

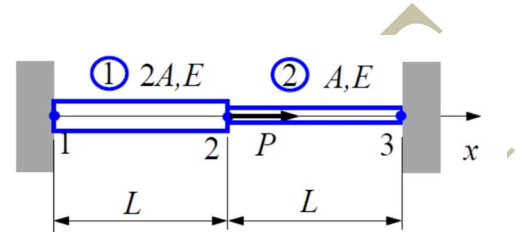
Série d'exercices N°2

La Méthode des Eléments Finis (FEM)

Exercice 1 :

Trouvez les charges (forces et réactions) du système de l'ensemble des deux barres chargées de force P et trouvez les *contraintes* dans chaque élément barre, comme indiqué sur la figure.

Solution: Utiliser deux barres 1-D.

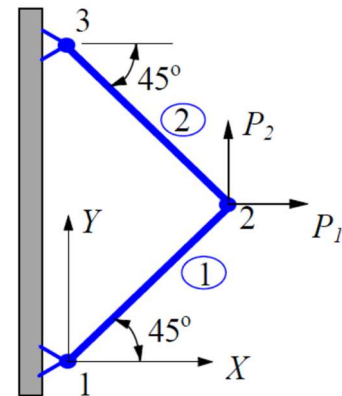


Exercice 2 :

Un treillis simple est constitué de deux barres identiques (avec E, A et L), chargé comme indiqué sur la figure.

Trouver :

- 1) déplacement du noeud 2;
- 2) les contraintes dans chaque barre.

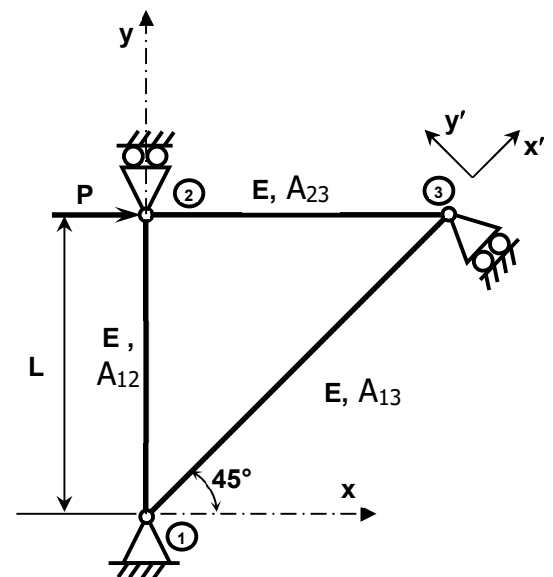


Exercice 3 :

Considérons un treillis composé de trois barres articulées (avec E et L) et chargées comme indiqué sur la figure.

Déterminer les déplacements et les forces de réaction.

1. Etablir la matrice de rigidité de chaque élément.
2. Etablir la matrice de rigidité $[K]$ du treillis.
3. Déterminer les conditions aux limites
4. Donner le système qui permettra de calculer les déplacements.
5. Etablir l'expression des déplacements des noeuds.
6. Etablir l'expression des réactions aux liaisons.
7. Etablir l'expression des contraintes dans les trois barres.



Avec: $P=1000$ kN, $L=1$ m, $E=210$ GPa

$A_{12}=6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_{23}=6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_{13}=6\sqrt{2} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Solution de la série d'exercices N°2
La Méthode des Eléments Finis (FEM)

Solution exercice 1:

Element (1):

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Element (2):

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'équation globale:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Les conditions de limite et de charge (C.L) :

$$u_1 = u_3 = 0$$

$$F_2 = P$$

D'où :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Donc :

$$\frac{EA}{L} [3] \{u_2\} = \{P\}$$

Où:

$$u_2 = \frac{PL}{3EA}$$

Et

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{3EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Contrainte dans le premier (1^{er}) élément :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E\varepsilon_1 = E\mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 = E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ &= E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} \left(\frac{PL}{3EA} - 0 \right) = \frac{P}{3A} \end{aligned}$$

Contrainte dans le second (2^d) élément :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= E\varepsilon_2 = E\mathbf{B}_2\mathbf{u}_2 = E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= E \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{E}{L} \left(0 - \frac{PL}{3EA} \right) = -\frac{P}{3A} \end{aligned}$$

Ce qui nous indique la barre 2 est en compression.

