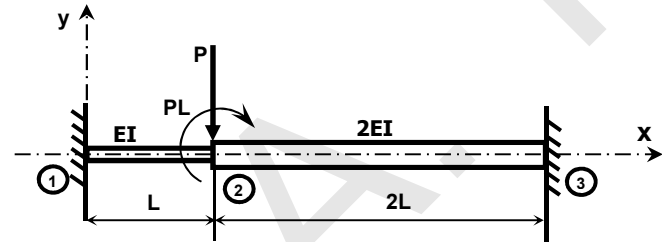


**Série d'exercices N°3**  
*La Méthode des Eléments Finis (FEM)*

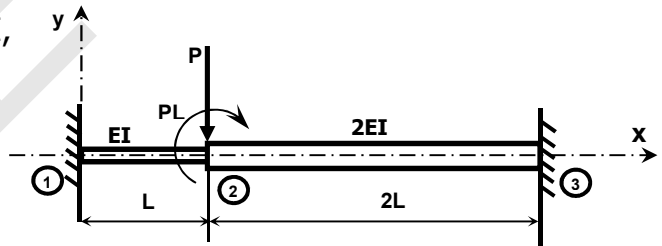
**Exercice 1:**

Déterminer **les expressions des déplacements** de la structure formée par deux éléments poutres en flexion dont les caractéristiques sont  $E$  et  $I$ .



**Exercice 2:**

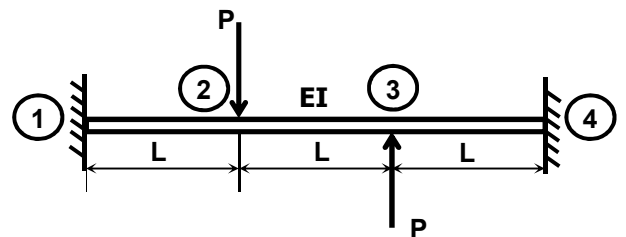
Structure formée par deux éléments poutres en flexion dont les caractéristiques sont  $E$  et  $I$ , comme illustré dans la figure, déterminer :



1. les déplacements possibles (linéaires et angulaires),
2. les réactions aux appuis et les moments de flexion.

**Exercice 3:**

Déterminer les déplacements, Les forces de réaction et les moments de flexion, de la structure formée par trois éléments poutres en flexion dont les caractéristiques sont  $E$  et  $I$ , comme illustré dans la figure.



| $\alpha$       | $0^\circ$ | $30^\circ$   | $45^\circ$   | $60^\circ$   | $90^\circ$ |
|----------------|-----------|--------------|--------------|--------------|------------|
| $\sin(\alpha)$ | 0         | $1/2$        | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1          |
| $\cos(\alpha)$ | 1         | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$        | 0          |

**Solution de la série d'exercices N°3**  
La Méthode des Eléments Finis (FEM)

**Solution exercice 1:**

1)

$$[K_{1-2}] = \frac{E \cdot I}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix}$$

$$[K_{2-3}] = \frac{2E \cdot I}{2L} \begin{bmatrix} 12/4L^2 & 6/2L & -12/4L^2 & 6/2L \\ 6/2L & 4 & -6/2L & 2 \\ -12/4L^2 & -6/2L & 12/4L^2 & -6/2L \\ 6/2L & 2 & -6/2L & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{E \cdot I}{L} \begin{bmatrix} 3/L^2 & 3/L & -3/L^2 & 3/L \\ 3/L & 4 & -3/L & 2 \\ -3/L^2 & -3/L & 3/L^2 & -3/L \\ 3/L & 2 & -3/L & 4 \end{bmatrix}$$

Où :

$$\frac{E \cdot I}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L & 0 & 0 \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 & 0 & 0 \\ -12/L^2 & -6/L & 15/L^2 & -3/L & -3/L^2 & 3/L \\ 6/L & 2 & -3/L & 8 & -3/L & 2 \\ 0 & 0 & -3/L^2 & -3/L & 3/L^2 & -3/L \\ 0 & 0 & 3/L & 2 & -3/L & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1=0 \\ \theta_1=0 \\ v_2=? \\ \theta_2=? \\ v_3=0 \\ \theta_3=0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1y}=? \\ M_1=? \\ R_{2y}=-P \\ M_2=-P \cdot L \\ R_{3y}=? \\ M_3=? \end{bmatrix}$$

Condition aux limites :

$$v_1=0, \theta_1=0 \mid v_2=?, \theta_2=? \mid v_3=0, \theta_3=0$$

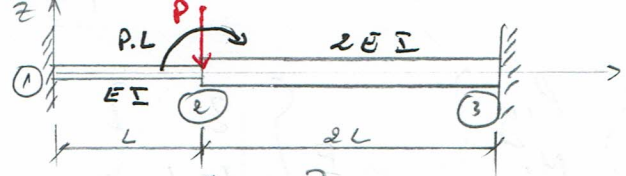
$$R_{1y}=?, M_1=? \mid R_{2y}=-P, M_2=-P \cdot L \mid R_{3y}=?, M_3=?$$

