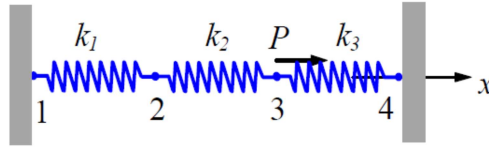


Série d'exercices N°1
La Méthode des Eléments Finis (FEM)

Exercice 1

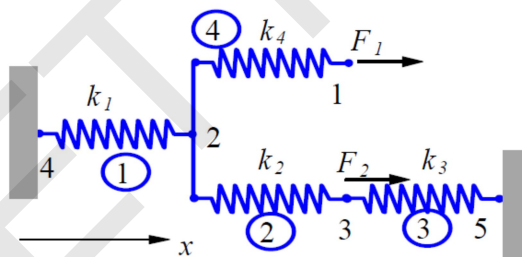
Pour le système de ressorts montré ci-dessus, on donne :

$$k_1 = 100 \text{ N/mm}, \quad k_2 = 200 \text{ N/mm}, \quad k_3 = 100 \text{ N/mm}$$

$$P = 500 \text{ N}, \quad u_1 = u_4 = 0$$

Trouver:

- 1) la matrice de rigidité globale
- 2) déplacements des noeuds 2 et 3
- 3) les forces de réaction aux noeuds 1 et 4
- 4) les forces dans le ressort 2

Exercice 2

Pour le système de ressorts trouver la matrice de rigidité globale.

Solution de la série d'exercices N°2
La Méthode des Eléments Finis (FEM)

Solution exercice 1 :

1) Les matrices de rigidité des éléments sont :

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad (\text{N/mm}) \quad (1)$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \quad (\text{N/mm}) \quad (2)$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad (\text{N/mm}) \quad (3)$$

En appliquant le concept de superposition, nous obtenons la matrice de rigidité globale pour le système à ressorts comme suit :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200+100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

Ou :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

Qui est symétrique et carrée.

L'équation d'équilibre (EF) pour l'ensemble du système est

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

2) En appliquant les conditions aux limites (CL), ($u_1=u_4=0$) dans l'équation (4), ou en supprimant la 1ère et la 4ème rangées et les colonnes, nous avons :

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

En résolvant l'équation (5), on obtient

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P/250 \\ 3P/500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ (mm)}$$

3) À partir équations précédentes, on obtient les forces de réaction

$$F_1 = -100u_2 = -200 \text{ (N)}$$

$$F_4 = -100u_3 = -300 \text{ (N)}$$

4) L'équation des EF pour l'élément (2) ou (le ressort (2)):

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

Ici $i = 2, j = 3$ pour l'élément (2). Donc, on peut calculer la force du ressort:

$$\begin{aligned} F = f_j = -f_i &= \begin{bmatrix} -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ &= 200 \text{ (N)} \end{aligned}$$

Veuillez vérifiez les résultats!

Solution exercice 2 :

Nous pouvons écrire les matrices de rigidité des éléments comme suit

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} u_4 & u_2 \\ k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} u_3 & u_5 \\ k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} u_2 & u_1 \\ k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

En appliquant la méthode de superposition, nous obtenons la matrice de rigidité globale comme suit

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c|ccccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ \hline & k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & -k_4 & k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\ \hline & 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\ \hline & 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{array}$$

La matrice est symétrique, carrée, mais singulière.