

Chapitre V

Conduction en régime transitoire

V.1 Introduction

Jusqu'ici, nous avons traité la conduction en régime permanent, mais avant que les conditions d'équilibre soient atteintes, il faut un certain temps après le début du processus du transfert de la chaleur.

Pendant cette période transitoire, la température change, et l'analyse doit tenir compte des changements de l'énergie interne. Dans cette partie, nous traiterons des méthodes d'analyse plus complexes des problèmes où le flux de chaleur est instationnaire. Le flux de chaleur transitoire est d'une grande importance dans le chauffage et le refroidissement industriel.

Dans certains problèmes d'ingénierie le système subit un ensemble d'états transitions, d'un état stable à un autre, engendrant un flux de chaleur instationnaire et un flux de chaleur variant périodiquement, ainsi changement de la température. On peut cité le flux de chaleur périodique (cyclique) circulant dans un bâtiment entre le jour et la nuit et le flux de chaleur dans un moteur à combustion interne.

Nous analyserons les problèmes qui peuvent être simplifiés en supposant que la température est uniforme à tout instant et indépendante du temps dans l'ensemble du système. Ce type d'analyse est appelé *méthode de la capacité de la chaleur localisée*. Dans ce chapitre, nous examinerons certaines méthodes permettant la résolution des problèmes d'instabilité, où on ne s'intéressera pas aux mécanismes de transfert de la chaleur par convection ou par rayonnement. Lorsque ces modes de transfert de la chaleur affectent les conditions aux limites

du système, une valeur appropriée sera simplement affectée pour le coefficient de transfert de la chaleur.

V.2 Systèmes avec résistance interne négligeable

D'après la loi de Fourier, la conduction thermique en l'absence de gradient de température implique l'existence d'une conductivité thermique infinie. Une telle condition est clairement impossible. Si aucun matériau dans la nature n'a une conductivité thermique infinie, de nombreux problèmes d'écoulement de la chaleur transitoire peuvent être facilement résolus, avec certaines hypothèses admissibles en supposant que la résistance conductrice interne du système est si petite que la température dans le système est sensiblement uniforme à tout instant. Cependant, cette condition n'est vérifiée que si la résistance à la conduction dans le solide est faible par rapport à la résistance au transfert de la chaleur entre le solide et son environnement, c'est-à-dire *que* cette simplification est justifiée quand la résistance thermique externe entre la surface du système et le milieu environnant est si grande par rapport à la résistance du système thermique interne, où elle domine le processus du transfert de la chaleur. On définit le nombre de Biot (Bi) comme étant une grandeur relative à l'importance de la résistance thermique dans un corps solide, où il est égal au rapport de la résistance interne par rapport à la résistance externe. Il peut être défini par l'équation :

$$Bi = \frac{R_{\text{interne}}}{R_{\text{externe}}} = \frac{\frac{L}{k A}}{\frac{1}{h A}} = \frac{L}{k A} \frac{h A}{1} \Leftrightarrow Bi = \frac{\bar{h} L}{k_s} \quad (\text{V.1})$$

Où $\bar{h}$ est le coefficient de transfert thermique moyen, L est l'épaisseur (est une dimension de longueur significative obtenue en divisant le volume du corps par sa surface), et k_s est la conductivité thermique du corps solide. Dans des corps dont la forme ressemble à une plaque, à un cylindre, ou à une sphère, l'erreur introduite par l'hypothèse que la température à tout instant est uniforme doit être inférieure à **5%** quand la résistance interne est inférieure à la résistance de la surface externe de **10%**, c'est-à-dire que si $\bar{h} L / k_s < 0.1$ alors un système de conduction thermique transitoire dans lequel $Bi < 0.1$ est souvent appelé une *capacité localisée*, ce qui est interprété par le fait que sa résistance interne est très faible ou négligeable.

Considérons comme exemple typique du problème de conduction transitoire simple, mais courant, celui d'un solide qui subit un changement soudain dans son environnement thermique tel que le refroidissement d'une petite pièce de métal ou d'une billette en l'immergeant dans un

bain de trempe de température inférieure ($T_0 > T_\infty$), après son retrait d'un four chauffé à une température uniforme T_i .

