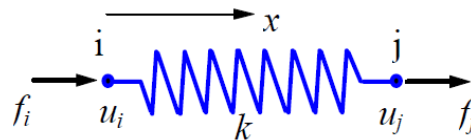


Un élément de ressort



Deux noeuds: i, j

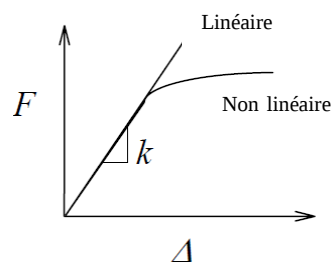
Déplacements nodaux: u_i, u_j (in, m, mm)

Forces nodales: f_i, f_j (lb, Newton)

Constante du ressort (rigidité): k (lb / in, N / m, N / mm)

Relation entre la force et le déplacement du ressort:

$$F = k\Delta \quad \text{with } \Delta = u_j - u_i$$



$k = F / \Delta$ (> 0) : est la force nécessaire pour produire un allongement unitaire.

Nous considérons que les problèmes sont linéaires dans l'introduction ce cours.

À l'équilibre des forces appliquées aux ressort. Au noeud i nous avons:

$$f_i = -F = -k(u_j - u_i) = ku_i - ku_j$$

Au noeud j :

$$f_j = F = k(u_j - u_i) = -ku_i + ku_j$$

Sous la forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$[k] \{u\} = \{f\}$$

Où

k : matrice de rigidité (élément)

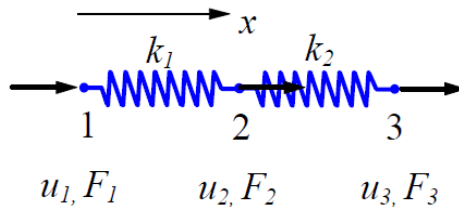
u : (élément nodal) vecteur de déplacement

f : (élément nodal) vecteur de force

Notez que k est **symétrique**. On doit vérifier si k est singulière ou non? Autrement dit, pouvons-nous résoudre l'équation? Si non, pourquoi?

Voir le rappel sur les matrices

Système de ressort



Pour l'élément 1 :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix}$$

Pour l'élément 2 :

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^2 \\ f_3^2 \end{Bmatrix}$$

Où f_i^m est la force (interne) agissant sur le noeud local i de l'élément m ($i = 1, 2$).

Considérons l'équilibre des forces au noeud 1 pour, qu'on puisse assembler la matrice de rigidité pour l'ensemble du système:

$$F_1 = f_1^1$$

au noeud 2 :

$$F_2 = f_2^1 + f_2^2$$

au noeud 3 :

$$F_3 = f_3^2$$

Donc :

$$F_1 = k_1 u_1 - k_1 u_2$$

$$F_2 = -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3$$

$$F_3 = -k_2 u_2 + k_2 u_3$$

Forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

D'où

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}$$

$\mathbf{K}$ est la matrice de rigidité (*matrice de structure*) du système de ressorts.

Il y'a une autre façon d'assembler la matrice de rigidité:

"Élargissement" des matrices de rigidité pour les éléments 1 et 2, nous avons :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \end{Bmatrix}$$

En additionnant les deux équations matricielles (par superposition), nous avons :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ P \end{Bmatrix}$$

C'est la même équation que celle obtenue en utilisant le concept d'équilibre de force.

Conditions limites :

Considérons, $u_1 = 0$ et $F_2 = F_3 = P$

Nous avons

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ P \end{Bmatrix}$$

Est réduit à :

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix}$$

et

$$F_1 = -k_1 u_2$$

Les inconnus sont les déplacements u_2 et u_1 et la force de réaction :

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \text{ et } F_1$$

En résolvant les équations, on obtient les déplacements

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P / k_1 \\ 2P / k_1 + P / k_2 \end{Bmatrix}$$

Et la force de réaction

$$F_1 = -2P$$

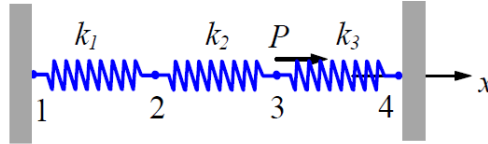
Vérification des résultats

- Déformée de la forme structure
- Équilibre des forces externes
- Ordre des grandeurs des nombres

Notes sur les éléments du ressort

- Convient pour l'analyse de rigidité
- Ne convient pas à l'analyse de contraintes du ressort lui-même
- Peut avoir des éléments à ressort avec une rigidité dans la direction latérale, des éléments de ressort pour la torsion, etc.

Exemple 1 :



Pour le système de ressorts montré ci-dessus, on donne :

$$k_1 = 100 \text{ N/mm}, \quad k_2 = 200 \text{ N/mm}, \quad k_3 = 100 \text{ N/mm}$$

$$P = 500 \text{ N}, \quad u_1 = u_4 = 0$$

Trouver:

- 1) la matrice de rigidité globale
- 2) déplacements des noeuds 2 et 3
- 3) les forces de réaction aux noeuds 1 et 4
- 4) les forces dans le ressort 2

Solution:

1) Les matrices de rigidité des éléments sont :

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \text{ (N/mm)} \quad (1)$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \text{ (N/mm)} \quad (2)$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \text{ (N/mm)} \quad (3)$$

En appliquant le concept de superposition, nous obtenons la matrice de rigidité globale pour le système à ressorts comme suit :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200+100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

Ou :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

Qui est symétrique et carrée.

L'équation d'équilibre (EF) pour l'ensemble du système est

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

- 2) En appliquant les conditions aux limites (CL), ($u_1=u_4=0$) dans l'équation (4), ou en supprimant la 1ère et la 4ème rangées et les colonnes, nous avons :

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

En résolvant l'équation (5), on obtient

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P/250 \\ 3P/500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ (mm)}$$

- 3) À partir équations précédentes, on obtient les forces de réaction

$$F_1 = -100u_2 = -200 \text{ (N)}$$

$$F_4 = -100u_3 = -300 \text{ (N)}$$

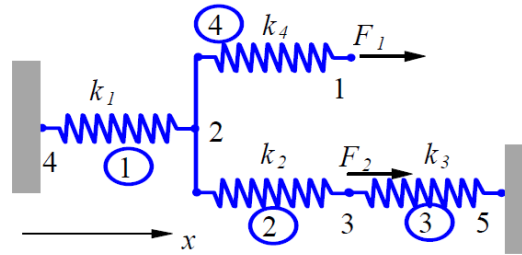
- 4) L'équation des EF pour l'élément (2) ou (le ressort (2)):

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

Ici $i = 2, j = 3$ pour l'élément (2). Donc, on peut calculer la force du ressort:

$$\begin{aligned} F = f_j = -f_i &= \begin{bmatrix} -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ &= 200 \text{ (N)} \end{aligned}$$

Veillez vérifiez les résultats!

Exemple 2 :

Pour le système de ressorts trouver la matrice de rigidité globale.

Solution:

Nous pouvons écrire les matrices de rigidité des éléments comme suit

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} u_4 & u_2 \\ k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} u_3 & u_5 \\ k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} u_2 & u_1 \\ k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

En appliquant la méthode de superposition, nous obtenons la matrice de rigidité globale comme suit

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

La matrice est symétrique, carrée, mais singulière.