

Introduction

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes statiques et dynamiques nécessite la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire. Les déformations élastiques sont des déformations réversibles, où le matériau revient partiellement ou totalement son état initial. Son étude relève du domaine de la mécanique des milieux continus (MMC) et de la mécanique des solides. Dans ce chapitre une brève analyse de ces équations de base présente les relations entre contrainte et déformation dans le cas général. Du cas général dérive le cas particulier de l'élasticité plane (état plan de déformation, état plan de contrainte, problèmes axisymétriques)

I.1 Elasticité linéaire isotrope ou élasticité classique

Nous nous plaçons ici dans le cadre des petits déplacements et des petites vitesses [5], de sorte que l'on puisse linéariser les équations.

Les déformations d'un objet sont mesurées à partir d'une position initiale, qui est généralement la position de repos de l'objet, situation dans laquelle aucune force n'est appliquée à ce dernier [1].

Nous définissons alors le champ vectoriel **déplacement**, généralement noté $\mathbf{u}$, qui est simplement pour chaque point le vecteur reliant sa position au repos à sa position actuelle dans la configuration déformée [2-3].

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I.1})$$

Nous avons :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{I.2})$$

Vitesse et accélération sont liées par :

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad , \quad a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (\text{I.3})$$

La loi de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \{v\}) = 0 \quad (\text{I.4})$$

Celle de la conservation de la quantité de mouvement, en présence des forces extérieures s'écrit :

$$\rho \{a\} = \text{div} [\sigma] + \rho \{f\} \quad (\text{I.5})$$

La théorie de l'élasticité linéaire se situe :

- d'une part dans le cadre de la description des solides lentement déformables, (cet dernière est souvent trop générale et peut être simplifiée), et,
- d'autre part nous supposons que la **loi de comportement élastique** reliant le tenseur des contraintes à celui des déformations est **linéaire**. Lorsque le solide élastique a un comportement **isotrope**, (c'est-à-dire qu'il a le même comportement dans toutes les directions car il ne privilégie aucune direction de l'espace, c'est très souvent le cas, sauf pour des matériaux fibreux à direction privilégiée, comme le bois ou les muscles ...etc.), nous obtenons la **loi de comportement de Hooke [1-2]**:

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) \quad (\text{I.6})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij}=1$ si $i=j$ et $\delta_{ij}=0$ si $i \neq j$).

E et ν dans la pratique, sont le module d'Young et coefficient de Poisson qui sont connus expérimentalement pour un matériau homogène donné et nous déduisons les coefficients de Lamé [3-5]:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{I.7})$$

I.1.1 Equation de Navier-Stokes

Les équations précédentes décrivent la théorie de l'élasticité. L'**équation de Navier** s'écrit sous les formes suivantes [3] :

$$(\mu + \lambda) \overline{\text{grad}}(\text{div} \{u\}) + \mu \text{div} (\overline{\text{grad}} \{u\}) + \rho \{f\} = \rho \{a\} \quad (\text{I.8})$$

Ou :

$$(\mu + \lambda) \nabla(\text{div} \{u\}) + \mu \Delta \{u\} + \rho \{f\} = \rho \{a\}$$

Ou encore :

$$(\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right) + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned}
 (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + \rho f_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\
 (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + \rho f_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\
 (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + \rho f_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{I.9}$$

I.1.2 Problèmes stationnaires

Le terme stationnaire n'a pas la même signification en mécanique des fluides et en mécanique des solides. Dans le premier cas, le mot stationnaire ne signifie pas absence de mouvement mais indépendance de la vitesse par rapport au temps. Dans le second cas l'inconnue cinématique est le déplacement et le mot stationnaire signifie équilibre statique: on est alors en **élastostatique** (ce qui est une vue de l'esprit puisqu'un déplacement s'effectue dans un laps de temps ou en mouvement suffisamment lent pour que chaque configuration puisse être considérée comme en équilibre); on parle alors d'élasticité quasi-statique [4]. De toutes les façons, le terme d'accélération disparaît et le système (I.5) qui traduit la conservation de la quantité de mouvement est réduit à:

$$\operatorname{div} \sigma + \rho f = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0 \tag{I.10}$$

I.1.3 Elasticité plane

Il s'agit de situations particulières où le domaine d'études est invariant par translation le long de e_3 et le champ de déplacement recherché est de la forme $u(y) = u(y_1, y_2)e_3$.

Dans ce cas les seules composantes non nulles de ε et σ sont :

$$2 \varepsilon_{\alpha 3} = u_{,\alpha} \quad , \quad \sigma_{\alpha 3} = 2 \mu \varepsilon_{\alpha 3} \quad (\alpha=1,2) \tag{I.11}$$

D'où :

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad , \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

De la **loi de comportement de Hooke** on a [1-2]:

$$\sigma_{13} = 2 \mu \varepsilon_{13} \quad , \quad \sigma_{23} = 2 \mu \varepsilon_{23}$$

Nous obtenons l'**équation de Navier** simplifiée [3-4] :

$$\mu \Delta \{u\} + \rho \{f\} = 0$$

D'où :

$$\Delta \{u\} + b = 0 \quad y \in \Omega \quad (\text{I.12})$$

C'est l'équation de Poisson appliquée à un domaine borné tridimensionnel Ω , d'inconnue u nommée potentiel.

Pour $b=0$, nous avons l'équation de Laplace :

$$\Delta \{u\} = 0 \quad (\text{I.13})$$

Dans ce qui va suivre nous allons appliquer la méthode des éléments de finis à des problèmes régis par l'équation de Poisson ou de Laplace.

I.2 La méthodes des éléments finis

I.2.1 Différentes approches numériques de la mécanique continue

Nous pouvons classifier les méthodes numériques de mécanique continue en trois approches : différence finie (FDM), élément fini (FEM) et élément de frontière (BEM) [16].

Nous allons en donner une courte description de chaque approche ci-dessous :

La figure I.1 nous permet de voir la différence entre les approches numériques.

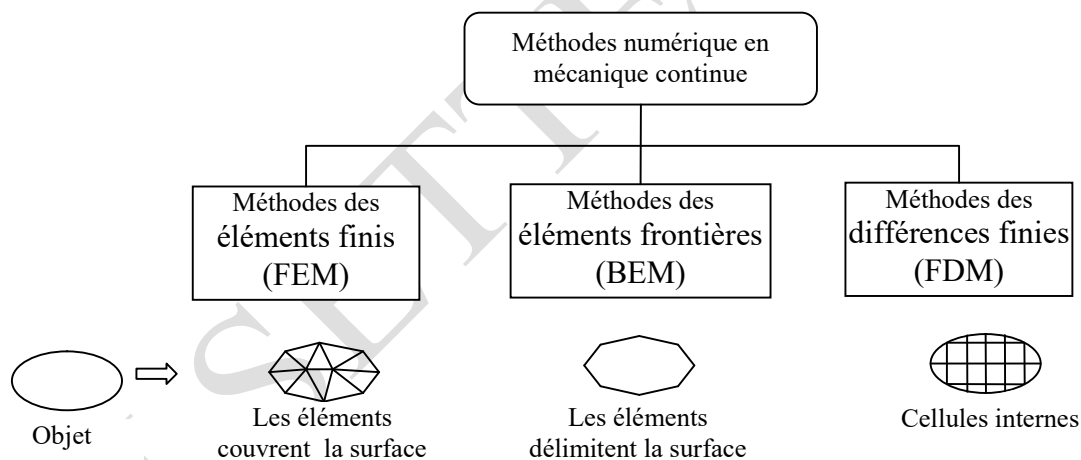


Figure I.1 Classification des méthodes numériques en mécanique continue

I.2.2.a L'approche par la méthode des différences finies (FDM)

Dans cette méthode, les équations partielles sont écrites en termes d'équations différentielles. Par conséquent, pour un domaine bidimensionnel, une grille de cellules est placée à l'intérieur du domaine. On y applique l'approximation différentielle à chaque point intérieur. Ceci nous permet d'obtenir un système d'équations algébriques linéaires qui permet d'obtenir une solution unique en satisfaisant les conditions réelles. L'approche de la méthode des différences finies est la plus simple des trois approches. Elle est relativement facile à programmer. Son principal inconvénient est un problème pratique d'application de la

méthode des différences finies, car elle n'est pas appropriée aux problèmes que posent les corps à géométries irrégulières. Il est en outre difficile de changer la taille des cellules et donc de changer rapidement de variables, telles que des problèmes de concentration d'effort. De nos jours, les méthodes des différences finies sont appréciées pour des problèmes de transfert thermique et de flux de fluide, plutôt que pour des problèmes d'analyse [4].

I.2.2.b L'approche par la méthode des éléments finis (FEM)

Dans cette approche, le domaine entier est divisé en petits éléments en nombre fini d'où l'appellation « éléments finis ». Au-dessus de chaque élément, le comportement est décrit par des équations différentielles. Tous ces petits éléments sont assemblés. En prenant en considération les conditions de continuité et d'équilibre entre les éléments voisins, ainsi que les conditions de frontières du problème réel, une solution unique du système global peut être obtenue par des équations algébriques linéaires. La FEM est très appropriée aux problèmes pratiques de technologie à géométries complexes. Pour améliorer sensiblement les calculs, nous devons augmenter le nombre composant le maillage. Pour illustrer l'approche de la FEM, les étapes sont récapitulées comme suit [7] :

- 1. Diviser le domaine en petits éléments en nombre fini. Ces éléments peuvent être triangulaires ou quadrilatéraux (pour des problèmes bidimensionnels), ou tétraédriques, ou hexaédriques, voire prismatiques (pour des problèmes tridimensionnels).
- 2. Mettre le problème en équation.
- 3. Mettre en œuvre l'implémentation numérique de la méthode des éléments finis.
- 4. Assembler le système d'équations pour une solution globale du domaine.
- 5. Appliquer les conditions aux limites.
- 6. Résoudre le système global des équations linéaires pour déterminer les déplacements à chaque point nodal.

