

العمل النموذجي:

التحريبات: 01:

01 - احتمال أن تبقى هذه الأجهزة صالحة بعد سنتين:

$$P(X=10) = C_{10}^{10} (0,6)^{10} (0,4)^{10-10}$$

$$= (0,6)^{10} = 0,0060$$

02 - احتمال أن تكون هذه الأجهزة غير صالحة بعد سنتين:

$$P(X=0) = C_{10}^0 (0,6)^0 (0,4)^{10-0}$$

$$= (0,4)^{10} = 0,0001$$

03 - احتمال أن تبقى 5 أجهزة غير صالحة بعد سنتين:

$$P(X=5) = C_{10}^5 (0,6)^5 (0,4)^{10-5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} (0,6)^5 (0,4)^5$$

$$= 0,2006$$

04 - احتمال أن يبقى على الأقل 7 أجهزة غير صالحة بعد سنتين:
معناه: تبقى 3 أجهزة على أكثر صالحة

أي:

$$P(X \leq 3) = P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)$$

$$= C_{10}^3 (0,6)^3 (0,4)^7 + C_{10}^2 (0,6)^2 (0,4)^8 + C_{10}^1 (0,6)^1 (0,4)^9 + 0,0001$$

$$= 0,0424 + 0,0106 + 0,00157 + 0,0001 = 0,05467$$

05 - احتمال أن يبقى على الأقل 6 أجهزة صالحة بعد سنتين:

$$P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$

$$= C_{10}^6 (0,6)^6 (0,4)^4 + C_{10}^7 (0,6)^7 (0,4)^3 + C_{10}^8 (0,6)^8 (0,4)^2 + C_{10}^9 (0,6)^9 (0,4)^1 + 0,0060$$

$$= 0,2508 + 0,2149 + 0,1209 + 0,0403 + 0,0060 = 0,6329$$

06 - ايجاب دالة قانون التوزيع الاحتمالي :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
P(X=x)	0,0001	0,00057	0,00106	0,00424	0,11114	0,2006	0,2508	0,2149	0,1209	0,0403	0,0060	≈ 1

$$P(X=4) = C_{10}^4 (0,6)^4 (0,4)^6 = 0,11114$$

07 - حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري :

$$E(x) = np = 0,6 \times 10 = 6 \quad \text{P - التوقع الرياضي :}$$

$$V(x) = npq = 10 \times 0,6 \times 0,4 = 2,4 \quad \text{ب - انحراف المعياري :}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{2,4} = 1,54$$

التحريفة 02

01 - احتمال أن يصيب الهدف مرتان من بين سبع طلقات :

$$P(X=2) = C_7^2 (0,4)^2 (0,6)^{7-2}$$

$$= \frac{7!}{2!(7-2)!} (0,4)^2 (0,6)^5 = 0,2612$$

02 - احتمال أن يصيب الهدف ثلاث مرات من بين سبع طلقات :

$$P(X=3) = C_7^3 (0,4)^3 (0,6)^{7-3}$$

$$= \frac{7!}{3!(7-3)!} (0,4)^3 (0,6)^4 = 0,2903$$

03 - احتمال أن يصيب الهدف ثلاث مرات على الأقل من بين سبع طلقات

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$\begin{aligned} &= C_7^0 (0,4)^0 (0,6)^{7-0} + C_7^1 (0,4)^1 (0,6)^{7-1} + 0,2612 + 0,2903 \\ &= 0,0279 + 0,1304 + 0,2612 + 0,2903 \\ &= 0,7102 \end{aligned}$$

04 - احتمال أن يصيب الهدف مرة أو خمس مرات من 6 محاولات إطلاق :

$$P(x=1) + P(x=5) = C_6^1 (0.4)^1 (0.6)^{6-1} + C_6^5 (0.4)^5 (0.6)^{6-5}$$

$$= \frac{6!}{1!(6-1)!} (0.4)^1 (0.6)^5 + \frac{6!}{5!(6-5)!} (0.4)^5 (0.6)$$

$$= 0.2234$$

المسألة 03

01 - إيجاد قيم المتغير العشوائي X واحتمال كل قيمة :

