

Chapitre 3. Éléments finis de barre et de poutre

III.1 Analyse statique linéaire

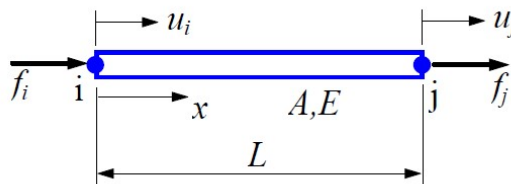
La plupart des problèmes d'analyse structurelle peuvent être traités comme des problèmes statiques linéaires, basés sur les hypothèses suivantes :

1. De petites déformations
2. Matériaux élastiques (pas de plasticité ou de rupture)
3. Charges statiques (la charge est appliquée à la structure de façon lente ou régulière)

L'analyse linéaire peut fournir une bonne approximation pour de nombreuses analyses. C'est aussi la base de l'analyse non linéaire dans la plupart des cas.

III.2. Élément barre

Considérons une barre prismatique uniforme:



L : Longueur de la barre

A : Section de la barre

E : Module de Young

$u = u(x)$: Déplacement

$\varepsilon = \varepsilon(x)$: Déformation

$\sigma = \sigma(x)$: Contrainte

Relation déformation- déplacement :

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Relation contrainte- déformation:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2)$$

II.3. Matrice de rigidité (Méthode directe)

En supposant que le déplacement u varie linéairement selon l'axe de la barre (direction longitudinale), c'est-à-dire :

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j \quad (3)$$

$$u(0) = u_i \text{ et } u(L) = u_j$$

On a :

$$\varepsilon = \frac{u_j - u_i}{L} = \frac{\Delta}{L} = \frac{\Delta u}{L} \quad \Delta : \text{Allongement} \quad (4)$$

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta}{L} = E \frac{\Delta u}{L} \quad (5)$$

Nous avons aussi

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad F: \text{force dans la barre} \quad (6)$$

Ainsi, (5) et (6) conduisent à :

$$F = \frac{E \cdot A}{L} \Delta u = k \cdot \Delta u \quad (7)$$

Où $k = \frac{E \cdot A}{L}$ est la rigidité de la barre.

La barre agit comme un ressort dans ce cas ; nous concluons que la matrice de rigidité des éléments est

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Or,

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

En considérant l'équilibre des forces aux deux nœuds, l'équation d'équilibre des éléments s'écrit:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Degrés de liberté (DL)

Nombre de composantes du vecteur de déplacement à un nœud. Pour l'élément bar 1-D: un DL à chaque nœud.

II.4. Matrice de rigidité (Méthode analytique)

Nous obtenons la même matrice de rigidité de la barre en utilisant l'approche analytique, qui peut être appliquée à beaucoup d'autres cas plus complexes.

Nous définissons deux fonctions de forme linéaire comme suit

$$N_i(\xi) = 1 - \xi, \quad N_j(\xi) = \xi \quad (10)$$

Où

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (11)$$

$$\text{D'où : } d\xi = \frac{dx}{L} \Leftrightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} = \text{cte}$$

De l'équation (3) nous écrivons le déplacement comme suit :

$$u(x) = u(\xi) = N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j$$

Or

$$u = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u} \quad (12)$$

La déformation est obtenue par l'équation (1) et (12)

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \left[\frac{d}{dx} \mathbf{N} \right] \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (13)$$

Où B est l'élément de la matrice de déformation- déplacement, avec :

$$\mathbf{B} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} N_i(\xi) & N_j(\xi) \end{bmatrix} = \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} N_i(\xi) & N_j(\xi) \end{bmatrix} \bullet \frac{d\xi}{dx}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{L}$$

c-à-d:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \quad (14)$$

La contrainte s'écrit :

$$\sigma = E\varepsilon = E\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (15)$$

Considérons l'énergie de déformation emmagasinée dans la barre

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \mathbf{u}) dV & \text{Avec : } dV = A \cdot dx \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left[\int_V (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{16}$$

D'où l'équation (13) et (15) ont été utilisés.