Supposons que la billette soit retirée du four à une température T_0 et qu'elle soit trempée brusquement, considérons le temps auquel le refroidissement (la trempe) commence à $t = 0$, la température du solide va diminuer pour le temps $t > 0$, jusqu'à ce qu'il atteigne finalement T_∞ , et supposons que le coefficient de transfert thermique $\bar{h}$ reste constant pendant le processus et que la température du bain est T_∞ . Cette réduction est due au transfert de la chaleur par convection à l'interface solide-liquide. L'essence de la méthode de la **capacité localisée** est l'hypothèse que la température du solide soit pratiquement uniforme à tout instant durant le processus transitoire. Cette hypothèse implique que **les gradients de température à l'intérieur du solide sont négligeables**. En négligeant les gradients de température dans le solide, nous ne pouvons plus considérer le problème dans le cadre de l'équation de la chaleur, puisque l'équation de la chaleur est une équation différentielle qui régit la distribution spatiale de la température dans le solide. Au lieu de cela, la réponse de température transitoire est déterminée en formulant un bilan énergétique global sur le solide entier. Cet équilibre doit relier le taux de perte de la chaleur à la surface au taux de variation de l'énergie interne. Le bilan énergétique de la billette sur un petit intervalle de temps dt s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La variation de l'énergie interne} \\ \text{de la billette durant } dt \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Flux de chaleur net de la billette immergé} \\ \text{(plongé) dans le bain de trempe durant } dt \end{array} \right\}$$

$$-c \cdot \rho \cdot V \cdot dT = \bar{h} A_s (T - T_\infty) dt \quad (V.2)$$

Où :

c : chaleur spécifique de la billette, $[J / kg \ K]$

ρ : densité de la billette, $[kg / m^3]$

V : volume de billette, $[m^3]$

T : température moyenne de la billette, $[K]$

$h \equiv \bar{h}$: coefficient de transfert thermique moyen, $[W / (m^2 \ K)]$

A_s : surface de la billette, $[m^2]$

dT : variation de la température $[K]$ un intervalle de temps dt $[s]$.

Le signe moins dans l'Éq. V.2 indique que l'énergie interne diminue quand $T > T_\infty$. Les variables T et t peuvent être facilement séparées. **Cette hypothèse implique que les gradients de température dans le solide sont négligeables** pour un intervalle de temps différentiel dt , Eq. V.2 s'écrit :

$$-c \cdot \rho \cdot V \cdot dT = \bar{h} A_s (T - T_\infty) dt \Leftrightarrow \frac{dT}{T - T_\infty} = \frac{d(T - T_\infty)}{T - T_\infty} = -\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V} dt \quad (\text{V.3})$$

Notons que :

$$\theta = T - T_\infty$$

Où il est noté que $d(T - T_\infty) = d\theta = dT$, puisque T_∞ est constante. Avec une température initiale de T_0 et une température limite T à l'instant t , l'intégration de Eq. V.3 donne :

$$\ln \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \ln \frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V} t, \text{ avec } \left(\begin{array}{l} \int_{T_0}^T \frac{d(T - T_\infty)}{T - T_\infty} = \int_{T_0}^T \frac{dT}{T - T_\infty} = \ln[T - T_\infty]_{T_0}^T = \ln(T - T_\infty) - \ln(T_0 - T_\infty) = \ln \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \\ \text{ou} \\ \int_{\theta_0}^\theta \frac{d\theta}{\theta} = \ln[\theta]_{\theta_0}^\theta = \ln(\theta) - \ln(\theta_0) = \ln \frac{\theta}{\theta_0} \\ \text{et} \\ \int -\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V} dt = -\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V} t \end{array} \right)$$

D'où,

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\theta}{\theta_0} = \exp \left[-\left(\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V} \right) t \right] = e^{-\left(\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V} \right) t} \quad (\text{V.4})$$

Où l'exposant $(h A_s t) / (c \rho V)$ doit être adimensionnel (sans dimension). En réarrangeant les variables de l'exposant, on peut l'exprimer comme le produit de deux groupes adimensionnel:

$$\frac{h A_s t}{c \rho V} = \frac{h t}{c \rho L_c} = \frac{h L_c}{k} \underbrace{\frac{k}{\rho c L_c^2}}_{=Bi} \underbrace{\frac{t}{L_c^2}}_{=Fo} = \left(\frac{h L}{k_s} \right) \left(\frac{\alpha t}{L_c^2} \right) = Bi \cdot Fo \quad (\text{V.5})$$

Où, L_c représente la longueur caractéristique $L_c = V/A_s$ (volume par la surface).