* إيجاد قيم المتغير العشوائي X :

- إيجاد n, p, q :

لدينا : $E(x) = 2$ ، $V(x) = \frac{4}{3}$

نحل أن : $E(x) = np$ ، $V(x) = npq$

$$\begin{cases} np = 2 \\ npq = \frac{4}{3} \end{cases}$$

ومنه :

$$2q = \frac{4}{3} \Rightarrow q = \frac{4}{6}$$

اذن :

ونحل أيضا : $p = 1 - q$

$$p = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6}$$

ومنه :

$$np = n \left(\frac{2}{6}\right) = 2 \Rightarrow n = 6$$

اذن :

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

* إيجاد احتمال كل قيمة :

$$P(x=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$* P(x=0) = C_6^0 \left(\frac{2}{6}\right)^0 \left(\frac{4}{6}\right)^{6-0} = 0.0877$$

$$* P(x=1) = C_6^1 \left(\frac{2}{6}\right)^1 \left(\frac{4}{6}\right)^{6-1} = 0.2633$$

$$* P(x=2) = C_6^2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^{6-2} = 0.3292$$

$$* P(x=3) = C_6^3 \left(\frac{2}{6}\right)^3 \left(\frac{4}{6}\right)^{6-3} = 0,2194$$

$$* P(x=4) = C_6^4 \left(\frac{2}{6}\right)^4 \left(\frac{4}{6}\right)^{6-4} = 0,0823$$

$$* P(x=5) = C_6^5 \left(\frac{2}{6}\right)^5 \left(\frac{4}{6}\right)^{6-5} = 0,0164$$

$$* P(x=6) = C_6^6 \left(\frac{2}{6}\right)^6 \left(\frac{4}{6}\right)^{6-6} = 0,0013$$

$$P(3 \geq x > 0) \quad P(x \geq 1) : 0 \rightarrow 0,2$$

$$* P(x \geq 1) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$$

$$= 0,2633 + 0,3292 + 0,2194 + 0,0823 + 0,0164 + 0,0013$$

$$P(x \geq 1) = \boxed{0,9119}$$

$$* P(3 \geq x > 0) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$$

$$= 0,2633 + 0,3292 + 0,2194$$

$$P(3 \geq x > 0) = \boxed{0,8119}$$

التمرين 04 :

01 - ايجاد قانون التوزيع الاحتمالي .

- نوع التوزيع : فوق الهندسي .

$$P(x=x) = \frac{C_b^x C_{N-b}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$b=3, n=4, N=10$$

$$x = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$* P(x=0) = \frac{C_3^0 C_{10-3}^{4-0}}{C_{10}^4} = 0,1667$$

$$* P(X=1) = \frac{C_3^1 C_{10-3}^{4-1}}{C_{10}^4} = 0,5$$

$$* P(X=2) = \frac{C_3^2 C_{10-3}^{4-2}}{C_{10}^4} = 0,3$$

$$* P(X=3) = \frac{C_3^3 C_{10-3}^{4-3}}{C_{10}^4} = 0,0333$$

اذن قانون التوزيع هو التالي :

X	0	1	2	3	Σ
P _X	0,1667	0,5	0,3	0,0333	1

02 - جان و سؤالان :

$$* P(1 \leq X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2)$$

$$= 0,5 + 0,3 = 0,8$$

$$* P(0 \leq X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= 0,1667 + 0,5 + 0,3 = 0,9667$$

$$* P(1 < X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3)$$

$$= 0,3 + 0,0333 = 0,3333$$

* جان E(X) ، V(X)

$$E(X) = np = n \left(\frac{b}{N} \right) = 4 \left(\frac{3}{10} \right) = 1,2$$

$$V(X) = npq \cdot \left(\frac{N-n}{N-1} \right) = 4 \left(\frac{3}{10} \right) \left(\frac{7}{10} \right) \left(\frac{10-4}{10-1} \right) = 0,56$$

