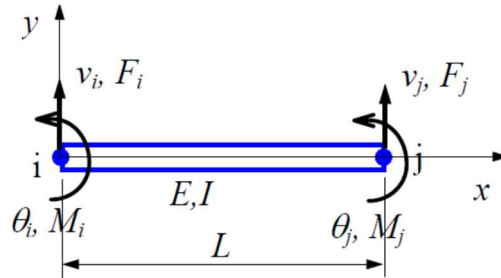


IV. Élément poutre

IV.1. Élément poutre en flexion simple (plane)



L : Longueur

I : moment d'inertie de la section transversale

E : module élastique

$v = v(x)$: la flèche de l'axe neutre

$\theta = \frac{dv}{dx}$: Rotation (déplacement angulaire) autour de l'axe z

$F=F(x)$: Force de cisaillement

$M=M(x)$: moment autour de l'axe z

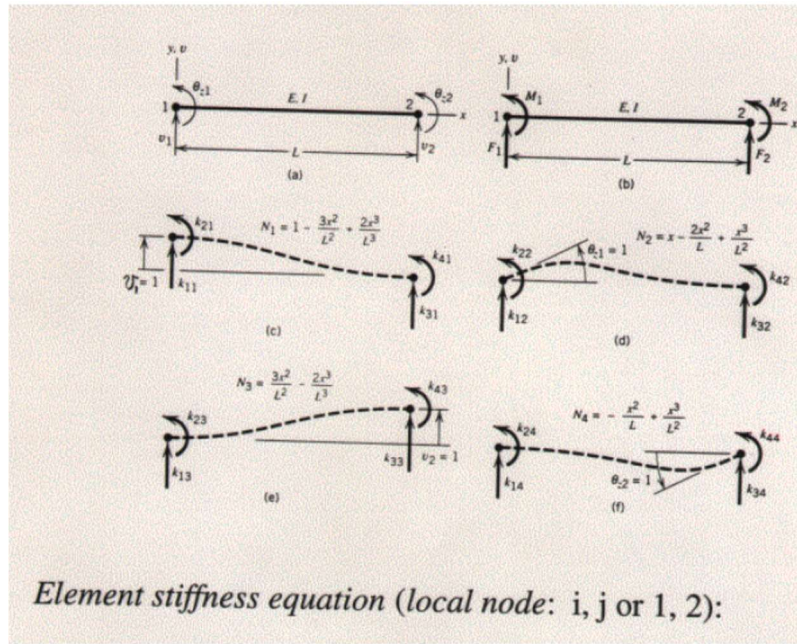
Théorie élémentaire des poutres (treillis):

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x) \quad (36)$$

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad (37)$$

VI.1.1. Méthode directe

En utilisant les résultats élémentaires de la théorie des poutres (treillis) pour calculer chaque colonne de la matrice de rigidité.



(Fig. 2.3-1. on Page 21 of Cook's Book)

Équation de rigidité de l'élément ij (nœud local: i, j où 1, 2):

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (38)$$

VI.1.1. Approche analytique

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} dx \quad (39)$$

Pour obtenir cela, nous introduisons les fonctions de forme

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3x^2 / L^2 + 2x^3 / L^3 \\ N_2(x) &= x - 2x^2 / L + x^3 / L^2 \\ N_3(x) &= 3x^2 / L^2 - 2x^3 / L^3 \\ N_4(x) &= -x^2 / L + x^3 / L^2 \end{aligned} \quad (40)$$

Alors, nous pouvons représenter la déviation comme,

$$v(x) = \mathbf{N} \mathbf{u}$$

$$= \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Qui est une fonction cubique. Remarquerez que,

$$N_1 + N_3 = 1$$

$$N_2 + N_3 L + N_4 = x$$

Ce qui implique que le mouvement du corps rigide, supposée représenté par la forme de la déformée de la poutre.

La déformé de la poutre,

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (42)$$

Où la matrice de déformation-déplacement B est donnée par,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1''(x) & N_2''(x) & N_3''(x) & N_4''(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

L'énergie de contrainte emmagasinée dans l'élément poutre est

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left(-\frac{My}{I} \right)^T \frac{1}{E} \left(-\frac{My}{I} \right) dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L M^T \frac{1}{EI} M dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^T EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{B} \mathbf{u})^T EI (\mathbf{B} \mathbf{u}) dx \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left(\int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx \right) \mathbf{u} \end{aligned}$$

Nous concluons que la matrice de rigidité de pour l'élément de poutre simple est :

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx$$

En appliquant ce résultat dans l'équation (43) et en effectuant l'intégration, on obtient la même matrice de rigidité que celle obtenue en (38).

En combinant la raideur axiale (élément de barre), on obtient la matrice de rigidité générale d'un élément de poutre 2-D,

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$