$$\text{Avec, } Fo = \frac{k}{\underbrace{\rho c}_{=\alpha} L_c^2} \frac{t}{L_c^2} = \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (\text{V.6})$$

Donc,

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\theta}{\theta_0} = \exp(-Bi \cdot Fo) = e^{-(Bi \cdot Fo)} \quad (\text{V.7})$$

Cette équation est analogue (similaire) à l'équation caractéristique de la décharge d'un condensateur en série avec une résistance. Un schéma électrique, équivalent au schéma thermique du système à **capacité localisée unique**, est représenté sur la Fig. V. 1. En fermant l'interrupteur dans la position (a) le condensateur est chargé initialement au potentiel T_0 . Lorsqu'on commute l'interrupteur en position (b), l'énergie stockée dans la capacité est déchargée à travers la résistance $1/A_s$. La résistance thermique est $R = 1/(\bar{h} A_s)$, et la capacité thermique est $C = c \rho V$, tandis que R_e et C_e représentent respectivement, la résistance et la capacité électrique. Pour construire un système électrique qui se comporterait exactement comme le système thermique, il suffirait de faire en sorte que le rapport $\bar{h} A_s / (c \rho V)$ s'écrive sous la forme $1/(R_e C_e)$, D'où :

$$\frac{1}{\frac{c \cdot \rho \cdot V}{h A_s}} = \frac{1}{\underbrace{c \cdot \rho \cdot V}_{=C} \underbrace{\frac{1}{h A_s}}_{=R}} = \frac{1}{R C} \quad (V.8)$$

$$(V.4) \Leftrightarrow \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\theta}{\theta_0} = \exp \left[- \left(\frac{1}{\frac{c \cdot \rho \cdot V}{h A_s}} \right) t \right] = \exp \left[- \left(\frac{1}{R C} \right) t \right]$$

Ou

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\theta}{\theta_0} = e^{- \left(\frac{1}{\frac{c \cdot \rho \cdot V}{h A_s}} \right) t} = e^{- \left(\frac{1}{R C} \right) t} \quad (V.9)$$

$$\ln \left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right) = \ln \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right) = - \frac{1}{\frac{c \cdot \rho \cdot V}{h A_s}} t = - \left(\frac{1}{R C} \right) t$$

$$t = \frac{c \cdot \rho \cdot V}{h A_s} \ln \left(\frac{T_0 - T_\infty}{T - T_\infty} \right) = \frac{c \cdot \rho \cdot V}{h A_s} \ln \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right) \quad (V.10.a)$$

Ou

$$t = R C \ln \left(\frac{T_0 - T_\infty}{T - T_\infty} \right) = R C \ln \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right) \quad (V.10.b)$$

Dans le système électrique, on a :

$$\frac{E - E_\infty}{E_0 - E_\infty} = e^{-(1/(C_e \cdot R_e))t}$$

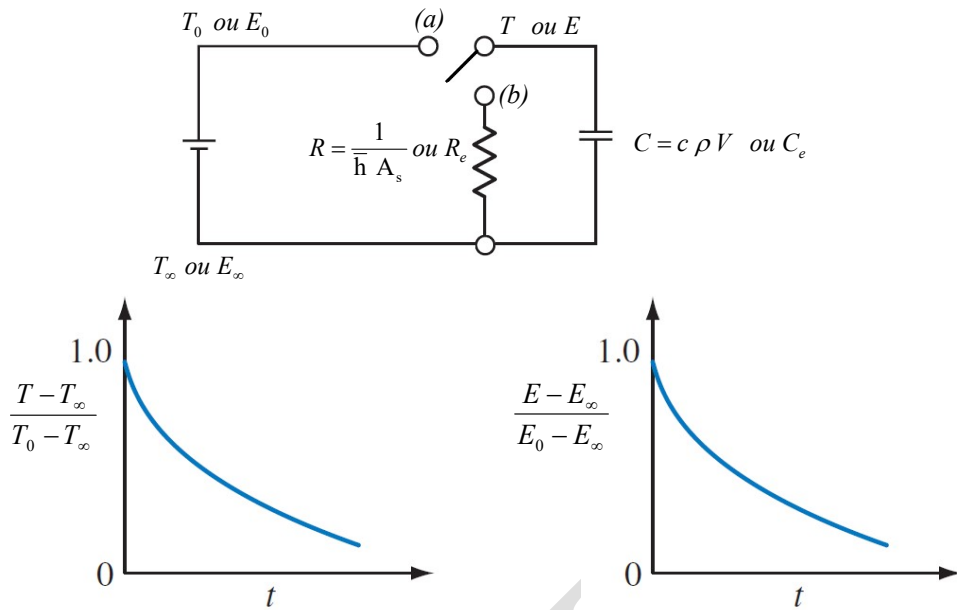


Figure V. 1. Schéma électrique RC équivalent au schéma thermique du système à capacité localisée unique.