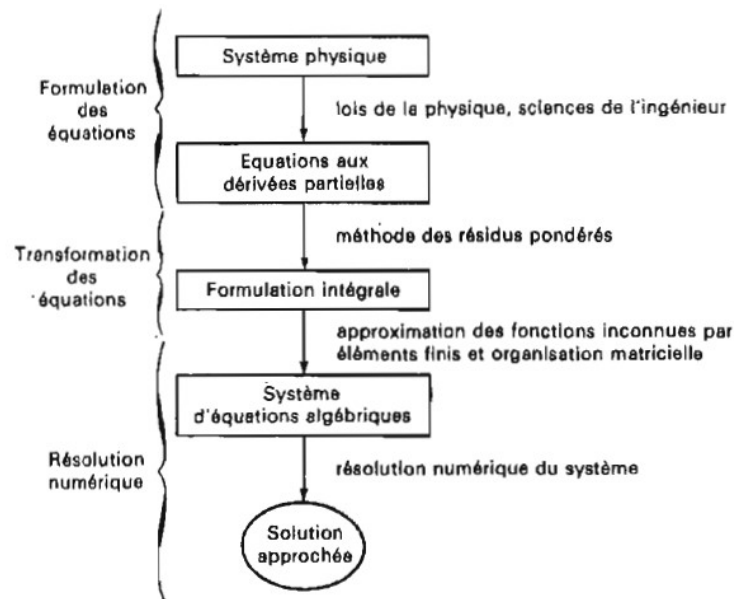


Figure I.2 Transformation des équations d'un système physique.

I.2.2.c L'approche par la méthode des éléments de frontière (BEM)

Dans cette approche, la frontière qui délimite le domaine est divisée en un nombre fini de petits segments d'où l'appellation d'éléments de frontière. Les équations induites sont transformées en identités intégrales (**BIM**). Un système d'équations algébriques linéaires émerge, ce qui nous permet d'obtenir une solution unique. La méthode peut être facilement adaptée aux problèmes géométriquement complexes [15].

Dans ce qui suit il est utile de récapituler les étapes essentielles qui forment cette approche [3]:

- 1 Diviser en petits segments la frontière qui délimite le domaine.
- 2 Formuler le problème et écrire les équations qui en découlent, en utilisant les fonctions de forme pour décrire la géométrie et les variables au-dessus de chaque élément. Ces fonctions de forme peuvent être linéaires, quadratiques ou autres, puisque les intégrations analytiques ne sont pas adéquates à l'intégration des fonctions complexes, pour une efficacité, rapidité et simplification des calculs.
- 3 Rechercher la solution fondamentale, applicable à n'importe quelle géométrie et basée sur l'application d'une charge ponctuelle à un milieu infini (appelée la solution de Kelvin). La solution fondamentale est de l'ordre de $1/r$, r est la distance physique entre le point d'application de la charge p appelé point de charge ou point source et n'importe quel autre point sur la frontière Q appelé point du champ ou point courant. L'intégration numérique est

effectuée en utilisant la technique de quadrature de gauss. Les réarrangements spécifiques sont nécessaires pour intégrer les limites singulières quand les points nodaux sont très près les uns des autres, ou le point de départ de la lecture p coïncide avec le point Q de la frontière. C'est parce que la solution fondamentale contient des limites de l'ordre $(1/r)$. En additionnant les intégrales au-dessus de chaque élément, toute l'intégrale extérieure peut être évaluée. La solution se présente sous forme matricielle. Le procédé d'intégration avec le point de départ de lecture p balaye tous les points placés sur la frontière.

- 4 Employer le théorème de réciprocité du travail ou théorème de Maxwell-Betti, qui énonce que si on considère deux états d'équilibre d'un même système (a) et (b), le travail des efforts extérieurs réels dans un champ de déplacement virtuel est égal au travail des efforts extérieurs virtuels dans le champ de déplacement réel autrement dit, le travail d'un système de forces $F_p^{(a)}$ dans le déplacement produit par le système de forces $F_p^{(b)}$ est égal au travail du système de forces $F_p^{(b)}$ dans le déplacement produit par le système de forces $F_p^{(a)}$.

Nous obtiendrons l'équation suivante [4] :

$$\sum_p F_p^{(a)} u_p^{(b)} = \sum_p F_p^{(b)} u_p^{(a)} \quad (I.14)$$

Où p est un point quelconque du domaine avec une force appliquée F . Si les forces externes sont confinées à l'extérieur de (s), alors l'équation intégrale peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_s t_i^{(a)} u_i^{(b)} ds = \int_s t_i^{(b)} u_i^{(a)} ds \quad (I.15)$$

Où $i = 1, 2, 3$ (correspond aux coordonnées cartésiennes x, y, z) et le vecteur de traction est défini par $t_i = \sigma_{ij} n_j$, avec n_j qui représente la normale d'unité à l'extérieur de la surface.

- 5 Choisir le système (a) pour définir la solution fondamentale qui est connue et le système (b) pour définir le problème réel qui est inconnu. Le résultat en est une équation intégrale de frontière reliant les déplacements et les contraintes sur la frontière.

Le point source p est d'abord placé au point 1 qui représente un ensemble d'équations reliant toutes les variables de N sur la frontière, puis le point source p est placé au point 2, rapportant un autre ensemble d'équations, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les ensembles de N équations soient formés. Le système résultant des équations linéaires est de la forme suivante [5]:

$$[A]\{u\} = [B]\{t\} \quad (I.16)$$

- 6 Appliquer les conditions limites et, en réarrangeant le système d'équations, nous aurons un rapport linéaire entre le déplacement et la contrainte (tel qu'une force appliquée a un ressort). En réarrangeant les équations linéaires telles que toutes les variables inconnues soient du côté gauche et toutes variables connues soient du côté droit [3-6]:

$$[A]\{x\} = \{f\} \quad (I.17)$$

- 7 Résoudre le système global des équations linéaires. La matrice $[A]$ est antisymétrique et tous ses coefficients sont différents de 0.

- 8 D'autres informations additionnelles à déterminer, peuvent être incluses dans le calcul, tel que des valeurs de déplacements et de tractions (ou efforts) aux points internes.

I.3 Classification des systèmes physiques.

Dans ce chapitre nous commençons par proposer une classification des systèmes physiques discrets et des systèmes continus. Puis nous introduisons la méthode des résidus pondérés qui, en utilisant des fonctions de pondération, permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale. L'intégration par parties fournit des formulations intégrales modifiées qui sont plus faciles à utiliser.

En mécanique des solides, la notion de fonctionnelle est souvent utilisée pour construire directement une formulation intégrale en utilisant le principe de stationnarité de la fonctionnelle d'énergie. Nous montrons que cette dernière méthode est un cas particulier de la méthode des résidus pondérés. La technique des multiplicateurs de Lagrange fournit des fonctionnelles modifiées, de type mixte ou complémentaire qui peuvent être utiles pour certains problèmes. Soulignons que la notion de fonctionnelle n'est pas nécessaire si l'on connaît les équations aux dérivées partielles puisque la méthode des résidus pondérés conduit directement aux formulations intégrales.

La méthode des résidus pondérés fournit selon le choix des fonctions de pondération tout un ensemble de formulations intégrales :

- formulation de type **Galerkine**, ou de **Ritz** si l'on utilise la notion de fonctionnelle. Celle-ci est la plus utilisée
- formulation de type collocation par points ou par sous-domaines
- formulation de types moindres carrés
- formulation de type équations intégrales de contour.

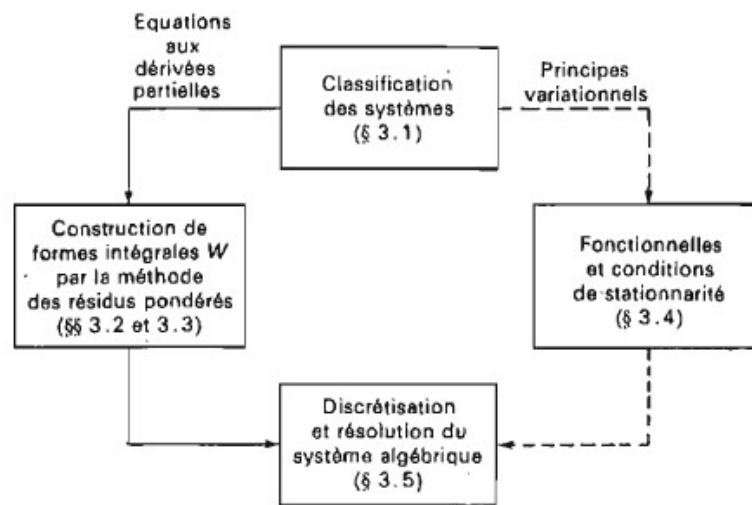


Figure I.3 Classification des systèmes.

