المقياس: إحصاء 2 السلسلة: الثانية المجموعة: 1، 2، 3

الحل النموذجي:

التمرين 01:

01- ايجاد دالة قانون التوزيع الاحتمالي:

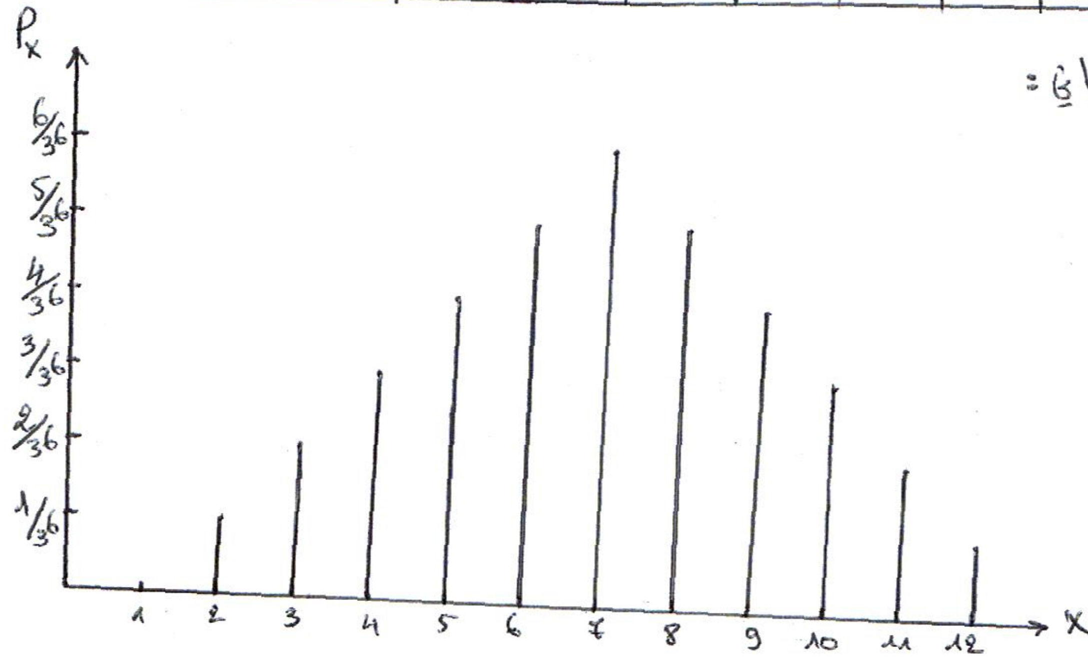
$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

عدد الحالات الممكنة

$$AR_6^2 = n^p = 6^2 = 36$$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
P_X	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

* التمثيل البياني:



02- حساب الاحتمالات:

$$* \quad P(X \leq 6) = P(X=6) + P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) + P(X=2)$$
$$= \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}$$
$$\boxed{= \frac{15}{36}}$$

$$* \quad P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12)$$
$$= \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}$$
$$\boxed{= \frac{10}{36}}$$

$$* \; P(8 < x < 11) = P(x=9) + P(x=10)$$
$$= \frac{4}{36} + \frac{3}{36}$$
$$\boxed{= \frac{7}{36}}$$

03 - إلقاء زهرتي نرد في آن واحد :

$$x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

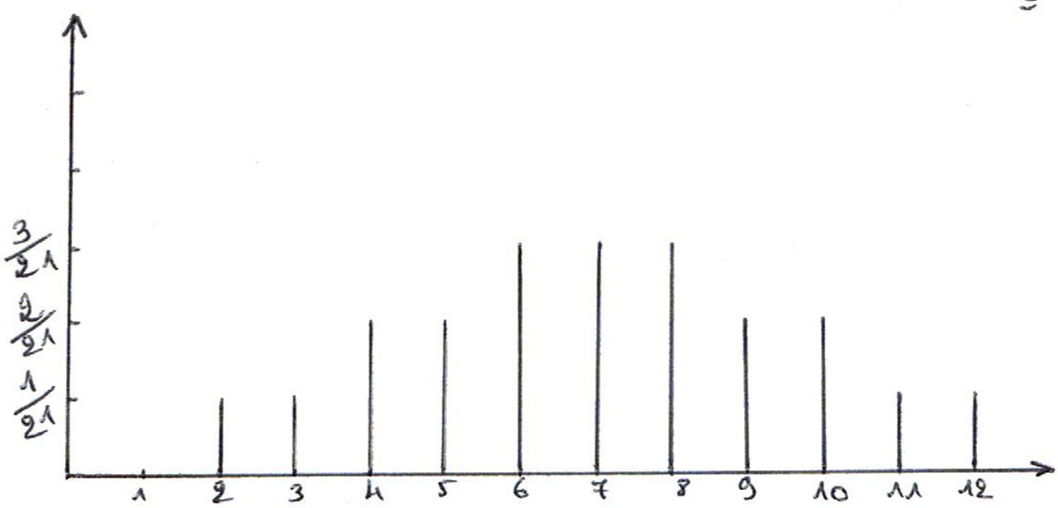
عدد الحالات الممكنة :