Où :

$$\frac{E \cdot I}{L} \begin{bmatrix} 15/L^2 & -3/L \\ -3/L & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ -P \cdot L \end{bmatrix}$$

# Solution Exercise 2:

On a:



$$\begin{Bmatrix} R_{1y} \\ M_1 \\ R_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{2y} \\ M_2 \\ R_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{2L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{2y} \\ M_2 \\ R_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 3/L^2 & 3/L & -3/L^2 & 3/L \\ 3/L & 4 & -3/L & 2 \\ -3/L^2 & -3/L & 3/L^2 & -3/L \\ 3/L & 2 & -3/L & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} ? \\ ? \\ -P \\ -P.L \\ ? \\ ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1y} \\ M_1 \\ R_{2y} \\ M_2 \\ R_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L & 0 & 0 \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 & 0 & 0 \\ -12/L^2 & -6/L & 15/L^2 & -3/L & -3/L^2 & 3/L \\ 6/L & 2 & -3/L & 8 & -3/L & 2 \\ 0 & 0 & -3/L^2 & -3/L & 3/L^2 & -3/L \\ 0 & 0 & 3/L & 2 & -3/L & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ ? \\ ? \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 15/L^2 & -3/L \\ -3/L & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ -P.L \end{Bmatrix}$$

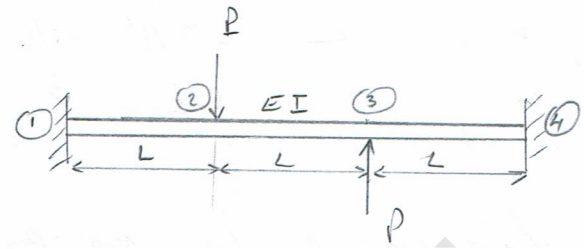
$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EI} \begin{Bmatrix} -11 PL^2 / 111 \\ -6 PL / 37 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11 PL^3 / (111 EI) \\ -6 PL^2 / (37 EI) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{1y} \\ M_1 \\ R_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} -12/L^2 & 6/L \\ -6/L & 2 \\ -3/L^2 & -3/L \\ 3/L & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -11 PL^3 / (111 EI) \\ -6 PL^2 / (37 EI) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 PL / 37 \\ 10 PL / 37 \\ 29 PL / 37 \\ -23 PL / 37 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{1y} \\ M_1 \\ R_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{P}{37} \begin{Bmatrix} 8 \\ 10L \\ 29 \\ -23L \end{Bmatrix}$$

# Solution Exercice 3:

$$\begin{Bmatrix} R_{1y} \\ M_1 \\ M_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} R_{2y} \\ M_2 \\ R_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{3y} \\ M_3 \\ -P \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{1y} \\ M_1 \\ -P \\ M_2 \\ P \\ M_3 \\ R_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L & -12/L^2 & 6/L & 0 & 0 \\ 6/L & 2 & 0 & 8 & -6/L & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12/L^2 & -6/L & 24/L^2 & 0 & -12/L^2 & 6/L \\ 0 & 0 & 6/L & 2 & 0 & 8 & -6/L & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1=0 \\ \theta_1=0 \\ v_2=0 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4=0 \\ \theta_4=0 \end{Bmatrix}$$

Les conditions aux limites (C.L):

$$v_1 = \theta_1 = v_4 = \theta_4 = 0$$

$$v_2 = -v_3$$

$$\theta_2 = -\theta_3$$

$$M_2 = M_3 = 0$$

$$\begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 24/L^2 & 0 & 12/L^2 & 6/L \\ 0 & 8 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 24/L^2 & 0 \\ 6/L & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$v_3 \rightarrow = -v_2$   
 $\theta_3 \rightarrow = \theta_2$

D'où:

$$\begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 36/L^2 & 6/L \\ 6/L & 10 \\ -36/L^2 & -6/L \\ 6/L & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 36/L^2 & 6/L \\ 6/L & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL^2}{162EI} \begin{Bmatrix} -5L \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{1y} \\ M_1 \\ R_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} -12/L^2 & 6/L & 0 & 0 \\ -6/L & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12/L^2 & -6/L \\ 0 & 0 & +6/L & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{PL^2}{162EI} \begin{Bmatrix} -5L \\ 3 \\ 5L \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{PL}{162} \begin{bmatrix} 78 \\ L \\ 36 \\ -78 \\ L \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{1y} \\ M_1 \\ R_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{P}{27} \begin{bmatrix} 13 \\ 6L \\ -13 \\ -6L \end{bmatrix}$$