I.3.1 Systèmes discrets et systèmes continus

Un système physique est caractérisé par un ensemble de variables qui peuvent dépendre des coordonnées d'espace $x = (x, y, z)$ et du temps t . Le système est dit stationnaire- si ses variables ne dépendent pas du temps.

Certaines variables d du système sont connues à priori : propriétés physiques, dimensions du système, sollicitations, conditions aux limites, etc. D'autres variables u sont inconnus: déplacements, vitesses, températures, contraintes, etc.

Un modèle mathématique du système permet d'écrire des relations entre u et d en utilisant des lois physiques. Ces relations constituent un système d'équations en u que nous nous proposons de résoudre, Le nombre de degrés de liberté du système est le nombre de paramètres nécessaires pour définir u à un instant t donné.

Un système est discret s'il possède un nombre de degrés de liberté fini, Un système est continu s'il possède un nombre de degrés de liberté infini.

Le comportement d'un système discret est représenté par un système d'équations algébriques, Celui d'un système continu est le plus souvent représenté par un système d'équations aux dérivées partielles ou intégral-différentielles associé à des conditions aux limites en espace et en temps, Les équations algébriques des systèmes discrets peuvent être

résolues par les méthodes numériques. Par contre les équations des systèmes continus ne peuvent en général pas être résolues directement. Il est nécessaire de discrétiser ces équations, c'est-à-dire de les remplacer par des équations algébriques. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes qui peuvent être utilisées pour faire cette discrétisation.

I.3.2 Problèmes d'équilibre, de valeurs propres et de propagation

Les problèmes qui concernent les systèmes discrets et continus peuvent être classés en 3 catégories que nous allons définir brièvement en décrivant le type d'équations correspondant à chacun d'eux.

I.3.2.a Problèmes d'équilibre ou de valeurs aux limites

Ils consistent à calculer u dans un cas stationnaire. Pour un système discret, les équations de comportement peuvent en général s'écrire sous forme matricielle :

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

où :

$[K]$ est une matrice caractérisant le système

$\{U\}$ vecteur des variables inconnues

$\{F\}$ vecteur des sollicitations connues.

I.3.3.b Problèmes de valeurs propres ou de valeurs critiques

Ils constituent une extension d'un problème d'équilibre dans laquelle nous évaluons u correspondant à des valeurs critiques de certains paramètres λ , dites valeurs propres. Les équations correspondantes s'écrivent pour un système discret :

$$[K]\{U\} = \lambda [M]\{U\}$$

Où, $[M]$ est la matrice masse,

I.3.3.c Problèmes de propagation ou de valeurs initiales

Ils consistent à évaluer $u(x, t)$ pour $t > t_0$. Dans un système non stationnaire, $u(x, t_0)$ étant connu.

- Pour un système discret:

$$[M] \frac{d^2}{dt^2} \{U\} + [C] \frac{d}{dt} \{U\} + [K] \{U\} = \{F(t)\} \text{ Pour } t > t_0$$

Où, $[C]$ est la matrice d'amortissement.

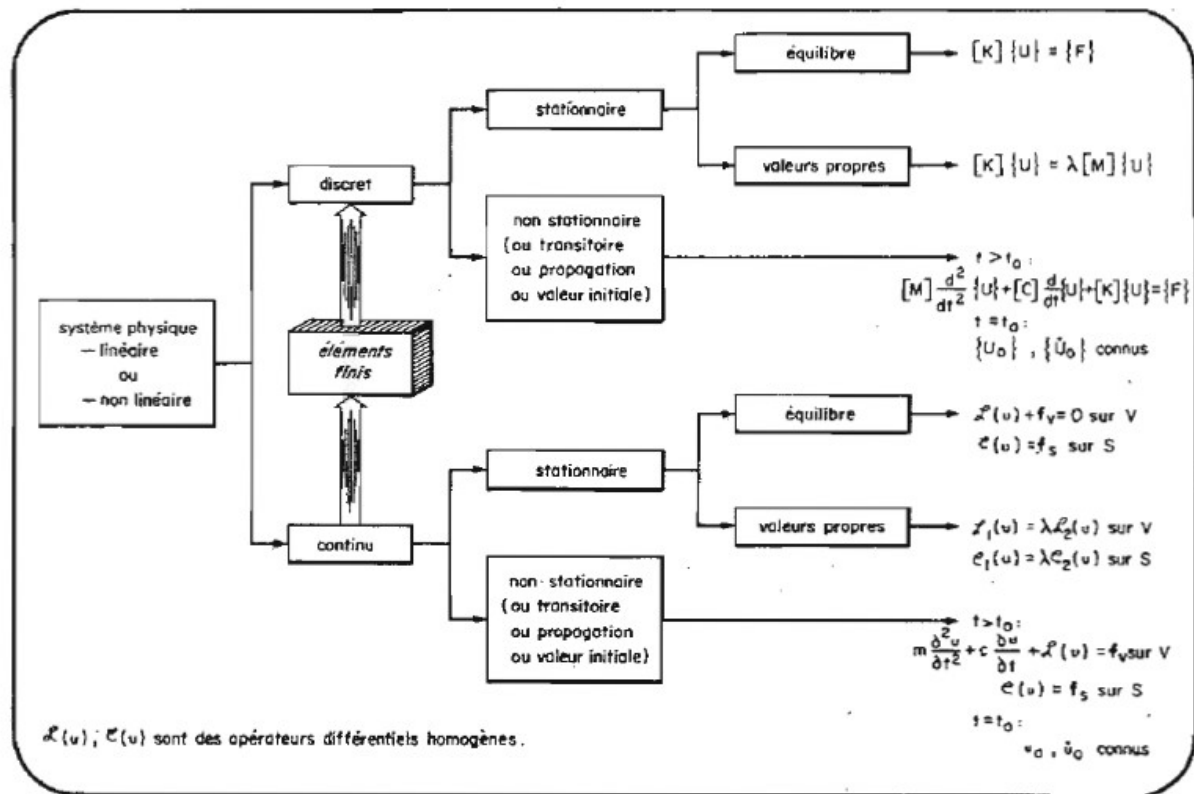


Figure I.4. Organigramme de classification des systèmes physiques

I.4 Eléments isoparamétriques et intégration numérique

Nous allons traiter des techniques d'approximation grâce auxquelles nous pouvons remplacer un système continu par un système discrétisé équivalent.

Nous commençons par décrire l'approximation nodale d'une fonction sur un domaine Δe , pour introduire ensuite la notion d'approximation nodale par sous-domaine sur la frontière. Pour cela nous présentons la technique de segmentation d'un domaine en éléments de frontières. Les concepts de transformation géométrique et d'éléments de référence simplifient la construction des fonctions d'interpolation pour des éléments de formes compliquées [21]. Chaque nouvel élément de la famille est caractérisé par un nombre toujours croissant de nœuds et donc une amélioration de la précision. La tendance est de développer de nouvelles approches de manière à réduire le nombre d'éléments nécessaires à l'obtention d'une bonne solution.

Pour qu'un petit nombre d'éléments représente une géométrie relativement complexe, analogue aux problèmes réels et non académiques, des éléments de forme simple, triangulaires ou rectangulaires, ne suffisent plus. Aussi ce chapitre est-il consacré au problème de la déformation de ces formes simples en d'autres formes plus générales.

Nous développons ensuite la technique générale de construction des fonctions d'interpolation sur un élément de référence. La transformation d'un élément de référence en élément réel est caractérisée par la matrice jacobéenne [5].

I.4.1 Définition de la géométrie des éléments

I.4.1.a Nœuds géométriques

Nous choisissons un ensemble de n points, sur le domaine Δ_e , qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points, appelés nœuds géométriques, peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation. Puis nous remplaçons le domaine Δ_e par un ensemble d'éléments E_e de formes relativement simples. Chaque élément E_e doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à cet élément, c'est-à-dire qui sont situés sur E_e et sur sa frontière [7].

I.4.1.b Règles de partition du domaine en éléments

La partition du domaine Δ_e en éléments E_e doit respecter les deux règles suivantes [8]:

- a) Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments. Les frontières entre éléments peuvent être des points, des courbes ou des surfaces :

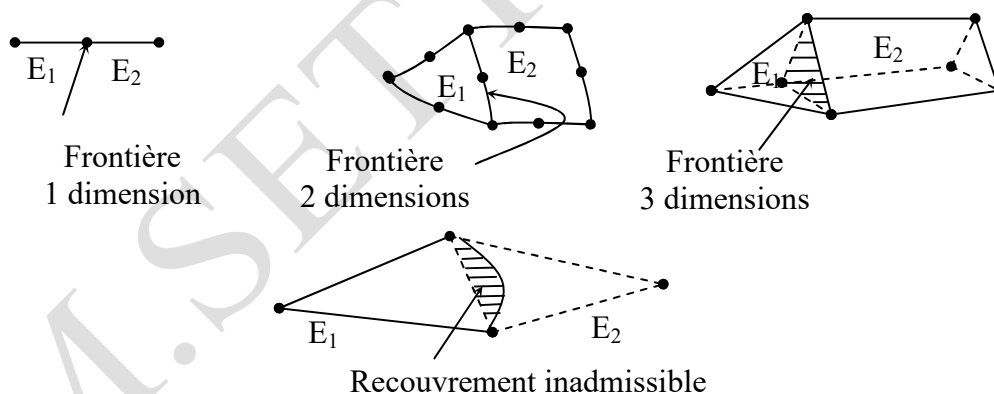


Figure I.5 : le recouvrement exclut entre les éléments

- b) L'ensemble de tous les éléments E_e doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné Δ_e . Les « trous » entre éléments sont exclus.