Le travail effectué par les deux forces nodales est :

$$W = \frac{1}{2} f_i u_i + \frac{1}{2} f_j u_j = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f} \tag{17}$$

Dans le cas de la conservation du système :

$$U = W \tag{18}$$

D'où :

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left[\int_V (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f}$$

On peut conclure :

$$\left[\int_V (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

Or

$$\mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{19}$$

Où :

$$\mathbf{k} = \int_V (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV \tag{20}$$

Représente la matrice de rigidité de l'élément.

L'expression (20) est un résultat général qui peut être utilisé pour la construction de d'autres types d'éléments. Cette expression peut (également) être dérivée en utilisant d'autres approches plus rigoureuses, telles que le principe de l'énergie potentielle minimum, ou la méthode de *Galerkin*.

Maintenant, nous évaluons (20) pour l'élément barre en utilisant (14)

$$\mathbf{k} = \int_0^L \left\{ \begin{matrix} -1/L \\ 1/L \end{matrix} \right\} E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} A dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ce le même résultat que celui que nous avons obtenu en utilisant la méthode directe.

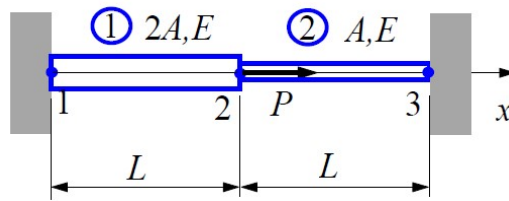
Notons que des équations (16) et (20), l'énergie de déformation dans l'élément peut être écrite comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} \quad (20)$$

Exemple 1 :

Trouvez les charges (forces et réactions) du système de l'ensemble des deux barres chargées de force P et trouvez les *contraintes* dans chaque élément barre, comme indiqué sur la figure.

Solution: Utiliser deux barres 1-D.



Solution :

Element (1):

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix}$$

Element (2):

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 & u_3 \end{matrix}$$

L'équation globale:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Les conditions de limite et de charge (C.L) :

$$u_1 = u_3 = 0$$

$$F_2 = P$$

D'où :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Donc :

$$\frac{EA}{L}[3]\{u_2\} = \{P\}$$

Où:

$$u_2 = \frac{PL}{3EA}$$

Et

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{3EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Contrainte dans le premier (1^{er}) élément :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E\varepsilon_1 = E\mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 = E\begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ &= E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} \left(\frac{PL}{3EA} - 0 \right) = \frac{P}{3A} \end{aligned}$$

Contrainte dans le second (2^d) élément :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= E\varepsilon_2 = E\mathbf{B}_2\mathbf{u}_2 = E\begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= E \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{E}{L} \left(0 - \frac{PL}{3EA} \right) = -\frac{P}{3A} \end{aligned}$$

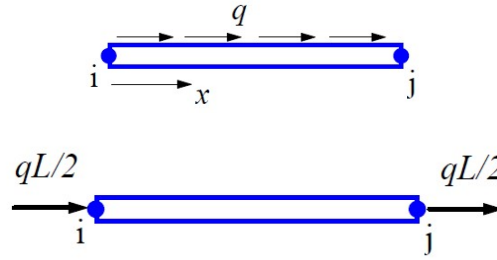
Ce qui nous indique la barre 2 est en compression.

Vérifiez les résultats!

Remarques:

- Dans ce cas, les contraintes calculées dans les éléments 1 et 2 sont exactes dans la théorie linéaire pour les structures de barres 1-D. Il ne sera pas utile de diviser encore l'élément 1 ou 2 en éléments finis plus petits.
- Pour les barres coniques, les valeurs moyennes des sections doivent être utilisées pour les éléments.
- Il nous faut d'abord trouver les déplacements pour trouver les contraintes, puisque nous utilisons le FEM à déplacement.