التصريف كاه :
 ٥١ - ايجاد قانون التوزيع الاحتمالي :
 نوع التوزيع ، فوق الهندسي .

$$P(x=x) = \frac{C_b^x C_{N-b}^{n-x}}{C_N^n} \quad b=10, n=12, N=100$$

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$* P(x=0) = \frac{C_{10}^0 C_{100-10}^{12-0}}{C_{100}^{12}} = 0,2607$$

$$* P(x=1) = \frac{C_{10}^1 C_{100-10}^{12-1}}{C_{100}^{12}} = 0,3961$$

$$* P(x=2) = \frac{C_{10}^2 C_{100-10}^{12-2}}{C_{100}^{12}} = 0,2451$$

$$* P(x=3) = \frac{C_{10}^3 C_{100-10}^{12-3}}{C_{100}^{12}} = 0,0807$$

$$* P(x=4) = \frac{C_{10}^4 C_{100-10}^{12-4}}{C_{100}^{12}} = 0,0155$$

$$* P(x=5) = \frac{C_{10}^5 C_{100-10}^{12-5}}{C_{100}^{12}} = 0,0017$$

$$* P(x=6) = \frac{C_{10}^6 C_{100-10}^{12-6}}{C_{100}^{12}} = 0,0001$$

$$* P(x=7) = \frac{C_{10}^7 C_{100-10}^{12-7}}{C_{100}^{12}} = 0,000005$$

$$* P(x=8) = \frac{C_{10}^8 C_{100-10}^{12-8}}{C_{100}^{12}} = 0,00000001$$

$$* P(x=9) = \frac{C_{10}^9 C_{100-10}^{12-9}}{C_{100}^{12}} = 0,000000001$$

$$* P(x=10) = \frac{C_{10}^{10} C_{100-10}^{12-10}}{C_{100}^{12}} = 0,00000000000003$$

اذن قانون التوزيع # سقالي .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
P _x	0,2607	0,3961	0,2451	0,0807	0,0157	0,0017	0,0001	0,000005	0,000001	0,00000001	0,0000000003	1

02- حساب التوقع الرياضي و # انحراف المعياري .
P - التوقع الرياضي :

$$E(x) = np = n \left(\frac{b}{N} \right) = 12 \left(\frac{10}{100} \right) = 1,2$$

ب - # انحراف المعياري .

$$V(x) = npq \left(\frac{N-n}{N-1} \right) = 12 \left(\frac{10}{100} \right) \left(\frac{90}{100} \right) \left(\frac{100-12}{100-1} \right) = 0,96$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{0,96} = 0,979$$

03- حساب عدد # أيام المتوقعة

$$y = 10 + 3x \quad \text{لدينا}$$

$$E(y) = E(10 + 3x) \quad \text{ومن$$

$$E(Y) = E(10) + 3E(X) \quad \text{أي}$$

$$= 10 + 3(1,2)$$

$$= 13,6$$

- حساب التباين :

$$V(Y) = V(10 + 3X) = V(10) + V(3X)$$

$$= V(10) + 3^2 V(X)$$

$$= 0 + 3^2 V(X) = 9(0,96)$$

$$V(Y) = 8,64$$

التقريب 06 :

* نوع التوزيع : بواسون
 لدينا : متوسط 4 مرضى ← 2 دقيقة
 ومنت : متوسط 2 مرضى ← 1 دقيقة