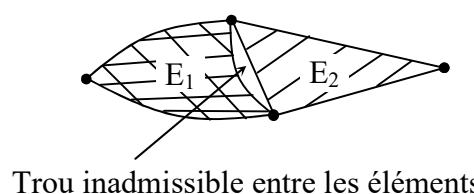


Figure I.3: Cavité exclue entre deux éléments

Lorsque la frontière du domaine Δ est constituée par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur est inévitable. Cette erreur est appelée erreur de discrétisation géométrique. Elle peut être réduite en diminuant la taille des éléments, ou en utilisant des éléments à frontières plus complexes:

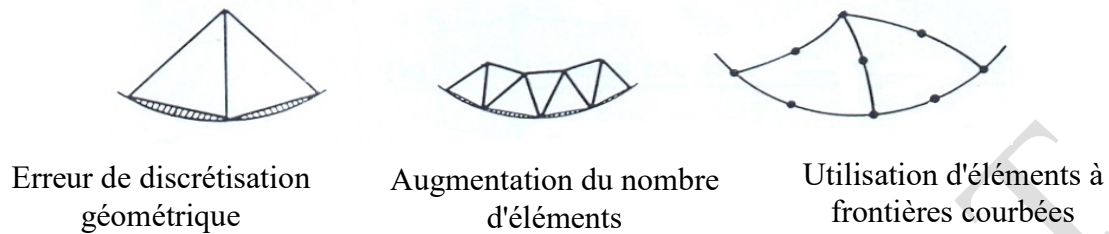


Figure I.4

Les deux règles précédentes sont respectées si les éléments sont construits de la manière suivante :

- Chaque élément est défini de manière unique à partir des coordonnées des nœuds géométriques situés sur cet élément. Le plus souvent ces nœuds géométriques sont situés sur les frontières de l'élément et sont communs à plusieurs éléments.
- La frontière d'un élément à deux ou trois dimensions est formée par un ensemble de courbes ou de surfaces. Chaque portion de frontière doit être définie de manière unique à partir des coordonnées des seuls nœuds géométriques situés sur cette portion de frontière. Ainsi les portions de frontière communes à deux éléments sont définies de manière identique pour l'un ou l'autre élément.

I.4.1.c Formes d'élément classiques

Nous présentons maintenant les formes de quelques éléments classiques correspondant à des domaines à une, deux ou trois dimensions. Chaque élément est identifié par un nom précisant sa forme ainsi que par le type de courbe ou de surface qui en forme la frontière. De plus nous donnons le nombre de nœuds géométriques nécessaires pour définir l'élément [8].

I.4.1.c-1 Eléments à une dimension

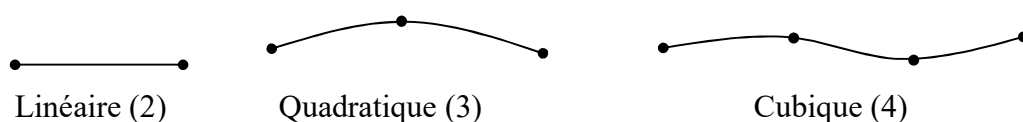


Figure I.5 Eléments à une dimension

I.4.1.c-2 Eléments à deux dimensions

Ce sont des triangles ou quadrilatères dont les côtés sont des courbes polynomiales du 1^{er}, 2^e ou 3^e degré.

• **Eléments triangulaires:**

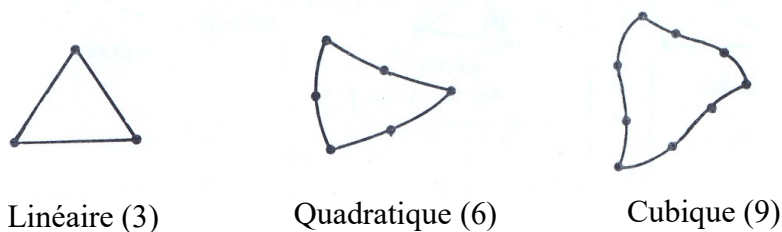


Figure I.6 Eléments triangulaires

• **Eléments quadrilatéraux :**

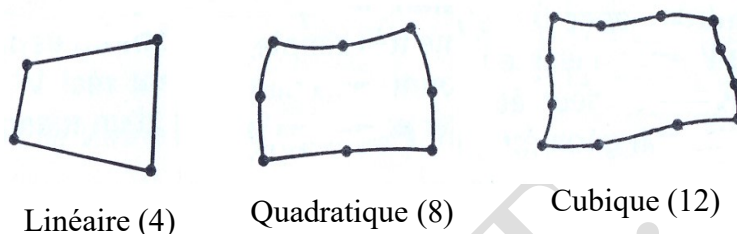


Figure I.7 Eléments quadrilatéraux

I.4.1.c-3 Eléments à trois dimensions

Ce sont des tétraèdres, hexaèdres ou prismes dont les faces sont des surfaces polynomiales du 1^{er}, 2^e ou 3^e degré.

• **Eléments tétraédriques :**

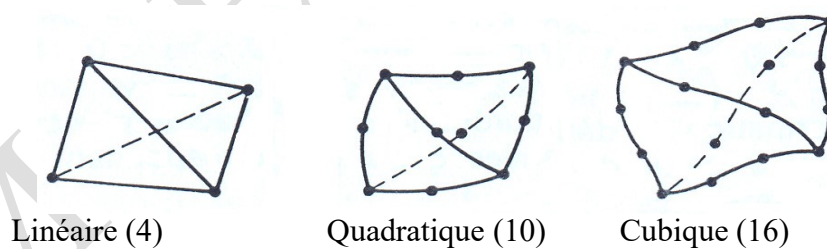


Figure I.8 Eléments tétraédriques

• **Eléments hexaédriques**

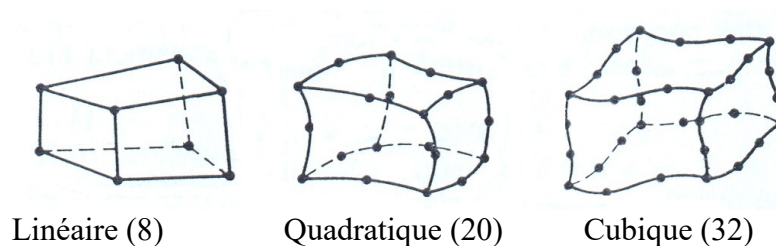


Figure I.9 Eléments hexaédriques

•Eléments prismatiques

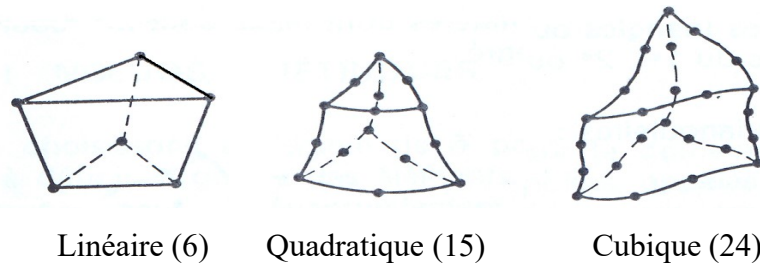


Figure I.10 Eléments prismatiques

I.4.2 Éléments de références et éléments réels

Soulignons qu'un même élément de référence Δ_e (par exemple un triangle à 3 nœuds) se transforme en éléments réels E_e de même type (triangles à 3 nœuds) par des transformations f_e différentes:

Pour simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'élément de référence. Un élément de référence Δ_e est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel E_e par une transformation géométrique Δ_e . Prenons le cas d'un triangle [8]:

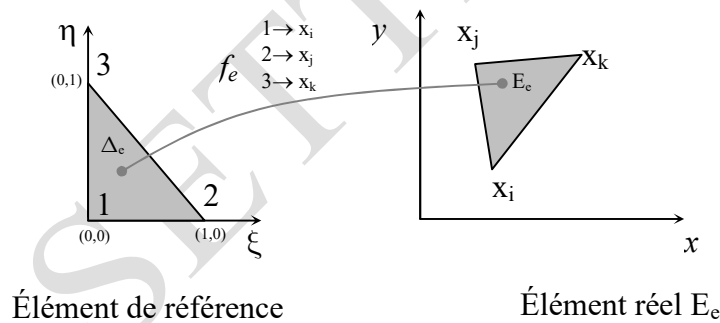


Figure I.11 Élément de référence Δ_e et élément réel E_e

Les éléments "uni", "bi" ou tridimensionnels seront transformés en éléments courbes selon le schéma présenté sur les figures I.11, I.12 et I.13.

Sur ces figures, nous montrons que les coordonnées ξ, η, ζ (ou L_1, L_2, L_3, L_4 peuvent être transformées en un nouvel ensemble de coordonnées curvilignes dans un système cartésien de coordonnées x, y et z .