II.5. Charge répartie



La charge axiale est uniformément répartie (distribuée) q (N / mm, N / m, lb / in) peut être convertie en deux forces nodales équivalentes de grandeur $qL / 2$. Nous vérifions ceci en considérant le travail effectué par la charge q ,

$$\begin{aligned}
 W_q &= \int_0^L \frac{1}{2} u q dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u(\xi) q (L d\xi) = \frac{qL}{2} \int_0^1 u(\xi) d\xi \\
 &= \frac{qL}{2} \int_0^1 \begin{bmatrix} N_i(\xi) & N_j(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} d\xi \\
 &= \frac{qL}{2} \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} & \frac{qL}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$W_q = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_q \quad (22)$$

Avec :

$$\mathbf{f}_q = \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}$$

Ainsi, à partir du concept $U = W$ pour l'élément, nous avons

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_q \quad (23)$$

Ce qui donne

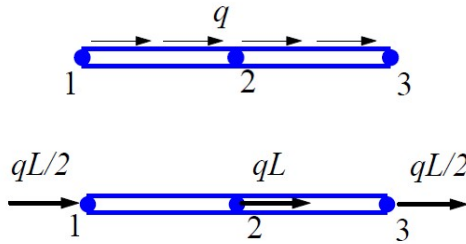
$$(24)$$

$$\mathbf{ku} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_q$$

Le nouveau vecteur de force nodale est

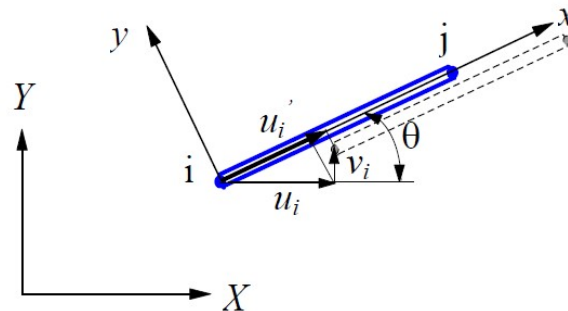
$$\mathbf{f} + \mathbf{f}_q = \begin{Bmatrix} f_i + qL/2 \\ f_j + qL/2 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Dans un assemblage de barres :



II.6. Éléments barre dans l'espace 2-D et 3-D

II.6.1 Cas (2-D)



Repaire local	Repaire Global
x, y	X, Y
u_i', v_i'	u_i, v_i
1DGL	2DGL

Remarque: Le déplacement latéral v_i' ne contribue pas à l'étirement de la barre, dans la théorie linéaire.

II.6.1.a Transformation

$$u'_i = u_i \cos \theta + v_i \sin \theta = \begin{bmatrix} c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$v'_i = -u_i \sin \theta + v_i \cos \theta = \begin{bmatrix} -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

Où

$$c = \cos(\theta), \quad s = \sin(\theta)$$

Forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Or

$$u'_i = T' \cdot u_i$$

Avec

$$T' = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad \text{La matrice } T' \text{ est orthogonale, c'est-à-dire : } T'^{-1} = T'^t \quad (27)$$

La matrice A est orthogonal, c'est-à-dire : $(A^t = A^{-1})$

Pour les deux nœuds de l'élément bar, nous avons :

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Or

$$u' = T u, \text{ avec : } T = \begin{bmatrix} T' & 0 \\ 0 & T' \end{bmatrix} \quad (29)$$

Les forces nodales sont transformées de la même manière,

$$F' = T F$$

II.6.1.b Matrice de rigidité dans l'espace 2-D

Dans le système de coordonnées locales, nous avons

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_i \\ f'_j \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Où :

$$\frac{E A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_i \\ 0 \\ f'_j \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En utilisant les transformations données des équations (29) et (30), on obtient

$$k' u' = F'$$

En multipliant les deux côtés par T^T avec $T^T T = I$, on obtient

$$k' T u = T F \quad (31)$$

Ainsi, la matrice de rigidité d'élément k dans le système de coordonnées globales est

$$k = T^T k' T \quad (32)$$

Qui est une matrice symétrique 4×4 .