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$* P(X=0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0,13 \quad (1) - \text{لا مريض}$$

$$* P(X=1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0,26 \quad (2) - \text{مريض واحد}$$

$$* P(X=2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0,26 \quad (3) - \text{مرضان}$$

$$* P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) \quad (4) - \text{على الأقل مريضان}$$

$$= 1 - (P(X=1) + P(X=0))$$

$$= 1 - 0,26 - 0,13 = 0,61$$

(5) - ثلاثة مرتبة أو أربعة أو خمسة :

$$P(x=3) + P(x=4) + P(x=6) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} + \frac{2^4 e^{-2}}{4!} + \frac{2^6 e^{-2}}{6!}$$
$$= 0,1733 + 0,0866 + 0,0115 = 0,2714 .$$

التحويل : $\sigma = 1,5$

* $P(21,09 \leq x \leq 24,63) = P\left(\frac{21,09 - 24}{1,5} \leq T \leq \frac{24,63 - 24}{1,5}\right)$

$$= P(-1,94 \leq T \leq 0,42) = P(T \leq 0,42) - P(T \leq -1,94)$$
$$= 0,66276 - 0,02619 = 0,63657$$

* $P(-1 \leq T \leq 1) = P(T \leq 1) - P(T \leq -1)$

$$= 0,84134 - 0,15866$$
$$= 0,68268$$

* $P(x \geq 27) = P\left(T \geq \frac{27 - 24}{1,5}\right) = P(T \geq 2)$

$$= P(T \leq -2) = 0,02275$$

التحويل : $\sigma = 1,5$

* $\sigma = 1$ و $\mu = 0$ Φ $\sigma = 1$ $\mu = 0$ Φ $\sigma = 1$ $\mu = 0$

* $P(x > -1) = P(x < 1) = 0,84134$

* $P(x = 1) = 0$ لأنه مستمر

* $P(-2 \leq x \leq 1) = P(x \leq 1) - P(x \leq -2)$

$$= 0,84134 - 0,02275$$
$$= 0,81859$$

* $P(x \geq -2,33) = 1 - P(x \leq -2,33)$

$$= 1 - 0,0090 = 0,9901$$

* حساب A متفائلة بحيث $\mu = 0$ و $\sigma = 2$

$$\begin{aligned} * P(X > 1.24) &= P\left(T > \frac{1.24 - 0}{2}\right) = P(T > 0.62) \\ &= P(T \leq -0.62) = 0.26763 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * P(X > 5) &= P\left(T > \frac{5}{2}\right) = P(T > 2.5) \\ &= P(T \leq -2.5) = 0.00621 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * P(8.6 < X \leq 14) &= P\left(\frac{8.6}{2} < T \leq \frac{14}{2}\right) = P(T \leq 7) - P(T \leq 4.3) \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * P(X \geq -2) &= P\left(T \geq \frac{-2}{2}\right) = P(T \geq -1) = P(T \leq 1) \\ &= 0.84134 \end{aligned}$$

03- تحديد قيمة μ و σ بحيث :

$$P(X > 4) = 0.8413, \quad P(4 \leq X \leq 8) = 0.6836$$

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = 0.8413 \quad \text{أي :}$$

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

معناه : بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد :

$$\frac{4 - \mu}{\sigma} = -1 \quad \text{..... (1)}$$

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 8) &= P\left(\frac{4 - \mu}{\sigma} \leq T \leq \frac{8 - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{و} \\ &= P\left(T \leq \frac{8 - \mu}{\sigma}\right) - P\left(T \leq \frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = 0.6836 \\ &= P\left(T \leq \frac{8 - \mu}{\sigma}\right) - 0.1587 = 0.6836 \end{aligned}$$

$$P\left(T \leq \frac{8-4}{\sigma}\right) = 0,8423$$

بالرجوع إلى جدول الطبيعي المعياري نجد :

$$\begin{cases} \frac{8-4}{\sigma} = 1 & \text{----- (2)} \\ \frac{4-4}{\sigma} = -1 & \text{----- (1)} \end{cases}$$

بعد الحل نجد :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = 6 \\ \sigma = 2 \end{array}}$$