$$K_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} = \frac{(6+2-1)!}{2!\,(6-1)!} = 21$$

أ- قانون التوزيع الاحتمالي :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
P_x	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	1

ب- التمثيل البياني



ج- حساب الاحتمالات :

$$* \; P(x \leq 6) = P(x=6) + P(x=5) + P(x=4) + P(x=3) + P(x=2)$$
$$= \frac{3}{21} + \frac{2}{21} + \frac{2}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21}$$
$$\boxed{= \frac{9}{21}}$$

$$* \; P(x \geq 9) = P(x=9) + P(x=10) + P(x=11) + P(x=12)$$
$$= \frac{2}{21} + \frac{2}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21}$$
$$\boxed{= \frac{6}{21}}$$

$$* \; P(8 < X < 11) = P(X=9) + P(X=10)$$
$$= \frac{2}{21} + \frac{2}{21}$$
$$\boxed{= \frac{4}{21}}$$

التمرين 02:

01- ايجاد دالة قانون التوزيع الاحتمالي:

$X = \{-50 , 0 , 100\}$

عدد الحالات الممكنة:

$n^P = 2^4 = 16$

الحالات الممكنة (Ω):

$\Omega = \{FFFF , FFFP , FFPF , FPFF , PFFF , FFPP , FPFP , FPPF , PFPF , PPFF , PFFP , PPPP , PPPF , PPFP , PFPP , FPPP\}$

- قانون التوزيع الاحتمالي:

X	-50	0	100	Σ
P_X	$\frac{6}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{2}{16}$	1

التمرين 03:

نفترض أن:

- J - حدث فوزه في المباراة ليوم الخميس
- L - حدث فوزه في المباراة ليوم الاثنين.

$\Omega = \{(L , J) ; (L , \overline{J}) ; (\overline{L} , J) ; (\overline{L} , \overline{J})\}$

- تحديد الاحتمالات المعاكسة:

$P(\overline{J}) = 1 - P(J) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$P(\overline{L}) = 1 - P(L) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

$X = \{0 , 1 , 2\}$

ايجاد قانون التوزيع الاحتمالي:

$$P(X=0) = P(\bar{L} \cap \bar{J}) = P(\bar{L}) \times P(\bar{J})$$
$$= 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06$$

$$P(X=1) = P\left[(L \cap \bar{J}) \cup (\bar{L} \cap J)\right] = P(L) \times P(\bar{J}) + P(\bar{L}) \times P(J)$$
$$= 0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}38$$

$$P(X=2) = P(L) \times P(J) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$$

ومنه قانون التوزيع الاحتمالي:

X	0	1	2	Σ
P_X	0,06	0,38	0,56	1

التمرين 04:

$$P(X=1) = p = 0{,}5$$
$$P(X=2) = pq = (0{,}5)(0{,}5) = 0{,}25$$
$$P(X=3) = pq^2 = (0{,}5)(0{,}5)^2 = 0{,}125$$
$$P(X=4) = pq^3 = (0{,}5)(0{,}5)^3 = 0{,}0625$$
$$P(X=5) = pq^4 = (0{,}5)(0{,}5)^4 = 0{,}03125$$
$$P(X=6) = pq^5 = (0{,}5)(0{,}5)^5 = 0{,}015625$$
$$P(X=7) = pq^6 = (0{,}5)(0{,}5)^6 = 0{,}0078125$$
$$P(X=8) = pq^7 = (0{,}5)(0{,}5)^7 = 0{,}00390625$$
$$P(X=9) = pq^8 = (0{,}5)(0{,}5)^8 = 0{,}001953125$$
$$P(X=10) = pq^9 = (0{,}5)(0{,}5)^9 = 0{,}0009765625$$

قانون التوزيع الاحتمالي

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
P_X	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,0078125	0,00390625	0,001953125	0,0009765625	1

التمرين 05 :

1- إكمال الجدول :

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	Σ
$f(x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{25}$	1

