 6، 12، 18، 19، 21، 23 فإن القيم هنا عبارة عن سبع قيم ولذلك فإن القيم هنا عبارة عن سبع قيم ولذلك فإن ترتيب الوسيط هو:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{1+7}{2}$$

$$= 4$$

أي أن ترتيب الوسيط هو الرابع وبالتالي فإن الوسيط يساوي 18، حيث يقع تحته 3 قيم وفوقه 3 قيم أي 50% من القيم فوقه و 50% تحته.

هذا مع الأخذ بعين الاعتبار أن القيم السابقة مرتبة تصاعديا

- إذا كان عدد القيم زوجيا، فإن منتصف المسافة بين القيمتين الواقعتين في وسط التوزيع تكون الوسيط، أي أن هناك ترتيبان وذلك وفقا للمعادلة الآتية:

$$\text{الترتيب الأول} = \frac{N}{2}$$

$$\text{الترتيب الثاني} = \frac{N}{2} + 1$$

[1] علي بن محمد الجمعة، مادة الإحصاء العام، 1428هـ، الطبعة الأولى، ص 28.

[2] عبد الله فلاح المنيزل، عايش موسى عرايبة، مرجع سبق ذكره، ص 56.

2-1- الوسيط في حالة بيانات غير مبوبة: لحساب الوسيط في هذه الحالة، نتبع الخطوات التالية:

- ترتيب القيم ترتيبا تصاعديا أو تنازليا.
- تحديد رتبة الوسيط بالعلقة التالية: $\frac{N+1}{2}$.

مثال: عدد القيم هو عدد فردي :

لدينا القيم التالية: 2، 5، 7، 10، 11

الرتبة هي: $\frac{6+1}{2} = \frac{N+1}{2}$

الوسيط: 7

2-2- الوسيط في حالة البيانات مبوبة: في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

- نقوم بحساب التكرار التجميعي الصاعد.
- نحدد رتبة الوسيط بالعلاقة التالية: $\frac{\sum N_i}{2}$.
- نحدد الفئة الوسيطية أي التي تحتوي على قيمة الوسيط.
- نحسب قيمة الوسيط بالعلاقة التالية: $M_e = X_0 + \frac{\frac{\sum N_i}{2} - N_1'}{NM_e}.K$

حيث:

M_e: قيمة الوسيط

X_0: حد الأدنى للفئة الوسيطية

N_1':تكرار تصاعدي للفئة الوسيطية السابق

NM_o: تكرار عادي للفئة

K: طول الفئة الوسيطية

مثال: البيانات التالية تمثل النفقات الشهرية لمجموعة من الأسر لإحدى المدن الجزائرية مقدرة بآلاف الدينارات و المطلوب حساب الوسيط.

فئات X_i	[5 ، 10[	[10 ، 15[	[15 ، 20[	[20 ، 25[	[25 ، 30[	[30 ، 35[	المجموع
تكرار N_i'	7	13	15	6	5	4	50
تكرار تصاعدي	7	20	35	41	46	50	

- نحدد ترتيب الوسيط بالغلاقة التالية : $\frac{\sum N_i}{2} = \frac{50}{2} = 25$

- الفئة الوسيطية هي : [15 ، 20[

- قيمة الوسط بالعلاقة التالية : $M_e = X_0 + \frac{\frac{\sum N_i}{2} - N_i'}{NM_e}$

$$M_e = 15 + \frac{25 - 20}{15}$$

$$M_e = 16.66$$

2-3- حساب الوسيط بيانيا:

من المثال السابق نحدد قيمة الوسيط

الفئات	[5 ، 10[	[10 ، 15[	[15 ، 20[	[20 ، 25[	[25 ، 30[	[30 ، 35[	المجموع
N_i	7	13	15	6	5	4	50
تكرار تصاعدي	7	20	35	41	46	50	
تكرار تنازلي	50	43	30	15	9	4	

2-4- خصائص الوسيط :

- لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة.