Forme explicite :

$$k = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} c^2 & c \cdot s & -c^2 & -c \cdot s \\ c \cdot s & s^2 & -c \cdot s & -s^2 \\ -c^2 & -c \cdot s & c^2 & c \cdot s \\ -c \cdot s & -s^2 & c \cdot s & s^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Calcul des cosinus directionnels c et s :

$$c = \cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L}, \quad s = \sin \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L} \quad (34)$$

La matrice de rigidité de structure est assemblée en utilisant les matrices de rigidité d'élément de la manière habituelle comme dans le cas 1-D.

Élément de contrainte

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot B \begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Donc :

$$\sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Exemple 2.3

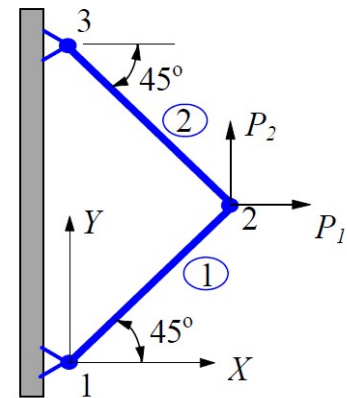
Un treilli simple est constitué de deux barres identiques (avec E, A et L), chargé comme indiqué sur la figure.

Trouver :

- 1) déplacement du noeud 2;
- 2) les contraintes dans chaque barre.

Solution :

Cette structure simple est utilisée ici pour montrer le processus d'assemblage et de solution



Ces deux matrices ne peuvent pas être assemblées ensemble, car elles sont dans des systèmes de coordonnées différents. Nous devons les convertir au système de coordonnées globales OXY.

Elément 1:

$$\theta = 45^\circ$$

$$c = s = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En utilisant la formule (32) ou (33), on obtient la matrice de rigidité dans le système global

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{T}_1^T \mathbf{k}'_1 \mathbf{T}_1 = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elément 2:

$$\theta = 135^\circ$$

$$c = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad s = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}'_2 \mathbf{T}_2 = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assemblage de la structure (FE équation) :

$$\begin{array}{cccccc}
 u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\
 \frac{E \cdot A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ v_2 = ? \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} = ? \\ F_{1y} = ? \\ F_{2x} = P_1 \\ F_{2y} = P_2 \\ F_{3x} = ? \\ v_{3y} = ? \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Conditions aux limites et de charges (contraintes) (CL):

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0, \quad F_{2x} = P_1, \quad F_{2y} = P_2$$

L'équation FE condensée,

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

En résolvant ceci, on obtient le déplacement du noeud

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \frac{E \sqrt{2}}{L} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A} (P_1 + P_2)$$

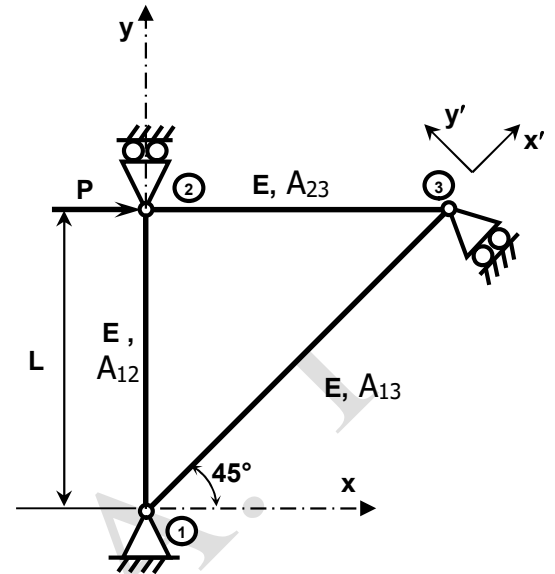
$$\sigma_2 = \frac{E \sqrt{2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A} (P_1 - P_2)$$

Exercice

Considérons un treillis composé de trois barres articulées (avec E et L) est chargé comme indiqué sur la figure.