Les éléments bidimensionnels peuvent être transformés, non seulement en d'autres éléments bidimensionnels courbes, mais encore en éléments tridimensionnels comme sur la figure I.12 où des éléments plats sont déformés dans l'espace à trois dimensions.

Cette méthode s'applique de manière générale, à condition qu'il existe une application bijective entre coordonnées cartésiennes et curvilignes, c'est-à-dire que les relations de transformation puissent s'écrire sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \text{ ou } f \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.18})$$

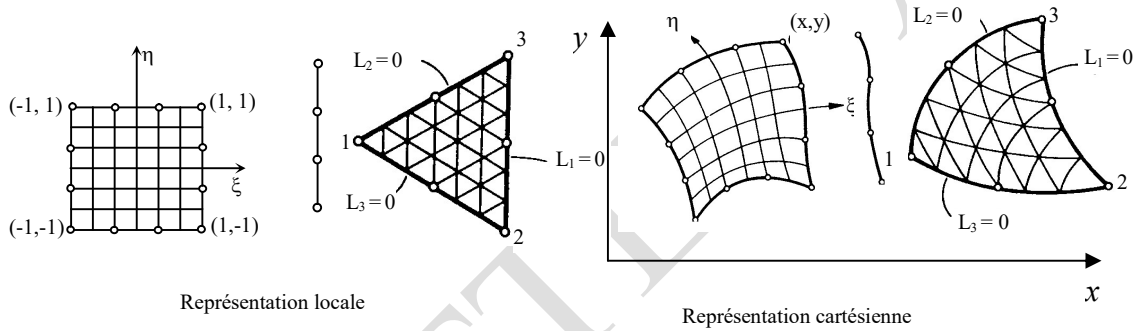


Figure I.12 Transformation bidimensionnelle de certains éléments

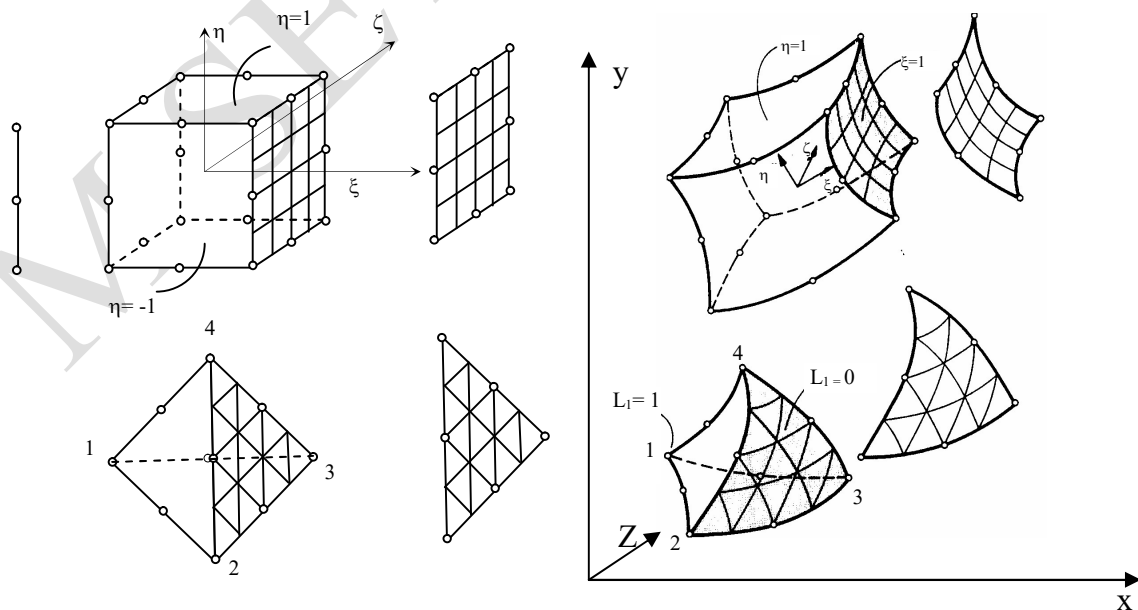


Figure I.13 Transformation tridimensionnelle de certains éléments

Une fois de telles relations entre coordonnées déterminées, les fonctions de forme sont écrites dans un système de coordonnées locales, puis par transformation adéquate, les propriétés de l'élément sont établies dans le système de référence global.

I.4.3 Fonctions de forme et transformation de coordonnées

Appelée aussi dans certain document fonction de transformation, c'est une méthode très simple pour déterminer les formules de transformation des coordonnées. Elle consiste à utiliser les fonctions de forme « standard » déjà calculées pour représenter les variations de la fonction inconnue. L'idée d'utiliser des fonctions de forme de l'élément pour en déduire les coordonnées curvilignes, dans le contexte de la méthode des éléments frontières ou finis, semble avoir été introduite pour la première fois par **Taig**. Cette première application utilisait les fonctions de base linéaires dans un quadrilatère. **Irons** a généralisé leurs utilisations à d'autres types d'éléments [3-7,8].

Pour chaque élément nous écrivons:

$$x = N'_1 x_1 + N'_2 x_2 + N'_3 x_3 + \dots = N' \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = N' x \quad (\text{I.19})$$

$$y = N'_1 y_1 + N'_2 y_2 + N'_3 y_3 + \dots = N' \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = N' y \quad (\text{I.20})$$

$$z = N'_1 z_1 + N'_2 z_2 + N'_3 z_3 + \dots = N' \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = N' z \quad (\text{I.21})$$

Où les N' sont des fonctions de forme. Ce sont habituellement des polynômes appelés fonctions de transformation géométrique exprimée dans un système de coordonnées locales. Nous obtenons alors immédiatement une relation de la forme recherchée. De plus, les points de coordonnées x_1, y_1, z_1 , se retrouvent aux points appropriés de la frontière de l'élément car, d'après leurs définitions générales, nous savons que les fonctions de forme prennent la valeur 1 au nœud associé et la valeur 0 en tout autre nœud. Ces points constituent donc les nœuds à priori.

A tout système de coordonnées locales correspondra un système global de coordonnées cartésiennes et en général un seul. Cependant nous verrons que des cas de non-unicité peuvent se produire, parfois avec des distorsions violentes.

Remarque:

- Les éléments de référence sont parfois appelés éléments parents ou réels [5].
- La transformation géométrique f peut être interprétée comme un simple changement de variables $x \rightarrow \xi$.
- ξ peut également être considéré comme un système de coordonnées locales lié à chaque élément.
- Les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolation engendrés sont confondus d'où l'appellation d'éléments isoparamétriques. Les fonctions de transformation géométrique $N'(\xi)$ et les fonctions d'interpolation $N(\xi)$ sur l'élément de référence ont les mêmes propriétés. Les fonctions d'interpolation définissent la géométrie et les grandeurs inconnues. De tels éléments sont appelés isoparamétriques.
- Chaque élément est engendré de façon unique.

I.4.4 Stratégie d'intégration

La stratégie d'intégration est également un facteur important dans la qualité des résultats. Il existe deux stratégies : l'une pour les intégrales singulières et l'autre pour les intégrales régulières. Ces stratégies diffèrent en fonction du type d'élément.

Nous remarquerons que, concernant les calculs 3D, les quadrangles offrent beaucoup plus de points d'intégration en particulier dans le cas de l'intégration régulière. Ainsi, de ce point de vue il est conseillé d'utiliser ce type d'élément [3-6].

Nous remarquerons également que le nombre de points d'intégration à prendre en compte pour les intégrations singulières dépend de la méthode de régularisation utilisée. Une méthode régularisée nécessite moins de points qu'une méthode non régularisée.

Nous aurons besoin de certaines transformations pour les calculs intégraux. Pour arriver à nos fins nous aurons besoin de :

- Premièrement : déterminer les dérivées globales en fonction des dérivées locales, étant donnée que, N_i est exprimée en fonction de coordonnées curvilignes locales.
- Deuxièmement : exprimer en fonction des coordonnées locales, l'élément de volume ou de surface sur lequel l'intégration s'effectue, en modifiant de manière appropriée les bornes d'intégration.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f[x(\xi)] J(\xi) d\xi \quad \text{Avec } J(\xi) = \frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi} \quad (\text{I.22})$$

Pour une intégrale en deux dimensions la transformation sera :

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{I.23})$$

Avec :

$$\begin{aligned} J(\xi, \eta) &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

Considérons, par exemple, le triplet de coordonnées locales ξ, η, ζ et le triplet correspondant de coordonnées globales x, y, z . Selon les règles usuelles de calcul des dérivées partielles nous écrivons en particulier la dérivée par rapport à ξ :

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (\text{I.25})$$

En faisant le même calcul pour les dérivées relatives aux deux autres coordonnées et en écrivant le résultat sous forme matricielle, nous obtenons:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.26})$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.27.a}) \quad \text{Avec} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{I.27.b})$$

Dans l'expression ci-dessus, le membre de gauche peut être calculé, car les fonctions N_i ont été exprimées en fonction de coordonnées locales. De plus, comme nous disposons de formules explicites donnant x, y, z en fonction de coordonnées curvilignes [équations : (I.19), (I.20) et (I.21)], nous pouvons écrire explicitement la matrice J en fonction de coordonnées locales. Cette matrice s'appelle la matrice jacobéenne.