مثال: حدد قيمة الوسيط للسلسلة الإحصائية التالية : 5، 10، 15، 20، 25، 30، 200

الجواب: ترتيب القيم 5، 10، 15، 20، 25، 30، 200

قيمة الوسيط هي: $M_e = 20$

- يمكن حسابه بيانيا.
- لا يشترط في حسابه أن تكون أطوال الفئات متساوية

3- المتوسط الهندسي:

في الحالات التي تكون فيها قيم الظاهرة المدروسة عبارة عن نسب أو معدلات، أي في الحالات التي نرغب فيها بدراسة معدل تغيرات ظاهرة ما فإن المتوسط الحسابي لن يصف الظاهرة وصفا سليما، ويعطي صورة مشوهة ولهذا دعت الضرورة إلى إيجاد متوسط آخر يصلح لوصف مثل هذه الظواهر سمي هذا المتوسط بالمتوسط الهندسي، وهو واسع الاستخدام في الحياة الاقتصادية.

هذا المقياس قليل الاستعمال مقارنة بالمتوسطات السابقة، و يستعمل في حساب معدل الفائدة و معدل النمو و غيرها. و نرمز للمتوسط الهندسي بالرمز 'G'.

3-1- المتوسط الهندسي في حالة البيانات غير المبوبة:

لتكن لدينا القيم التالية $X_1.X_2.X_3,\dots\dots\dots..X_N$

$$G=\sqrt[N]{X_1.X_2.\dots\dots\dots..X_N}$$

مثال: أحسب المتوسط الهندسي للقيم التالية 1، 3، 9

الحل:

$$G=\sqrt[N]{X_1.X_2.\dots\dots\dots..X_N}=\sqrt[3]{1.9.3}=\sqrt[3]{27}$$

لدينا: $G=\sqrt[N]{X_1.X_2.\dots\dots\dots..X_N}$

$$G=(X_1.X_2.\ \dots\dots\dots.,X_N)^{1/N}$$
$$LogG=Log(X_1.X_2.\ \dots\dots\dots.,X_N)^{1/N}$$
$$LogG=\frac{1}{N}\ Log(X_1.X_2.\ \dots\dots\dots.,X_N)$$
$$LogG=\frac{1}{N}\ [LogX_1+LogX_2+\ \dots\dots\dots.+Log\ X_N]$$
$$LogG=\frac{[LogX_1+LogX_2+\ \dots\dots\dots.+Log\ X_N]}{N}$$
$$LogG=\frac{\sum_{i=1}^{N}LogX_i}{N}$$

مثال: أحسب المتوسط الهندسي للقيم 1، 3، 9.

$$LogG=\frac{[Log1+Log3+\ Log\ 9]}{3}=0.45$$
$$G=3$$

3-2- المتوسط الهندسي المرجح:

لتكن لدينا القيم التالية: $X_1.X_2.X_3,\dots\dots\dots..X_N$

مرفوقة بالتكرارات أو المعاملات $N_1.N_2.N_3,\dots\dots\dots..N_N$

المتوسط الهندسي لهذه القيم

$$G=\sqrt[\Sigma N_i]{X_1^{N_1}.X_2^{N_2}.\dots\dots\dots..X_N^{N_N}}$$
$$G=\left[X_1^{N_1}.X_2^{N_2}.\dots\dots\dots..X_N^{N_N}\right]^{1/\Sigma N_i}$$

$$LogG = Log\left[X_1^{N_1}.X_2^{N_2}.\dots\dots\dots..X_N^{N_N}\right]^{1/\sum N_i}$$
$$LogG = \frac{1}{\sum N_i} Log\left[X_1^{N_1}.X_2^{N_2}.\dots\dots\dots..X_N^{N_N}\right]$$
$$LogG = \frac{1}{\sum N_i}\left[LogX_1^{N_1} + Log\,X_2^{N_2} + \cdots + LogX_N^{N_N}\right]$$
$$LogG = \frac{1}{\sum N_i}\sum_{i=1}^{i=N} LogX_i^{N_i}$$

مثال: إذا كانت لدينا العلامات التالية المرفوقة بمعاملاتها.

أحسب المتوسط الهندسي لهذه العلامات.

العلامة	7	8	11	13
المعامل	2	3	5	2

الحل:

$$LogG = \frac{1}{\sum N_i}\left[LogX_1^{N_1} + Log\,X_2^{N_2} + \cdots + LogX_N^{N_N}\right]$$
$$LogG = \frac{1}{12}\,[2Log7 + 3Log8 + \ 5Log11 + 2Log\,13]$$
$$LogG = 0.98$$

3-3- المتوسط الهندسي في حالة البيانات المبوبة في فئات:

يتم حساب المتوسط الهندسي في حالة البيانات المبوبة في فئات باستخدام علاقة المتوسط الهندسي المرجح.