Déterminer les déplacements et les forces de réaction.

1. Etablir la matrice de rigidité de chaque élément.
2. Etablir la matrice de rigidité [K] du treillis.
3. Déterminer les conditions aux limites
4. Donner le système qui permettra de calculer les déplacements.
5. Etablir l'expression des déplacements des noeuds.
6. Etablir l'expression des réactions aux liaisons.
7. Etablir l'expression des contraintes dans les trois barres.



Avec: $P=1000 \text{ kN}$, $L=1 \text{ m}$, $E=210 \text{ GPa}$

$A_{12}=6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_{23}=6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_{13}=6\sqrt{2} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Element 1:

$\theta = 90^\circ$, $c = 0$, $s = 1$

$$\mathbf{k}_1 = \frac{(210 \times 10^9)(6.0 \times 10^{-4})}{1} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\text{N/m})$$

Element 2:

$\theta = 0^\circ$, $c = 1$, $s = 0$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{(210 \times 10^9)(6.0 \times 10^{-4})}{1} \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\text{N/m})$$

Element 3:

$$\theta = 45^\circ, \quad c = s = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{(210 \times 10^9)(6\sqrt{2} \times 10^{-4})}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (\text{N / m})$$

L'équation globale

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1.5 & 0.5 \\ \text{Sym.} & & & & & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{bmatrix}$$

Charges et condition aux limites (CL) :

$$u_1 = v_1 = v_2 = 0 \quad \text{avec} \quad v'_3 = 0, \quad u'_3 = ?$$

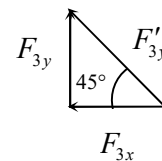
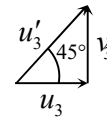
On a :

$$\tan(45) = \frac{v'_3}{u'_3} = 1 \Leftrightarrow v'_3 = u'_3$$

$$F_{2x} = P, \quad F'_{3y} = ?, \quad F'_{3x} = 0.$$

D'où

$$\tan(45) = \frac{F_{3y}}{-F_{3x}} \Leftrightarrow F_{3y} = -F_{3x}$$



Donc :

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ F_{3X} \\ -F_{3X} \end{bmatrix}$$

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

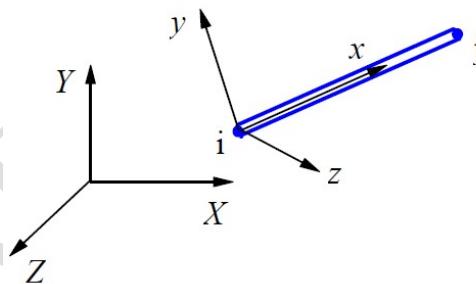
$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2520 \times 10^5} \begin{Bmatrix} 3P \\ P \end{Bmatrix} = \frac{10^6}{252 \times 10^6} \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3/252 \\ 1/252 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01191 \\ 0.003968 \end{Bmatrix} (m)$$

$$v_3 = u_3 = 1/252 (m)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3/252 \\ 1/252 \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} -1/252 \\ -1/252 \\ 0 \\ -1/252 \\ 1/252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -500 \\ -500 \\ 0 \\ -500 \\ 500 \end{bmatrix} (KN)$$

II.6.2 Cas (3-D)



Repaire local	Repaire Global
x, y, z	X, Y, Z
u'_i, v'_i, w'_i	u_i, v_i, w_i
1DGL	3DGL

Les matrices de rigidité des éléments sont calculées dans les systèmes de coordonnées locales puis transférées dans le système de coordonnées globales (X, Y, Z) où elles sont assemblées.

Les progiciels FEA effectueront cette transformation automatiquement.

Les progiciels : Ensemble de logiciels munis d'une documentation, conçus pour répondre à des besoins spécifiques et permettre une utilisation autonome.

Données d'entrée pour les éléments de barre:

- (X, Y, Z) pour chaque noeud
- E et A pour chaque élément
- E and A for each element

M. SETTET. A. T