Où,

$$q = \frac{T - T_{\infty}}{R} = -C \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-(1/(C \cdot R))t}$$

Flux de chaleur q [J/s ou W]

Capacité thermique $C = c \rho V$ [J/K]

Résistance thermique $R = 1 / (h A_s)$ [K/W]

Potentiel thermique $(T - T_{\infty})$ [K]

$$i = \frac{E - E_{\infty}}{R_e} = -C_e \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{E - E_{\infty}}{E_0 - E_{\infty}} = e^{-(1/(C_e \cdot R_e))t}$$

Flux du courant i [A : Ampères]

Capacité électrique C_e [F : Farads]

Résistance électrique R_e [Ω : Ohms]

Potentiel électrique $(E - E_{\infty})$ [V : Volts]

Avec, $C = c \rho V \rightarrow (J / kg K)(kg / m^3)(m^3) = J / K$

La quantité $c \rho V / h A_s$ est appelée la *constante de temps* du système, car elle est à la dimension du temps. Sa valeur est indicative du taux de réponse d'un système à une seule capacité à un changement soudain de la température ambiante. Si le temps $t = c \rho V / h A_s$ la différence de température $T - T_{\infty}$ est égale à 36,8% de la différence initiale $T_0 - T_{\infty}$.

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{1}{e} = 0.3678 \Leftrightarrow \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = 36.8\%$$

$$\Leftrightarrow T - T_{\infty} = 36.8\% (T_0 - T_{\infty})$$

La quantité $c \rho V / h A_s$ peut être interprétée comme une constante du temps thermique qui peut s'exprimer :

$$\tau_t = \left(\frac{1}{h A_s} \right) c \rho V = R \cdot C \quad (V.11)$$

Exercice 1:

Considérons un fil en cuivre de diamètre 0,10 cm initialement à une température $T_i = 150^\circ\text{C}$. Déterminer la température obtenue lorsque ce fil est brusquement (soudainement) immergé dans :

- cas (a) : de l'eau à 40°C ($h = 80 \text{ W / m}^2 \text{ K}$),
- cas (b) : de l'air à 40°C ($h = 10 \text{ W / m}^2 \text{ K}$).

Les propriétés du cuivre à 293 K ou 20°C sont:

$$k_s = 391 \text{ W/m K} ; \quad c = 381 \text{ J/kg K} ; \quad \rho = 8930 \text{ kg/m}^3 ;$$

Solution :

La surface et le volume du fil électrique par unité de longueur

$$A_s = \pi \underbrace{2r}_{=D} l = (\pi 0.001) l = 3.14 \times 10^{-3} l \quad [\text{m}^2]$$

$$V = \pi \underbrace{r^2}_{=D^2/4} l = \pi (0.001^2 / 4) l = 7.85 \times 10^{-7} \times l \quad [\text{m}^3]$$

$$L = \frac{V}{A_s} = \frac{\pi r^2 l}{2 \pi r l} = \frac{r}{2} \text{ ou } L = \frac{D}{4}$$

D'où Biot dans le cas de l'eau :

$$Bi = \frac{hL}{k_s} = \frac{hD}{k_s 4} = \frac{80 \times 0.001}{391 \times 4} = 5.11 \times 10^{-5} \ll 0.1$$

D'où Biot dans le cas de l'air :

$$Bi = \frac{hL}{k_s} = \frac{hD}{k_s 4} = \frac{10 \times 0.001}{391 \times 4} = 6.39 \times 10^{-6} \ll 0.1$$

De ce faite on peut négliger la résistance interne, car elle est très faible.