$$LogG = \frac{1}{\sum N_i}\sum_{i=1}^{i=N} LogX_i^{N_i}$$

حيث:

X_i : مركز الفئة

N_i : تكرار الفئة

مثال:البيانات التالية تمثل أجور أسبوعية لمجموعة من العمال

الفئات	]10،20]	]20،30]	]30،40]	]40،50]	المجموع
التكرار	2	6	7	5	18
X_i	15	25	35	45	

أحسب المتوسط الهندسي

الحل:

$$LogG = \frac{1}{18}\ [2Log15 + 4Log25 + \ 7Log35 + 5Log\ 45]$$

3-4- خواص المتوسط الهندسي: من أهم خواص المتوسط الهندسي ما يلي:

1- يدخل في حساب جميع القيم ولكنه أقل تأثرا بالقيم المتطرفة من المتوسط الحسابي.

2- لا يمكن حساب من الجداول التكرارية المفتوحة من البداية أو النهاية.

3- لا يمكن حسابه في حالة وجود قيمة سالبة أو معدومة.

4- يستخدم بأكثر واقعية عند وصف الظواهر النسبية.

5- قيمة المتوسط الهندسي لأي ظاهرة أصغر دائما من قيمة المتوسط الحسابي $G < \overline{X}$

4- المتوسط التوافقي:

المتوسط التوافقي هو من المقاييس الخاصة التي تستخدم لتحديد معدلات السرعة ومتوسط الأسعار، ومتوسط الكثافة السكانية. المتوسط التوافقي لمجموعة من القيم هو مقلوب المتوسط الحسابي لمقاليب هذه القيم.

فإذا كانت لدينا القيم: $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$.

فإن مقاليب هذه القيم هو $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{x_n}$

والمتوسط الحسابي لمقاليب هذه القيم هو $\dfrac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots\ldots \frac{1}{x_n}}{n}$

ومقلوب المتوسط الحسابي لمقاليب هذه القيم هو المتوسط التوافقي. $H = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots\ldots \frac{1}{x_n}}$

وباختصار $H = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

أما إذا كانت البيانات متكررة أو مبوبة في جداول توزيع تكراري فإن: $H = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{x_i}}$

حيث: n_i تمثل التكرار.

x_i تمثل القيم أو مراكز الفئات.

مثال: على ذلك نقول أن سائق قطع المسافة الفاصلة بين مدينتين على أربع مراحل متساوية، المسافة المقطوعة في كل منها 100 كم.

فإذا قطع المرحلة الأولى بسرعة 100كم/ساعة والمرحلة الثانية بسرعة 120كم/ساعة والمرحلة الثالثة بسرعة 150كم/ساعة والمرحلة الرابعة بسرعة 80كم/ساعة، أوجد متوسط سرعة هذا السائق على طول المرحلة؟.

بتطبيق علاقة المتوسط التوافقي على بيانات المثال السابق فإننا سنجد

متوسط السرعة $H = \frac{400}{\frac{100}{100}+\frac{100}{120}+\frac{100}{150}+\frac{100}{80}} = \frac{400}{\frac{1200+1000+800+1500}{1200}}$

$H = \frac{48000}{4500} =$ 106.67 كم/ساعة

فإذا ضربنا هذه السرعة في زمن المرحلة $\frac{45}{12}$ ساعة فإننا نحصل على 400 كم هي المسافة المقطوعة فعلا.

ملاحظة: $\overline{X} > G > H$ وهذه العلاقة صحيحة في كل الحالات.

مثال:

أحسب المتوسطات الثلاث (الحسابي والهندسي والتوافقي) للبيانات التالية: 2، 4، 6، 8.

الحل:

- المتوسط الحسابي $\overline{X} = \frac{2+4+6+8}{4} = \frac{20}{4} = 5$
- المتوسط الهندسي $G = \sqrt[4]{2\times4\times6\times8} = \sqrt[4]{384} = 4{,}42$
- المتوسط التوافقي $H = \frac{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{4}{\frac{24+12+8+6}{48}} = \frac{192}{50} = 3{,}84$

أي أن $\overline{X} > G > H$ وهذه العلاقة صحيحة في كل الحالات.

5- المنوال:

هو أبسط مؤشرات مقاييس النزعة المركزية، و يعرف بأنه القيمة الأكثر تكرارا في توزيع ما.