Pour retrouver les dérivées par rapport au système de coordonnées globales, nous inversons J et nous écrivons:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (I.28)$$

En utilisant pour définir la transformation de coordonnées les fonctions de forme N (qui, comme nous l'avons vu, ne seront identiques aux fonctions de forme élémentaires que dans le cas d'éléments isoparamétriques) nous obtenons [8]:

$$J = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (I.29)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (I.30)$$

Afin d'effectuer la transformation des variables et du domaine d'intégration, nous utiliserons une méthode de calcul classique qui fait intervenir le déterminant de J . En particulier, selon cette méthode, l'élément de volume s'écrit:

$$dx \, dy \, dz = \det J \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

Ce type de transformation est valable quel que soit le nombre de coordonnées utilisées.

Supposons que nous puissions trouver l'inverse de J , le calcul des propriétés de l'élément se ramène alors à un calcul d'intégrales du type :

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f[x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)] J(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (I.31)$$

Les coordonnées curvilignes forment un système direct orthonormé. En effet l'intégrale est alors calculée dans un prisme droit et non dans un domaine déformé de forme compliquée, ce qui nous donne des limites simples d'intégration. De même, dans le cas de problèmes à une ou deux dimensions, nous obtenons des intégrales simples ou doubles avec des bornes d'intégration simples.

Le déterminant de la matrice jacobéenne est simplement dénommé « le jacobéen » dans la littérature. Il est souvent écrit sous la forme:

$$\det J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \quad (I.32)$$

I.4.4.a Intégrales de surface

Des intégrales de surface apparaissent fréquemment en élasticité et dans d'autres domaines d'application.

$$A = \int f(x, y) ds \quad (I.33)$$

En général, l'élément d'intégration ds se trouvera sur une surface où, l'une des coordonnées que nous pouvons désigner par ξ , est constante.

La méthode la plus pratique pour calculer l'expression ci-dessus est de considérer ds comme un vecteur orienté selon la normale à la surface. Dans le cas de problèmes à trois dimensions, nous l'écrivons sous la forme d'un produit vectoriel:

$$ds = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\xi d\eta \quad (I.34)$$

Et, après substitution, nous intégrerons le domaine $-1 \leq \xi \leq 1$ et $-1 \leq \eta \leq 1$.

Dans le cas de problèmes à deux dimensions, nous obtenons un élément d'arc ds qui s'écrit simplement:

$$ds = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (I.35)$$

I.4.4.b Intégration numérique pour un élément unidimensionnel

Nous allons voir que pour une étude d'un problème relativement simple de contrainte axisymétrique (symétrie de révolution), l'intégration exacte des coefficients des matrices élémentaires peut se révéler compliquée. Pour des éléments déformés plus complexes, que nous envisageons maintenant, l'intégration numérique s'impose.

Pour calculer numériquement l'intégrale d'une fonction, nous pouvons procéder de différentes manières [4-8].

I.4.4.c Formules de quadrature de Newton-Cotes

Dans la méthode la plus directe, les points où la fonction doit être calculée sont définis à priori (habituellement ils sont équirépartis); nous faisons passer un polynôme par les valeurs de la fonction en ces points et nous l'intégrons avec exactitude (**Fig I.14**) [8].

Comme « n » valeurs de la fonction sont nécessaires pour définir un polynôme de degré n - 1, l'erreur sera de l'ordre $O(h^n)$ où h est la taille de l'élément. Nous obtenons ainsi les formules de quadrature classiques de Newton-Cotes:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \\ &= \sum_1^n H_i f(\xi_i) \end{aligned} \quad (I.36)$$

Pour l'intervalle d'intégration $[-1, +1]$ représenté sur les (**Fig I.12 et Fig I.13**) et par exemple, pour n = 2, nous obtenons la formule des trapèzes:

$$I = f(-1) + f(1) \quad (I.37)$$

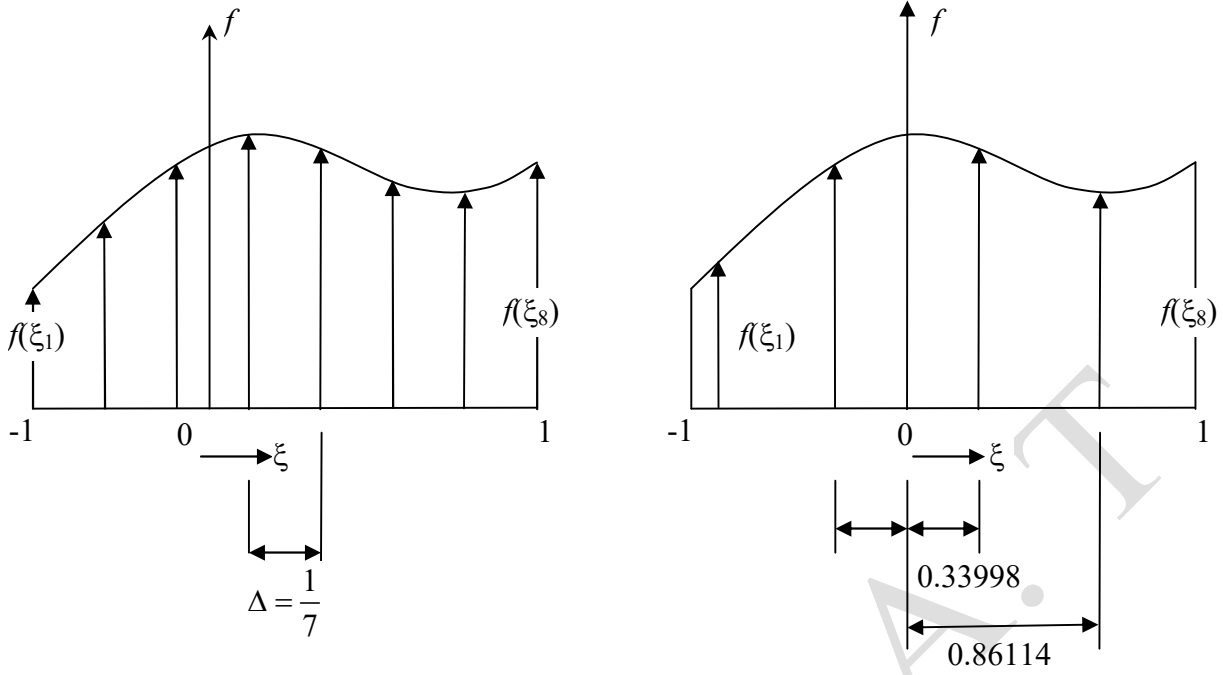


Figure I.14 : Formule de quadrature de **Newton-Cotes** en(a) et de **Gauss** en (b)

Les deux formules intègrent exactement tout polynôme de degré inférieur ou égal à cette erreur d'ordre $O(h^8)$.

Pour $n=3$, la méthode Simpson, ou règle des tiers donne:

$$I = \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(1)] \quad (\text{I.38})$$

Pour $n=4$

$$I = \frac{1}{4} [f(-1) + 3f(-\frac{1}{3}) + 3f(\frac{1}{3}) + f(1)] \quad (\text{I.39})$$

Remarque : Les termes « quadrature » et « intégration numérique » sont synonymes.

I.4.4.d Formules de quadrature de Gauss

Si au lieu de fixer à priori la position des points d'interpolation, nous les considérons comme des inconnues qui doivent être déterminées afin d'obtenir la meilleure précision possible, nous pourrions accroître la précision obtenue pour un nombre donné de points d'interpolation.

En effet, considérons à nouveau l'expression:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \\ &= \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

et supposons que nous désirons encore obtenir une représentation polynomiale; il est facile de voir qu'avec n points nous aurons $2n$ inconnues (H_i et ξ_i) et que nous pourrions définir un polynôme de degré $2n - 1$ et l'intégrer avec exactitude (**Fig I.14(b)**) L'erreur obtenue sera alors d'ordre $O(h^{2n})$.

Le système d'équations est difficile à résoudre, mais nous pouvons montrer, par des calculs mathématiques, que la solution peut en être obtenue explicitement à l'aide des polynômes de **Legendre**. C'est pourquoi cette méthode, dans ce cas particulier, est souvent connue sous le nom de formule de quadrature de **Gauss-Legendre** [8, 20].

Nous présentons dans le tableau 1 (Annexe A) les abscisses et les coefficients de pondération des formules d'intégration de Gauss.

Dans le cas de la méthode des éléments frontières, des calculs complexes sont nécessaires pour déterminer les valeurs de f , fonction à intégrer. C'est pourquoi, la méthode de Gauss, qui nécessite le plus petit nombre d'évaluations de f , est parfaitement adaptée à ce cas. Nous l'utiliserons donc exclusivement [8].

D'autres expressions sont possibles pour le calcul d'intégrales du type :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 w(\xi) f(\xi) d\xi \\ &= \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \end{aligned} \quad (I.41)$$

Ou

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{g=1}^G f(\xi_g) w_g$$

Pour deux variables indépendantes

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{m=1}^{G_m} \sum_{n=1}^{G_n} f(\xi_m, \xi_n) w_n w_m$$

Dans le cas de formes données de $w(\xi)$, l'intégrale à évaluer avec exactitude jusqu'à ce qu'on atteigne un ordre de précision pour le développement polynomiale de $f(\xi)$.