De l'Éq. V.5 on a:

$$\frac{h A_s t}{c \rho V} = \frac{h t}{c \rho L_c} = \frac{h L_c}{k} \underbrace{\frac{k}{\rho c L_c^2}}_{=\alpha} t = \left(\frac{h L}{k_s} \right) \left(\frac{\alpha t}{L_c^2} \right) = Bi \cdot Fo, (Fo : \text{module de Fourier})$$

D'où,

$$Bi \cdot Fo = \frac{h A_s}{c \rho V} t = \frac{4 h}{c \rho D} t$$

- Dans le cas de l'eau :

$$Bi \cdot Fo = \frac{4 h}{c \rho D} t = \frac{4 \times 80 (J / s m^2 K)}{381 (J / kg K) \times 8930 (kg / m^3) \times 0.001 (m)} = \overbrace{0.0940}^{(1/s)} \cdot t$$

- Dans le cas de l'air :

$$Bi \cdot Fo = \frac{4 h}{c \rho D} t = \frac{4 \times 10 (J / s m^2 K)}{381 (J / kg K) \times 8930 (kg / m^3) \times 0.001 (m)} = \overbrace{0.0117}^{(1/s)} \cdot t$$

La variation de la température est obtenue de l'Éq. V.5:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\theta}{\theta_0} = \exp(-Bi \cdot Fo) = e^{-(Bi \cdot Fo)} \Leftrightarrow T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-(Bi \cdot Fo)}$$

- Dans le cas de l'eau :

$$T(t) = 40 + (150 - 40) e^{-0.094t} = 40 + (110) e^{-0.094t}$$

- Dans le cas de l'air :

$$T(t) = 40 + (150 - 40) e^{-0.0117t} = 40 + (110) e^{-0.0117t}$$

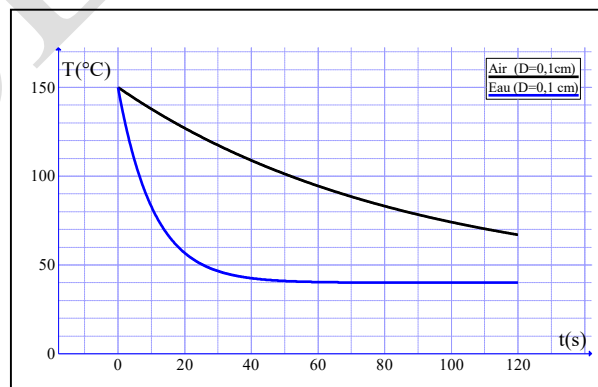


Figure V. 2. Variation de la température du fil en cuivre de 0,1 cm de diamètre après son immersion dans l'air et dans l'eau

Les résultats sont représentés sur la Fig. V.2. Notez que le temps nécessaire pour que la température du fil atteigne 67°C est plus de 2 min dans l'air, mais seulement 15 s dans l'eau. Si ce fil en cuivre de 0,1 cm de diamètre est un élément constituant d'un thermocouple, sa réponse est trop lent pour mesurer le changement rapide de la température de l'air, et il serait souhaitable d'utiliser un fil d'un plus petit diamètre pour réduire ce retard.

Exercice 2: (suite de l'exo 1)

Considérons trois fils en cuivre de différents diamètres : 0.025cm, 0.1cm et 0.2cm, initialement à une température $T_i=150^\circ\text{C}$, sont brusquement immergés dans :

- cas (a) : de l'eau à 40°C ($h=80\text{ W/m}^2\text{K}$),
- cas (b) : de l'air à 40°C ($h=10\text{ W/m}^2\text{K}$).

1- Déterminer la réponse de la température des fils pour les différents cas de figure.

2- Discuter les résultats obtenus.

Les propriétés du cuivre à 293 K ou 20°C sont:

$$k_s = 391\text{ W/m K} ; C = 381\text{ J/kg K} ; \rho = 8930\text{ kg/m}^3 ;$$

1- Réponse de la température des fils pour les différents cas de figure :