2 - قيمة التوقع الرياضي : $E(X) = 0$ لأنه متناظر

3 - حساب التباين :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{7} x_i^2 P_i - 0$$

$$= (-3)^2\left(\frac{1}{25}\right) + (-2)^2\left(\frac{3}{25}\right) + (-1)^2\left(\frac{1}{5}\right) + (0)^2\left(\frac{7}{25}\right) + (1)^2\left(\frac{1}{5}\right) + (2)^2\left(\frac{3}{25}\right)$$

$$+ (3)^2\left(\frac{1}{25}\right) = \frac{52}{25}$$

$$V(X) = 2{,}08$$

$$\sigma_X = \sqrt{2{,}08} \Rightarrow \boxed{\sigma_X = 1{,}44}$$

التمرين 06 :

1- حتى تكون $P(X=x)$ هي دالة قانون التوزيع الاحتمالي يجب أن يكون

$$\sum_{x=1}^{5} P(X=x) = 1$$

لدينا :

$$\sum_{x=1}^{5} P(X=x) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

اذن $P(X=x)$ هي دالة قانون التوزيع الاحتمالي

2 - الصيغة الرياضية لهذا التوزيع :

$$\boxed{P(X=x) = \frac{X}{\sum_{X=1} X}}$$

3 - حساب الاحتمالات :

$* \; P(X=2{,}5) = 0$ حدث مستحيل

$$* \; P(2 \leqslant x < 4) = P(x=2) + P(x=3)$$
$$= \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$* \; P(-2 \leqslant x \leqslant 2) = P(x=-2) + P(x=-1) + P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$$
$$= 0+0+0+\frac{1}{15}+\frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

4- ايجاد $E(g(x))$

أ- لما $g(x)=x$:

$$E(g(x)) = E(x) = \sum x P_x$$
$$= \sum x\left(\frac{x}{\sum x}\right) = \frac{\sum x^2}{\sum x} = \frac{\frac{5(5+1)(2\times5+1)}{6}}{15}$$
$$= \frac{5\times 6\times 11}{6\times 15} = \boxed{\frac{11}{3}}$$

ب- لما $g(x) = 2x+4$:

$$E(g(x)) = E(2x+4) = 2E(x)+4 = 2\left(\frac{11}{3}\right)+4$$
$$\boxed{E(g(x)) = \frac{34}{3}}$$

ايجاد $V(g(x))$:

أ- لما $g(x) = x$

$$V(g(x)) = V(x) = \sum x^2 P_x - (E(x))^2$$
$$= \sum x^2\left(\frac{x}{\sum x}\right) - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{\sum x^3}{\sum x} - \left(\frac{11}{3}\right)^2$$
$$= \frac{\frac{5^2(5+1)^2}{4}}{15} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{5\times5\times36}{4\times5\times3} - \frac{121}{9}$$
$$= 15 - \frac{121}{9} = \boxed{\frac{14}{9}}$$

لما $g(x) = 2x+4$

$$V(2x+4) = 2^2 V(x) + 0 = 2^2\left(\frac{14}{9}\right)$$
$$\boxed{V(g(x)) = \frac{56}{9}}$$

التمرين 07

1 - التأكد من أن $f(x)$ دالة كثافة إحتمالية :

حتى تكون f دالة كثافة إحتمالية يجب أن يكون : $\int_0^3 f(x)\,dx = 1$

$$\int_0^3 \frac{4}{81}x(9-x^2)\,dx = \frac{4}{81}\int_0^3 9x - x^3\,dx = \frac{4}{81}\left[\frac{9x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^3$$

$$= \frac{4}{81}\left[\left(\frac{9(3)^2}{2}-\frac{(3)^4}{4}\right)-0\right] = \frac{4}{81}\left[\frac{2(81)-81}{4}\right]$$

$$= \frac{4}{81}\left(\frac{81}{4}\right) = 1$$

ومنه $f(x)$ دالة كثافة احتمالية

2 - حساب الاحتمالات :

$$* \ P(x<2) = \int_0^2 \frac{4}{81}x(9-x^2)\,dx$$

$$= \frac{4}{81}\left[\frac{9x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{4}{81}\left[\left(\frac{9(2)^2}{2}-\frac{(2)^4}{4}\right)-0\right]$$

$$= \frac{4}{81}(14) = \frac{56}{81}$$

$$* \ P\left(\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}\right) = \int_{0,5}^{2,5}\frac{4}{81}x(9-x^2)\,dx$$

$$= \frac{4}{81}\left[\frac{9x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0,5}^{2,5} = \frac{4}{81}\left[\left(\frac{9(2,5)^2}{2}-\frac{(2,5)^4}{4}\right)-\left(\frac{9(0,5)^2}{2}-\frac{(0,5)^4}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{69}{81}$$

$$* \ P(x\geq 1) = \int_1^3 \frac{4}{81}x(9-x^2)\,dx$$

$$= \frac{4}{81}\left[\frac{9x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{4}{81}\left[\left(\frac{9(3)^2}{2}-\frac{(3)^4}{4}\right)-\left(\frac{9(1)^2}{2}-\frac{(1)^4}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{64}{81}$$