Vérifiez les résultats!

Solution exercice 2:

Cette structure simple est utilisée ici pour montrer le processus d'assemblage et de solution

Ces deux matrices ne peuvent pas être assemblées ensemble, car elles sont dans des systèmes de coordonnées différents. Nous devons les convertir au système de coordonnées globales OXY.

Elément 1:

$$\theta = 45^\circ$$

$$c = s = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En utilisant la formule (32) ou (33), on obtient la matrice de rigidité dans le système global

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{T}_1^T \mathbf{k}'_1 \mathbf{T}_1 = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elément 2:

$$\theta = 135^\circ$$

$$c = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad s = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}'_2 \mathbf{T}_2 = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assemblage de la structure (FE équation) :

$$\frac{E \cdot A}{2L} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1=0 \\ v_1=0 \\ u_2=? \\ v_2=? \\ u_3=0 \\ v_3=0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x}=? \\ F_{1y}=? \\ F_{2x}=P_1 \\ F_{2y}=P_2 \\ F_{3x}=? \\ v_{3y}=? \end{bmatrix}$$

Conditions aux limites et de charges (contraintes) (CL):

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0, \quad F_{2x} = P_1, \quad F_{2y} = P_2$$

L'équation FE condensée,

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

En résolvant ceci, on obtient le déplacement du noeud

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \frac{E \sqrt{2}}{L} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A} (P_1 + P_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E \sqrt{2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A} (P_1 - P_2)$$

Solution exercise 3**Element 1:**

$$\theta = 90^\circ, \quad c = 0, \quad s = 1$$

$$\mathbf{k}_1 = \frac{(210 \times 10^9)(6.0 \times 10^{-4})}{1} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (N / m)}$$

Element 2:

$$\theta = 0^\circ, \quad c = 1, \quad s = 0$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{(210 \times 10^9)(6.0 \times 10^{-4})}{1} \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (N / m)}$$

Element 3:

$$\theta = 45^\circ, \quad c = s = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{(210 \times 10^9)(6\sqrt{2} \times 10^{-4})}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ (N / m)}$$

L'équation globale

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1.5 & 0.5 \\ \text{Sym.} & & & & & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Charges et condition aux limites (CL) :

$$u_1 = v_1 = v_2 = 0 \quad \text{avec} \quad v'_3 = 0, \quad u'_3 = ?$$

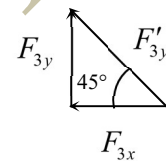
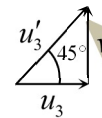
On a :

$$\operatorname{tg}(45) = \frac{v_3}{u_3} = 1 \Leftrightarrow v_3 = u_3$$

$$F_{2x} = P, \quad F'_{3y} = ?, \quad F'_{3x} = 0.$$

D'où

$$\operatorname{tg}(45) = \frac{F_{3y}}{-F_{3x}} \Leftrightarrow F_{3y} = -F_{3x}$$



$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Donc :

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ -F_{3X} \end{Bmatrix}$$

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2520 \times 10^5} \begin{Bmatrix} 3P \\ P \end{Bmatrix} = \frac{10^6}{252 \times 10^6} \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3/252 \\ 1/252 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01191 \\ 0.003968 \end{Bmatrix} (m)$$

$$v_3 = u_3 = 1/252 (m)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3/252 \\ 1/252 \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} -1/252 \\ -1/252 \\ 0 \\ -1/252 \\ 1/252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -500 \\ -500 \\ 0 \\ -500 \\ 500 \end{bmatrix} (KN)$$