I.4.4.e Intégration numérique pour un domaine rectangulaire et un prisme droit

La méthode la plus simple de calcul de l'intégrale est:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (I.42)$$

Elle consiste à évaluer tout d'abord l'intégrale intérieure avec η constant, soit:

$$\int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j, \eta) = \psi(\eta) \quad (I.43)$$

En calculant de la même manière l'intégrale extérieure, nous obtenons:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \psi(\eta) d\eta \\ &= \sum_{i=1}^n H_i \psi(\eta_i) \\ &= \sum_{i=1}^n H_i \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j, \eta_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\xi_j, \eta_i) \end{aligned} \quad (I.44)$$

De même, dans le cas d'un prisme droit, nous avons:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_i H_j H_m f(\xi_i, \eta_j, \zeta_m) \end{aligned} \quad (I.45)$$

Dans les expressions précédentes, le nombre de points d'intégration est supposé le même dans chaque direction. Cela n'est évidemment pas nécessaire et il est parfois avantageux d'utiliser des nombres différents de points dans chaque direction d'intégration.

I.3.4.f Intégrale elliptique

Certaines des fonctions contiennent une limite singulière de la forme $1/r$ avec $r=0$, ce qui constitue une forme indéterminée. Ce genre d'intégrale ne peut pas être évalué avec exactitude en utilisant la quadrature gaussienne ordinaire de l'équation. Même si un grand nombre de points gaussiens sont employés pour de telles intégrales, il y a cependant, une forme logarithmique appropriée de quadrature gaussienne comme suit:

$$\int_0^1 f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta = \sum_{g_l=1}^{G_l} f(\eta_{g_l}) w_{g_l} \quad (I.46)$$

Où G_t est le nombre global de l'ensemble des points d'intégrations logarithmiques gaussiens avec η_{gi} et w_{gl} sont respectivement les coordonnées logarithmiques gaussiennes et les fonctions de poids. A noter que les limites d'intégration de 0 à 1, exigent une transformation linéaire aux limites -1 à +1. L'utilisation des arrangements gaussiens d'intégration est répandue dans des programmes machine en raison de leur polyvalence et précision. Le livre

de Stroud et Secrest [1966] fournit une liste très complète de formules, de coordonnées et de fonctions gaussiennes de poids. L'annexe A montre une liste d'une gamme de coordonnées et de fonctions gaussiennes de poids (jusqu'à 20 chiffres précis) ce qui est suffisant pour les buts de notre travail [32].

I.4.4.g Ordre de précision de l'intégration numérique

Lorsque nous utilisons l'intégration numérique, une erreur supplémentaire est introduite dans les calculs et le premier réflexe consiste à la réduire autant que possible. Évidemment, le coût de l'intégration numérique peut alors devenir très important, et de fait, dans les anciens programmes de calculs, l'intégration numérique des caractéristiques des éléments consommait un temps de calcul comparable à la résolution du système linéaire.

Il est donc important de déterminer:

- > 1 ◀ La précision de l'intégration numérique minimale conduisant à la convergence.
- > 2 ◀ La précision de l'intégration numérique nécessaire à la conservation de l'ordre de convergence obtenu dans le cas d'une intégration exacte.

Il est parfois pénalisant d'utiliser des intégrations numériques d'ordre de précision plus élevé que celui de la condition 2 ◀ En effet, il n'est pas rare que les erreurs dues à la discrétisation soient compensées par les erreurs dues à l'intégration numérique [15].

I.3.4.h Ordre de précision minimale de l'intégration pour assurer la convergence

Dans les problèmes où une fonction d'énergie (ou des intégrales équivalentes de type Galerkin) est à la base de la définition de l'approximation, la convergence ne se produit qu'à condition que toutes les dérivées d'ordre m soient exactement représentées. Dans le cas présent, pour $m = 1$, apparaît la nécessité de l'intégration exacte des valeurs constantes de G

dans les intégrales de la forme $\int_V f dV$. Ainsi le volume de l'élément $\int_V dV$ doit être calculé avec précision pour que la convergence soit assurée. Dans le cas de coordonnées curvilignes, l'expression $\int_V \det|J| d\zeta d\eta d\xi$ doit être intégrée avec précision.

Cependant, même cette simple condition est parfois trop restrictive et nous remarquons qu'il y a convergence de l'approximation si l'intégrale $\int_V d\zeta d\eta d\xi$ est correctement approchée. En fait, une précision de l'intégration numérique d'ordre $O(h)$ suffit à la convergence. Nous

verrons qu'un ordre de précision aussi faible peut aussi être un mauvais choix pratique dans le traitement de problèmes axisymétriques.

I.4.4.i Ordre de précision de l'intégration pour conserver l'ordre de convergence

Dans le cas général, l'approximation par éléments frontières de l'énergie ainsi que d'autres formes intégrales dans les approximations de type Galerkin, est à $2(p - m)$ près, où p est le degré du polynôme et m l'ordre maximal des dérivées intervenant dans les expressions concernées.

Donc, dès lors que l'intégration approchée est de l'ordre $2(p - m)$, elle entraînera une erreur d'ordre inférieur à $O(h^{2(p-m)+1})$. Dans le cas de coordonnées curvilignes, si h représente la dimension de l'élément, la même règle s'applique. Pour des problèmes de classe C_0 (c'est-à-dire dans le cas où $m = 1$), les formules d'intégration doivent être telles que l'erreur soit de:

- $o(h)$, pour des éléments linéaires avec $p = 1$;
- $o(h^3)$, pour des éléments quadratiques avec $p = 2$;
- $o(h^5)$, pour des éléments cubiques avec $p = 3$.

Nous utiliserons plus tard ces résultats dans notre application [6-8].

Remarque

Dans notre cas nous utilisons des éléments à une ou deux dimensions, car le maillage sera effectué sur la frontière. S'il est volumique il sera effectué sur la surface. S'il est surfacique il sera effectué sur le bord de la surface.

Le résultat final d'une approximation par éléments frontières dans le cas de problèmes linéaires est un système d'équations du type $Kx + F = 0$, dans lesquels les conditions aux limites doivent être prises en considération et qui donnent, après résolution, une solution approchée du problème physique réel. La solution est unique, la matrice K du système doit être non singulière. Nous avons supposé à priori qu'il en était ainsi en cas d'intégration exacte et, en général, cela est bien vérifié. Lorsque nous utilisons des formules d'intégration numérique d'ordre de précision trop faible, la matrice peut devenir singulière, ce qui rend le choix de l'ordre parfois inadapté. S'il est facile de montrer comment une matrice K peut devenir singulière dans certaines circonstances, il est plus difficile de prouver le contraire.

En cas d'intégration numérique, nous substituons les intégrales par des sommations pondérées de relations linéaires entre les paramètres nodaux x . Ces relations linéaires indépendantes constituent la base unique à partir de laquelle la matrice K est construite [3-6].

I.5.1 Solutions élémentaires

Nous tenterons dans ce qui va suivre de donner un éclairage plus étendu sur la BEM, pour mieux apprécier les parties précédentes du chapitre.

En effet, il y a beaucoup de dispositifs communs entre les formulations potentielles et élastostatiques, en particulier au sujet de la manière où la frontière est discrétisée en éléments, ce qui permet leur intégration numérique. L'ensemble de ces intégrations aboutit à l'équation linéaire, qui reste à résoudre. Les problèmes d'élastostatique, sont cependant plus complexes car le nombre de variables est de quatre, puisque constitués par le déplacement des deux composants x et y et leurs contraintes, alors que les problèmes potentiels n'ont que deux variables qui représentent le potentiel [3-6].

Dans la littérature, il y a beaucoup de variétés dans la formulation de la BEM pour des problèmes élastostatiques. Il existe des approches directes, semi-directes et indirectes.

La différence principale entre ces approches est que les formulations directes emploient des quantités physiques réelles comme variables, tandis que les formulations indirectes utilisent des quantités factices.

Les ingénieurs trouvent les formulations directes plus faciles à appliquer parce qu'elles sont dérivées des équations de l'élasticité et de la loi de Hooke.

En outre, en 1977, Cruse a établi l'existence de l'unicité des solutions [6].

En outre, la preuve de l'existence et de l'unicité des solutions n'est pas énoncée ici parce que ces dernières sont maintenant bien établies (Cruse [1977]).

Toutes les solutions bidimensionnelles sont des approximations de solutions tridimensionnelles. Bien que la dérivation est par rapport aux deux directions x et y , la direction z n'est pas ignorée. Deux hypothèses sont faites à propos de l'épaisseur [4, 6]:

- 1- Effort plan: utilisé pour les géométries minces, où l'effort à travers l'épaisseur est négligé c'est-à-dire $\sigma_{zz} = 0$.
- 2- Contrainte plane : utilisée pour les géométries très épaisses, où la contrainte à travers l'épaisseur est négligée, alors que l'effort est différent de zéro c'est-à-dire $\epsilon_{zz}=0$ alors que $\sigma_{zz}=cte$), ce qui fait que z tend ∞ .

Les variables utilisées dans les formulations sont :

u_x, u_y : Déplacements le long des axes x et y .

t_x, t_y : Effort de tractions dans les directions de x et de y .

σ_{xx}, σ_{yy} : Contraintes directes dans les directions de x et de y .

ϵ_{xx} , ϵ_{yy} : Déformations directes dans les directions de x et de y.

σ_{xy} , ϵ_{xy} : Contraintes directes et de cisaillement.

σ_{zz} : Contraintes directes à travers l'épaisseur qui doit être nulle pour les contraintes planes et constantes pour les déformations planes.