مثال: لتكن لدينا القيم الإحصائية التالية: 7، 15، 13، 8، 7، 11

نلاحظ أن القيمة 7 تكررت أكثر من غيرها من القيم، و من ثم فإن منوال السلسلة $_o = 7$

مثال: حدد منوال السلسلة التالية: 7، 13، 8، 11، 15، 13، 7.

نلاحظ أن القيمة 7 ، 13 تكررتا أكثر من غيرها من القيم، و بالتالي فهما منوال السلسلة.

$$M_{o_1} = 7 \wedge M_{o_2} = 13$$

مثال: حدد منوال السلسلة التالية: 8، 15، 13، 26، 25، 30، 35، 40.

هذه السلسلة عديمة المنوال

5-1- حساب المنوال في حالة البيانات المبوبة في الفئات: نتبع الخطوات التالية:

- نحدد الفئة المنوالية : هي الفئة التي تقابل أكبر تكرار في حالة ما إذا كانت أطوال الفئات متساوية، و هي التي تقابل أكبر تكرار معدل في حالة ما إذا كانت أطول الفئات غير متساوية.

5-1-1- طريقة الفروقات برسون:

- نحسب قيمة المنوال بالعلاقة التالية: $M_o = X_0 + \frac{1}{d_1+d_2}.K$

حيث:

M_o: المنوال

X_o: الحد الأدنى للفئة المنوالية

d_1: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية

d_1: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و تكرار الفئة اللاحقة لها

K::طول الفئة المنوالية

مثال:احسب الفئة المنوالية و المنوال بطريقة برسون

الفئات	]10،20]	]20،30]	]30،40]	]40،50]	]50،60]	]60،70]	المجموع
التكرار	5	7	3	8	15	12	50

الحل:

- الفئة المنوالية هي [60-50]

- نطبق العلاقة الرياضية : $M_o = X_0 + \frac{d_1}{d_1+d_2}.K$

$$\begin{cases} k = 10 \\ d_1 = 15 - 8 = 7 \\ X_0 = 50 \\ d_2 = 15 - 12 = 3 \end{cases}$$ و بالتالي : : $M_o = 50 + \frac{7}{7+3}.10$

$M_o = 57$

5-1-2- طريقة الرافعة :

يحسب المنوال بطريقة الرافعة بالعلاقة التالية: $M_o = X_0 + \frac{h_2}{h_1+h_2}.K$

حيث:

K: طول الفئة المنوالية

h_1: التكرار السابق لتكرار الفئة المنوالية

h_2: التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية

X_0: الحد الأدنى للفئة المنوالية

M_o: المنوال

مثال: احسب المنوال بطريقة الرافعة

الفئات	]10،20]	]20،30]	]30،40]	]40،50]	]50،60]	]60،70]	المجموع
التكرار	5	7	3	8	15	12	50

الحل:

نستخدم العلاقة التالية: $M_o = X_0 + \frac{h_2}{h_1+h_2}.K$

$$M_o = 50 + \frac{12}{12+8}.10 = 56$$

مثال: البيانات التالية تمثل مقدار التأخر مقدر بالدقائق لمجموعة من العمال في مؤسسة و المطلوب هو حساب المنوال بطريقتي برسون و الرافعة.

الفئات	]5،10]	]10،15]	]15،18]	]18،25]	]25،28]	]28،30]
التكرار	5	15	3	7	4	2
طول الفئة	5	5	3	7	3	2
التكرار المعدل	1.4	3	1	1	1.33	1

الحل:

طريقة الفروقات: $M_o = X_0 + \frac{d_1}{d_1+d_2}.K$

$$M_o = 10 + \frac{1.6}{1.6+2}.5 = 12.22$$

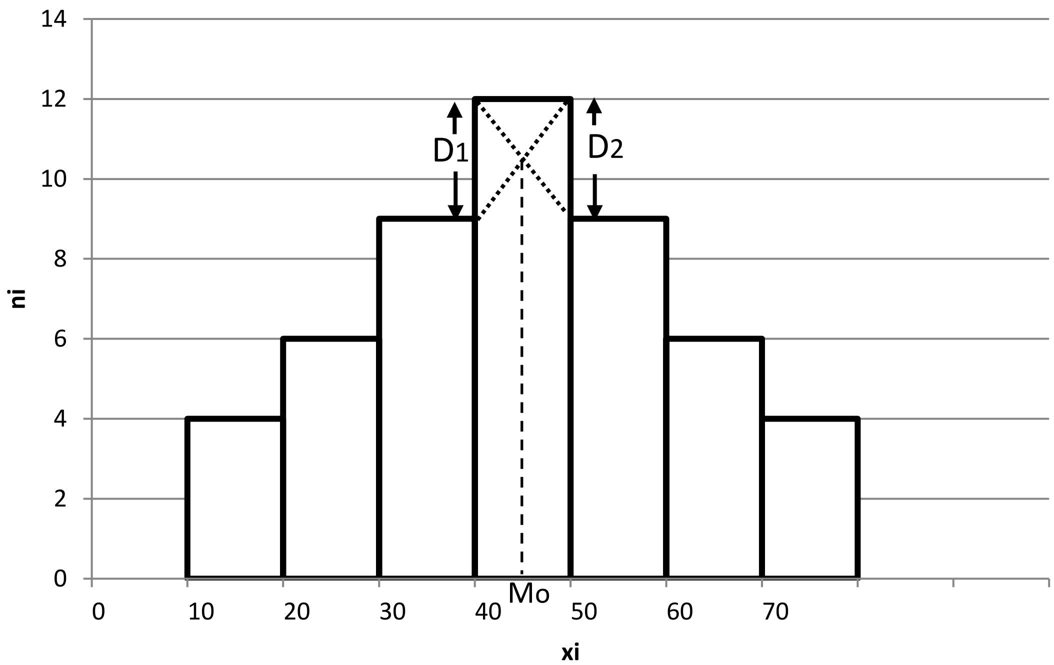
طريقة الرافعة: $M_o = X_0 + \frac{h_2}{h_1+h_2}.K$

$$M_o = 10 + \frac{1}{1+1.4}.5 = 12.08$$

5-2- حساب المنوال بيانيا: لتحديد المنوال بيانيا نرسم المدرج التكراري، ثم نقوم برسم قطعة مستقيمة انطلاقا من الزاوية.

مثال: البيانات التالية تمثل النفقات الشهرية لمجموعة من الأسر مقدرة بمئات الدينار.

الفئات	]10،20]	]20،30]	]30،40]	]40،50]	]50،60]	]60،70]
التكرار	5	7	3	8	15	12



5-3- العلاقة بين ¯ ، M_e ، M_o :

- **حالة التناظر**: إذاكانت القيم متناظرة؛ أي القيم موزعة توزيعا منتظما فإن :

$$M_e = M_o = \bar{X}$$

- **حالة غير التناظر**:

▪ **التوزيع مائل نحو اليمين**: في هذه الحالة

$$_o < M_e < \bar{X}$$

▪ **التوزيع مائل نحو اليسار**: في هذه الحالة

$$\bar{X} < M_e < M_o$$

إذن: العلاقة بين ¯ و M_e و M_o هي:

$$\bar{X} - M_o = 3(\bar{X} - M_e)$$

هي علاقة كارل ببرسون.

5-4- خواص المنوال:

1- لايتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة لانه لا يأخذ بعين الاعتبار كل القيم

2- يمكن ايجاده بيانيا.

3- بعض التوزيعات تملك اكثر من منوال.

4- يمكن حسابه في حالة الجداول المفتوحة

5- أفضل المقاييس في حالة المتغيرات الكيفية.

6- الربيعيات[1]

لما نقوم بتقسيم السلسلة الإحصائية إلى ثلاثة أقسام متساوية نتحصل على ربيعيات و نميز ثلاث أنواع هي:

6-1- الربيع الأول: هو القيمة التي تقسم السلسلة الإحصائية إلى قسمين حيث يكون 25 % من القيمة قبلها و 75% بعدها. و تحسب قيمة الربيع في حالة البيانات غير المبوبة. كما رأينا في حساب الوسيط فقط الرتبة تتغير.

[1] جلاطو جيلالي، مرجع سابق، ص 45.

رتبة الربيع: $Q = \frac{N+1}{4}$

مثال: حدد قيمة الربيع الأول للقيم التالية: 7، 19، 13، 12، 8، 11، 20

الحل:

الترتيب التصاعدي للقيم7، 8، 11، 12، 13، 19، 20.

$$\frac{N+1}{4} = \frac{7+1}{4} = 2$$

6-2- الربيع الثاني: الوسيط

6-3- الربيع الثالث: هو القيمة التي تقسم السلسلة الإحصائية إلى قسمين، 75% من القيمة قبلها و 25% من القيمة بعدها.و يحسب الربيع في حالة البيانات غير المبوبة، كما يحسب الربيع الأول و الوسيط فقط بتغيير الرتبة.