التمرين 08:

01- ايجاد قيمة الثابت C حتى تكون الدالة f(x) عبارة عن دالة كثافة احتمالية:

معناه:

$$\int_0^4 Cx^2\,dx = 1$$

أي:

$$\left[\frac{Cx^3}{3}\right]_0^4 = 1$$

ومنه:

$$\frac{C(4)^3}{3} - 0 = 1$$

أي:

$$C(4)^3 = 3$$

اذن:

$$\boxed{C = \frac{3}{64}}$$

02- حساب الاحتمالات

* $P(x=2) = 0$ لأنه مستمر

* $P(x>3) = \int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^4 \frac{3}{64}x^2\,dx = \frac{3}{64}\left[\frac{x^3}{3}\right]_3^4$

$$= \frac{3}{64}\left[\frac{(4)^3}{3} - \frac{(3)^3}{3}\right] = \frac{37}{64}$$

* $P(1 < x < \frac{3}{2}) = \int_1^{1,5} \frac{3}{64}x^2\,dx = \frac{3}{64}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{1,5}$

$$= \frac{3}{64}\left[\frac{(1,5)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}\right] = \frac{2,37}{64}$$

03- حساب التباين و الانحراف المعياري

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$* \; E(x) = \int_0^4 x\, f(x)\, dx = \int_0^4 x \frac{3}{64} x^2\, dx = \frac{3}{64}\int_0^4 x^3\, dx$$

$$= \frac{3}{64}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 = \frac{3}{64}\left[\frac{(4)^4}{4} - 0\right] = \frac{3}{64}(64) \boxed{= 3}$$

$$* \; E(x^2) = \int_0^4 x^2 f(x)\, dx = \int_0^4 x^2 \frac{3}{64} x^2\, dx = \frac{3}{64}\int_0^4 x^4\, dx$$

$$= \frac{3}{64}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{3}{64}\left[\frac{(4)^5}{5} - 0\right] \boxed{= 9,6}$$

اذن :

$$V(x) = 9,6 - (3)^2 = 0,6$$

ومنه :

$$\sigma_x = \sqrt{0,6} \; \boxed{= 0,774}$$

التمرين 09 :

01 - حساب الاحتمالات :

$$* \; P(X > 2) = \int_2^{+\infty} f(x)\, dx = \int_2^{+\infty} 0\, dx \boxed{= 0}$$

$$* \; P(\leq X \leq 1) = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{8}(12x - 6x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 12x - 6x^2\, dx = \frac{1}{8}\left[\frac{12x^2}{2} - \frac{6x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{12(1)^2}{2} - \frac{6(1)^3}{3}\right) - 0\right] \boxed{= \frac{1}{2}}$$

$$* P(2 \geq x \geq 1) = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{8}(12x - 6x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_1^2 12x - 6x^2\,dx \quad = \frac{1}{8}\left[\frac{12x^2}{2} - \frac{6x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{12(2)^2}{2} - \frac{6(2)^3}{3}\right) - \left(\frac{12(1)^2}{2} - \frac{6(1)^3}{3}\right)\right] \boxed{= \frac{1}{2}}$$

حساب $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^2 x f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{8} x(12x - 6x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 12x^2 - 6x^3\,dx \quad = \frac{1}{8}\left[\frac{12x^3}{3} - \frac{6x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{12(2)^3}{3} - \frac{6(2)^4}{4}\right) - 0\right] \quad \boxed{= 1}$$

حساب σ_X :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} \qquad ; V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X) = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx - 1^2$$

$$= \int_0^2 x^2 \frac{1}{8}(12x - 6x^2)\,dx - 1 = \frac{1}{8}\int_0^2 12x^3 - 6x^4\,dx - 1$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{12x^4}{4} - \frac{6x^5}{5}\right]_0^2 - 1 \quad = \frac{1}{8}\left[\frac{12(2)^4}{4} - \frac{6(2)^5}{5}\right] - 1$$

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{5}}$$

و منه :

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{5}} \boxed{= \sqrt{0{,}1}}$$