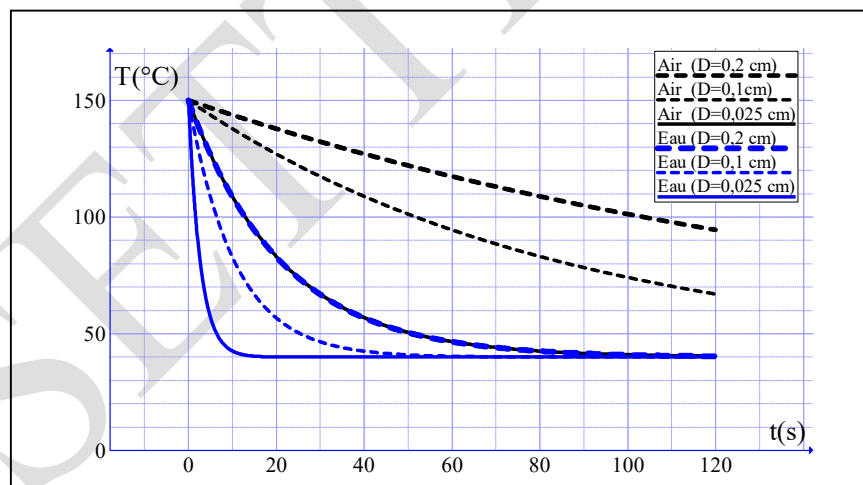


Figure V. 3. Variation de la température du fil en cuivre après son immersion dans l'air et dans l'eau

2- discussion des résultats obtenus :

On constate que la courbe du fil en cuivre de 0,025 cm de diamètre immergé dans l'air est pratiquement confondue avec celle du fil en cuivre de 0,2 cm de diamètre plongé (immergé) dans l'eau.

V.2.a Le flux de chaleur

Le transfert d'énergie total du flux de chaleur q produit jusqu'à un certain temps t , s'écrit :

$$q = h A_s \int_0^t \theta dt \quad (\text{V.12})$$

$$\text{De l'Éq. V.7 : } \theta = \theta_0 e^{-(Bi \cdot Fo)} = \theta_0 e^{-\left(\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V}\right)t} \quad (\text{V.13})$$

$$q = h A_s \int_0^t \theta_0 e^{-\left(\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V}\right)t} dt = \frac{1}{-\left(\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V}\right)} h A_s \int_0^t \theta_0 \left(-\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V}\right) e^{-\left(\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V}\right)t} dt = -(c \cdot \rho \cdot V) \theta_0 \left[e^{-\left(\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V}\right)t} \right]_0^t$$

$$q = (c \cdot \rho \cdot V) \theta_0 \left(1 - e^{-\left(\frac{h A_s}{c \cdot \rho \cdot V}\right)t} \right) = (c \cdot \rho \cdot V) \theta_0 \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{R \cdot C}\right)t} \right) = (c \cdot \rho \cdot V) \theta_0 \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau_i}\right)t} \right)$$

La quantité q est liée à la variation de l'énergie interne du solide.

V.3 Mur plan infini

Dans cette partie du chapitre, nous examinerons quelques problèmes de conduction transitoire dans lesquels la température à l'intérieur du système n'est pas uniforme. La fig. V.4. représente le flux de chaleur transitoire dans un mur plan infini selon (oy et oz) panneau (mur, dalle, plaque, etc.) infini à température uniforme, soumis à l'instant zéro à un changement de la température ambiante à travers une unité de surface (exposé une variation de la température ambiante).

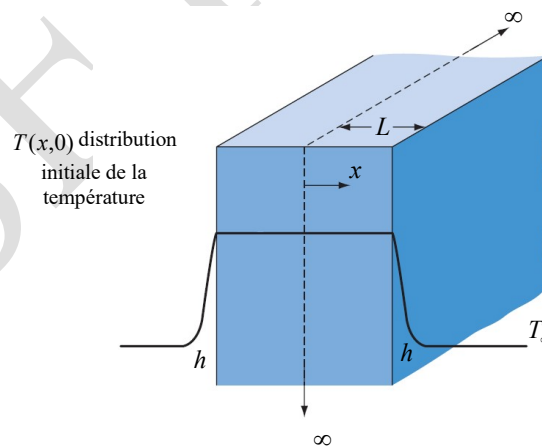


Figure V. 4. Mur plan infini selon (oy et oz)

Si, en outre, il n'y a pas de sources de chaleur internes et que les propriétés physiques de la dalle sont constantes, l'équation générale de conduction thermique se réduit à la forme :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq L \quad (\text{V.14})$$

La diffusivité thermique α , qui apparaît dans tous les problèmes de conduction thermique instationnaire, est une propriété du matériau, où le taux de variation de la température dépend de sa valeur numérique. Qualitativement, nous observons que, dans un matériau qui combine une faible conductivité thermique avec une grande chaleur spécifique (α petite), le taux de changement de température sera plus lent que dans un matériau ayant une grande diffusivité thermique.