التمرين 09 : حساب

$$P(65 \leq X \leq 75) \cdot P(X \leq 70)$$

لدينا :

$$\begin{cases} P(X < 50) = 0,1 \\ P(X > 100) = 0,05 \end{cases}$$

$$P(X < 50) = P\left(T < \frac{50-4}{\sigma}\right) = 0,1$$

من الجدول نجد :

$$\frac{50-4}{\sigma} = -1,64 \text{ ----- (1)}$$

$$P(X > 100) = P\left(T > \frac{100-4}{\sigma}\right) = 1 - P\left(T \leq \frac{100-4}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(T \leq \frac{100-4}{\sigma}\right) = 1 - 0,05 = 0,95$$

$$\frac{100-4}{\sigma} = 1,65 \text{ ----- (2)}$$

من الجدول نجد :

$$\begin{cases} \frac{50-4}{\sigma} = -1,64 & \text{----- (1)} \\ \frac{100-4}{\sigma} = 1,65 & \text{----- (2)} \end{cases}$$

بدر حل، جملة المتغيرين زوجية :

$$\mu = 74,91$$

$$\sigma = 15,19$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\sigma^2 = (15,19)^2 = 230,73$$

$$X \rightsquigarrow N(74,91, 230,73)$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 70) &= P\left(T \leq \frac{70 - 74,91}{15,19}\right) \\ &= P(T \leq -0,32) \end{aligned}$$

$$P(X \leq 70) = 0,37448$$

$$\begin{aligned} P(65 \leq X \leq 75) &= P\left(\frac{65 - 74,91}{15,19} \leq T \leq \frac{75 - 74,91}{15,19}\right) \\ &= P(-0,65 \leq T \leq 0,005) \\ &= P(T \leq 0,005) - P(T \leq -0,65) \\ &= 0,5 - 0,25785 = 0,24215 \end{aligned}$$

التمرين 10 :

* حساب احتمالات :

نوع التوزيع : فوق الهندسي :

$$n = 100$$

$$b = \frac{20}{100} (10000), \quad N = 10000$$

$$b = 2000$$

$$\frac{N}{10} = \frac{10000}{10} = 1000 > n = 100$$

يمكن تقريب هذا التوزيع إلى التوزيع الطبيعي .

$$n = 100, \quad p = \frac{b}{N} = \frac{2000}{10000} = 0,2, \quad q = 0,8$$

$$np = 0,2 \times 100 = 20 > 5$$

$$nq = 0,8 \times 100 = 80 > 5$$

يمكن تقريب هذا التوزيع إلى التوزيع الطبيعي .

$$\mu = E(x) = np$$

$$\mu = np = 100 \times 0,2 = 20$$

$$V(x) = \sigma^2 = npq \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

$$= 100 (0,2) (0,8) \left(\frac{10000 - 100}{10000 - 1} \right)$$

$$= 15,84$$

$$\sigma = 3,98$$

$$* P(x = 26) = P(25,5 \leq x \leq 26,5)$$

$$= P\left(\frac{25,5 - 20}{3,98} \leq T \leq \frac{26,5 - 20}{3,98} \right)$$

$$= P(1,38 \leq T \leq 1,63)$$

$$= P(T \leq 1,63) - P(T \leq 1,38)$$

$$= 0,94845 - 0,91621$$

$$P(x = 26) = 0,03224$$

$$P(X \geq 23) = P(X \geq 22.5) = P\left(T \geq \frac{22.5 - 20}{3.98}\right)$$

$$= P(T \geq 0.62) = P(T \leq -0.62)$$

$$= 0.26763$$

$$P(X < 22) = P(X \leq 21.5) = P\left(T \leq \frac{21.5 - 20}{3.98}\right)$$

$$= P(T \leq 0.37)$$

$$= 0.64431$$

$$P(X > 25) = P(X > 25.5) = P\left(T > \frac{25.5 - 20}{3.98}\right)$$

$$= P(T > 1.38) = 1 - P(T \leq 1.38)$$

$$= 1 - 0.91621 = 0.08379$$

$$= 0.08379$$