ϵ_{zz} : La déformation directe à travers l'épaisseur doit être nulle pour les contraintes planes et constante pour les déformation plane.

1.5.2 Équations différentielles de Navier stocks

Pour arriver à une équation dans la quelle les déplacements sont pris comme variables, nous devons prendre en considération:

1. La loi de conservation de la masse.
2. La loi de Hooke (équations de contrainte-tension).
3. Les définitions du champ vectoriel du déplacement.

En considérant une petite section de dimension différentielle ∂x et ∂y , les équations d'équilibre d'effort s'écrivent comme suit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y &= 0\end{aligned}\tag{I.64}$$

En notation indicielle, elle s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0\tag{I.65}$$

f_x et f_y sont les composants du vecteur force.

Les composants du champ vectoriel de déplacement sont définis comme suit :

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

Avec

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} ; \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} ; \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)\tag{I.66}$$

En notation indicielle (I.66) s'écrit :

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)\tag{I.67}$$

Il est à noter que, dans la définition de ε_{xy} , le facteur $\frac{1}{2}$ est sans importance et est parfois omis dans quelques manuels. Le rapport entre la contrainte et la déformation, selon la loi de Hooke s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} + \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} + \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}(\sigma_{zz} + \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{xy}\end{aligned}\tag{I.68}$$

E : Représente le module de Young,

ν : Le coefficient de Poisson-Young

μ : est le module de cisaillement, défini comme suit :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{I.69}$$

Le remplacement de ($\varepsilon_{zz} = 0$) dans l'équation (I.68) donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)\sigma_{xx} + \left(\frac{-\nu(1+\nu)}{E}\right)\sigma_{yy} \\ \varepsilon_{yy} &= \left(\frac{-\nu(1+\nu)}{E}\right)\sigma_{xx} + \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)\sigma_{yy} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{xy}\end{aligned}\tag{I.70}$$

Le remplacement de ($\sigma_{zz} = 0$) dans l'équation (I.68) pour la contrainte plane donne le résultat suivant:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \left(\frac{1}{E}\right)\sigma_{xx} + \left(\frac{-\nu}{E}\right)\sigma_{yy} \\ \varepsilon_{yy} &= \left(\frac{-\nu}{E}\right)\sigma_{xx} + \left(\frac{1}{E}\right)\sigma_{yy} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{xy}\end{aligned}\tag{I.71}$$

En généralisant la loi de Hooke aux équations (I.68), pour réunir la contrainte et la déformation pour les efforts plans en employant de nouvelles propriétés nous aurons:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \left(\frac{1-\nu'^2}{E'} \right) \sigma_{xx} + \left(\frac{-\nu'(1+\nu')}{E'} \right) \sigma_{yy} \\ \varepsilon_{yy} &= \left(\frac{-\nu'(1+\nu')}{E'} \right) \sigma_{xx} + \left(\frac{1-\nu'^2}{E'} \right) \sigma_{yy} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu'} \sigma_{xy}\end{aligned}\tag{I.72}$$

Avec :

$$E' = E ; \quad \nu' = \nu ; \quad \mu' = \mu ; \quad (\text{déformation plane}) \tag{I.73}$$

$$E' = \frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2} ; \quad \nu' = \frac{\nu}{1+\nu} ; \quad \mu' = \mu ; \quad (\text{Contrainte plane})$$

Les équations (I.72) peuvent être réarrangées tels que les efforts soient du côté gauche. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy}\end{aligned}\tag{I.74}$$

En notation indicielle nous aurons :

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{I.75}$$

Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij}=1$ si $i=j$ et $\delta_{ij}=0$ $i \neq j$)

En substituant l'équation (I.66) dans les équations (I.74), nous obtiendrons les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\ \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{I.76}$$

En notation indicielle nous aurons :

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (I.77)$$

Finalement pour obtenir les équations de déplacement, nous substituons les équations ci-dessus dans les équations d'équilibre (I.64), comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) &= -\frac{f_x}{\mu} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) &= -\frac{f_y}{\mu} \end{aligned} \quad (I.78)$$

En notation indicielle nous aurons:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = -\frac{f_i}{\mu} \quad (I.79)$$

Les équations de déplacement ci-dessus s'appellent équations de Navier et peuvent être résolues par une fonction complémentaire et une intégrale particulière. Par conséquent, nous cherchons la solution fondamentale aux équations de Navier. Elles peuvent être résolues de la même manière que l'équation de Laplace.

I.5.3 Solution fondamentale

Les équations de Navier peuvent être transformées en équations bi-harmoniques pour lesquelles des solutions existent, par la substitution suivante :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial y^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial x \partial y} \right) \\ u_y &= \frac{\partial^2 G_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 G_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (I.80)$$

En notation indicielle, nous aurons:

$$u_i = \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_j \partial y_j} + -\frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 G_j}{\partial x_i \partial y_j} \quad (I.81)$$

Le vecteur G s'appelle vecteur de Galerkin, ce qui nous donne les équations bi-harmoniques suivantes [4]:

$$\begin{aligned}\nabla^4 G_x &= \nabla^2 (\nabla^2 G_x) = -\frac{f_x}{\mu} \\ \nabla^4 G_y &= \nabla^2 (\nabla^2 G_y) = -\frac{f_y}{\mu}\end{aligned}\quad (I.82)$$

Là, ∇^2 est l'opérateur de Laplace. Les solutions fondamentales pour ces équations sont étroitement liées à la solution de l'équation de Laplace. La lecture des données du domaine de solution se fait comme suit : le point de départ p de coordonnées X_p et Y_p et le point de champ Q sur la frontière de coordonnées x_Q et y_Q . Les majuscules indiquent les coordonnées fixes tandis que les lettres minuscules indiquent des coordonnées mobiles. La solution fondamentale est basée sur la solution classique tridimensionnelle d'une force ponctuelle dans un milieu infini appelée solution de Kelvin. Nous pouvons facilement vérifier que les solutions satisfont les équations bi-harmoniques (I.82) comme suit:

$$G_x = G_y = \frac{1}{8\pi\mu} r^2(p, Q) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \quad (I.83)$$

Où $r(p, Q)$ est la distance euclidienne entre la source ponctuelle p et le point courant Q , défini par:

$$\begin{aligned}r &= |r| = |p - Q| \\ r &= \sqrt{(X_p - x_Q)^2 + (Y_p - y_Q)^2}\end{aligned}$$

En remplaçant G_x et G_y dans l'équation (I.80), nous obtenons, pour le vecteur de déplacement en notation indicielle l'expression suivante:

$$u_i = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left((3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right) \quad (I.84)$$

Il est commode d'écrire le vecteur de déplacement comme suit :

$$u_i = U_{ij}(p, Q) e_j \quad (I.85)$$

D'où $U_{ij}(p, Q)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}u_{xx}(p, Q) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left((3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r} \right] + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right) \\ u_{xy}(p, Q) &= u_{yx}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \\ u_{yy}(p, Q) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left((3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r} \right] + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right)\end{aligned}\quad (I.86)$$

En notation indicielle, nous aurons:

$$U_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left((3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right) \quad (I.87)$$

Les fonctions ci-dessus s'appellent éléments de déplacement, où le premier indice se rapporte à la direction du déplacement du point de la frontière Q provoqué par une charge unitaire intérieure p dont la direction est donnée par le deuxième indice.

Le vecteur de contrainte résultant de la solution fondamentale peut être dérivé et substitué dans l'équation de la loi de Hooke (I.68).

En notation indicielle, nous obtenons [4]:

$$t_i = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left(\frac{\partial r(p, Q)}{\partial n} \right) \left((1-2\nu) \delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right) + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left[\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} n_j \right] \quad (I.88)$$

Il est commode de diviser les composantes du vecteur de traction comme suit :

$$\begin{aligned} T_{xx}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \left((1-2\nu) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right) \\ T_{xy}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial y} n_x - \frac{\partial r}{\partial x} n_y \right)^2 \right) \\ T_{yx}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial y} n_x - \frac{\partial r}{\partial x} n_y \right)^2 \right) \\ T_{yy}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \left((1-2\nu) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (I.89)$$

En notation indicielle, nous obtenons:

$$T_{ij}(p, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left(\frac{\partial r(p, Q)}{\partial n} \right) \left((1-2\nu) \delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right) + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left(\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} n_j \right) \quad (I.90)$$

La dérivée de la normale $\frac{\partial r}{\partial n}$ est obtenue de la manière suivante :

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (I.91)$$

Les composants de la normale unitaire externe dans les directions de x et de y (n_x et n_y) sont définis par:

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad n_y = \frac{\partial y}{\partial n} \quad (I.92)$$

Les dérivées de la distance r (p, Q) sont données par :

$$\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x} = \frac{x_Q - X_p}{r(p, Q)}, \quad \frac{\partial r(p, Q)}{\partial y} = \frac{y_Q - Y_p}{r(p, Q)} \quad (I.93)$$

Conclusion

La Méthode des Eléments finis est une méthode qui permet la conception et l'optimisation des structures complexes et l'établissement d'un modèle numérique de base. Cette phase de modélisation est essentielle pour une compréhension du comportement du système sous différentes sollicitations, et suppose le recours à un outil d'analyse numérique performant et maîtrisable dans le futur. Dans ce chapitre nous avons exposé le fondement de la méthode des éléments finis.