حساب الربيع الأول في حالة البيانات المبوبة في فئات .

1- نحسب التكرار التجميعي الصاعد.

2- نحدد رتبة الربيع الأول عن طريق العلاقة التالية: $\frac{\sum N_i}{4}$.

3- تحديد الفئة الربيعية و هي الفئة التي تقابل تكرار الربيع الأول.

4- نحسب قيمة الربيع بالعلاقة التالية:

$$Q_i = X_0 + \frac{\frac{\sum N_i}{4} - N_i'}{NQ_i}$$

حيث:

X_0 : الحد الأدنى لفئة الربيع الأول

$\frac{\sum N_i}{4}$: رتبة الربيع

K : طول فئة الربيع الأول

N_o: تكرار فئة الربيع الأول

7- العشريات:

لو نقوم بتقسيم السلسلة الإحصائية إلى عشرة أقسام، كل قسم يسمى الغشير و يحسب في حالة البيانات غير المبوبة كما يحسب الربيع الأول و الثالث.

رتبة العشير الأول: $\frac{N+1}{10}$

رتبة العشير الثاني: $2\left(\frac{N+1}{10}\right)$

رتبة العشير الثالث: $3\left(\frac{N+1}{10}\right)$

في حالة البيانات المبوبة في فئات $\Delta_i = X_0 + \frac{\frac{i\sum N_i}{10} - N_i'}{N\Delta_i}.K$

حيث:

K : طول فئة العشير

X_0 : الحد الأدنى للفئة العشيرية

$\frac{i\sum N_i}{10}$: رتبة العشير

Δ_i : العشير ذو الرتبة i

8- المئينات[1]

يحسب المئي في حالة البيانات غير المبوبة بنفس طريقة حساب الربيع الأول و الثالث فقط القسمة و الرتبة يتغيران.

رتبة المئي الأول: : $\frac{N+1}{100}$

رتبة المئي الثاني: $2\left(\frac{N+1}{100}\right)$

في حالة البيانات المبوبة في فئات نتبع العلاقات التالية:

$$\rho_i = X_0 + \frac{\frac{i\sum N_i}{100} - N_i'}{N\rho_i}.K$$

حيث:

[1] جلاطو جيلالي، مرجع سابق، ص 49.

K : طول الفئة المئوية

N_i : تكرار تصاعدي سابق للفئة المئوية

$\frac{i\sum N_i}{100}$: رتبة المئي

ρ_i : المئي ذو الرتبة i

مثال: تمثل البيانات التالية فئات أعمار لمجموعة من العمال في شركة وطنية .

الفئات	[20،25[	[25،30[	[30،35[	[35،40[	[40،45[	[45،50[	[50،55[	[55،60[	المجموع
التكرار	8	11	13	30	18	7	22	15	124
تكرار تصاعدي	8	19	32	62	80	87	109	124	

أحسب Q_1،Q_3،Δ_3،Δ_7،ρ_{20}،ρ_{65}،ρ_{50} و فسر النتائج المحصل عليها

الحل:

حساب Q_1 :

فئة الربيع الأول [30،35[وقيمتها هي:

$$Q_1 = X_0 + \frac{\frac{\sum N_i}{4} - N_i'}{NQ_i} = 30 + \frac{\frac{124}{4} - 19}{13}.5 = 34.61$$

التفسير: هناك 25% من العمال أعمارهم أقل من 34.61 و 75% منهم أعمارهم أكبر من 34.61 سنة.

مثال: البيانات التالية تمثل الأجور الشهرية مقدرة بآلاف الدينارات في مؤسستين مختلفتين

المؤسسة 1	**26**	**28**	**30**	**32**	**34**
المؤسسة 2	10	20	30	40	50

قارن بين الأجور للمؤسستين

الجواب:

$$\bar{X}_1 = \frac{26+28+30+32+34}{5} = 30$$

$$\bar{X}_2 = \frac{26+28+30+32+34}{5} = 30$$

$$M_{e_1} = 30 \qquad M_{e_1} = 30$$

لا يوجد رقم من أجور العمال و لكن حسب مقاييس النزعة المركزية هناك مقاييس أخرى تعطى لنا صورة أكثر عمقا عن البيانات الإحصائية تسمى مقاييس التشتت.