Puisque la température T doit être fonction du temps t et x , on commence par supposer une solution de produit :

$$T(x,t) = X(x) \cdot \varphi(t) \quad (\text{V.15})$$

Avec :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = X(x) \cdot \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} \quad (\text{V.16.a})$$

et

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \varphi(t) \cdot \frac{\partial X(x)}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \varphi(t) \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial \varphi(t)}{\partial x}}_{=0} \cdot \frac{\partial X(x)}{\partial x} = \varphi(t) \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \quad (\text{V.16.b})$$

Remplaçons l'Éq. IV.16.a et Éq. IV.16.b dans l'Éq. IV.14:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} X(x) \cdot \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \varphi(t) \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha \cdot \varphi(t)} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \quad \text{Ou} \quad \frac{1}{\alpha \cdot \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

Observez maintenant que le côté gauche est une fonction de t seulement et est donc indépendant de x , alors que le côté droit est une fonction de x seulement et ne changera pas lorsque t varie. Puisque, aucun des deux côtés ne peut changer lorsque t et x varient, les deux côtés sont égaux à une constante, que nous appellerons μ nous avons donc deux équations différentielles ordinaires et linéaires à coefficients constants:

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \alpha \cdot \mu \cdot \varphi(t) \quad (\text{V.18})$$

et

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \mu \cdot X(x) \quad (\text{V.19})$$

La solution générale de l'Éq. V.18:

$$\varphi(t) = C_1 \cdot e^{\alpha \cdot \mu \cdot t} \quad (\text{V.20})$$

Si μ est un nombre positif, plus t augmente, la température de la dalle devient très grande, ce qui est physiquement impossible. Par conséquent, nous rejetons la possibilité que $\mu > 0$. Si μ est nul ($\mu = 0$), la température du panneau serait une constante. Encore une fois, cette possibilité nous la rejetons, car elle n'est pas compatible avec les conditions physiques du problème. Nous concluons donc que μ doit être un nombre négatif, et par commodité nous laissons $\mu = -\lambda^2$. La fonction dépendant du temps devient alors :

$$\varphi(t) = C_1 \cdot e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} \quad (\text{V.21})$$

Donc l'Éq. V.18 s'écrit :

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2 \cdot X(x) \quad (\text{V.22})$$

L'Éq. V.18 est de second ordre, sa solution générale peut s'écrire sous forme d'une fonction sinusoïdale :

$$X(x) = C_2 \cos \lambda x + C_3 \sin \lambda x \quad (\text{V.23})$$

La température en fonction de la distance et le temps dans la dalle est donnée par :

$$\begin{aligned} (\text{V.15}) &\Leftrightarrow T(x,t) = C_1 \cdot e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} (C_2 \cos \lambda x + C_3 \sin \lambda x) \\ &\Leftrightarrow T(x,t) = e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) \end{aligned} \quad (\text{V.24})$$

Où, $A = C_1 \cdot C_2$ et $B = C_1 \cdot C_3$ sont des constantes qu'on doit évaluer à partir des conditions aux limites et des conditions initiales. Nous devons déterminer la valeur de la constante λ afin d'obtenir la solution générale.

Conditions aux limites et des conditions initiales :

1. à $x = 0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$, (symétrie)
2. à $x = \pm L \rightarrow -k_s \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\pm L} = h(T_{x=\pm L} - T_\infty) \Leftrightarrow -(\partial T / \partial x) \Big|_{x=\pm L} = (h/k_s)(T_{x=\pm L} - T_\infty)$
3. à $t = 0 \rightarrow T = T_i \Leftrightarrow T(x,0) = T_i \Leftrightarrow T(x,0) - T_i = 0$

1) On applique la 1^{ère} condition aux limites :

$$\begin{aligned} (\text{V.24}) &\Leftrightarrow \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} (-A\lambda \sin \lambda x + B\lambda \cos \lambda x) \Big|_{x=0} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} (B\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow B = 0 \text{ ou } \lambda = 0 \end{aligned}$$

➤ Si $\lambda = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} = 1 \Leftrightarrow T(x,t) = A$ solution absurde (rejeter)

$$\text{➤ Si } B = 0 \Leftrightarrow T(x, t) = e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} (A \cos \lambda x) \quad (\text{V.25})$$

2) pour satisfaire la deuxième condition aux limites, le flux de chaleur par conduction à l'interface doit être égal au flux de chaleur par convection :

$$T(x, t) = e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} (A \cos \lambda x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} (A \lambda \sin \lambda x)$$

$$\text{à } x = \pm L \rightarrow -(\partial T / \partial x)|_{x=\pm L} = (h / k_s) (T_{x=\pm L} - T_\infty)$$

$$(\text{V.23}) \Leftrightarrow -\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = (h / k_s) (T_{x=L} - T_\infty) \Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} (A \lambda \sin \lambda L) = (h / k_s) \left(T_{x=L} - \underbrace{T_\infty}_{=0} \right)$$

Avec :

$$T(x = L, t) = e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} (A \cos \lambda L)$$

$$(\text{V.23}) \Leftrightarrow -\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = (h / k_s) (T_{x=L} - T_\infty) \Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} (A \lambda \sin \lambda L) = (h / k_s) (e^{-\alpha \cdot \lambda^2 \cdot t} (A \cos \lambda L) - 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda k_s}{h} = \frac{\cos \lambda L}{\sin \lambda L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k_s}{h L} \lambda L = \frac{\cos \lambda L}{\sin \lambda L}$$

$$\Leftrightarrow \cot \lambda L = \frac{1}{\underbrace{\frac{k_s}{h L}}_{=Bi}} \lambda L = \frac{\lambda L}{Bi} \quad (\text{V.26})$$

L'Éq. V.26 est transcendante (*une équation transcendante est une équation contenant une fonction transcendante d'une ou de plusieurs variables qui sont solutions de l'équation*), où il y a un nombre infini de valeurs λ qui permettent de la satisfaire, appelées valeurs caractéristiques. Le moyen le plus simple de déterminer les valeurs numériques de λ est de tracer les courbes de la fonction $\cot \lambda L$ et la fonction $\lambda L / Bi$. Les valeurs de λ aux points d'intersection de ces courbes sont les valeurs caractéristiques qui satisfassent la deuxième condition aux limites (**Fig. V. 5.**). Pour la valeur de $L = 1$, nous pouvons lire les premières valeurs caractéristiques : $\lambda_1 = 0,85 Bi$, $\lambda_2 = 3,43 Bi$, $\lambda_3 = 6,44 Bi$, $\lambda_4 = 9,54 Bi$, etc. La valeur $\lambda = 0$ est écartée, car elle conduit à une solution exclue $T = 0$. Une solution particulière de l'Éq. V.26 correspond à chaque valeur de λ par conséquent, nous allons adopter une notation en indice pour identifier la correspondance entre A et λ tel que A_1 correspond à λ_1 , dans le cas général A_n correspond à λ_n . La solution complète est écrite sous la forme de la somme des solutions correspondant à chaque valeur caractéristique:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \cdot \lambda_n^2 \cdot t} A_n \cos \lambda_n x \quad (V.27)$$

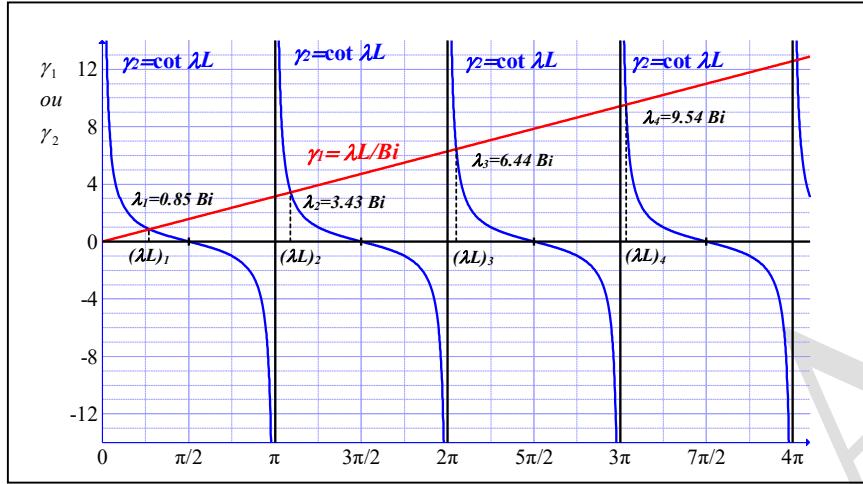


Figure V. 5. Solution graphique de l'équation transcendante $\cot \lambda L = \lambda L / Bi$

Chaque terme de cette série infinie contient une constante. Ces constantes sont évaluées en remplaçant la condition initiale par Eq. (V.27):

$$T(x,0) = T_i = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \lambda_n x \quad (V.28)$$

On peut montrer que les fonctions caractéristiques $\cos \lambda_n x$ sont orthogonales entre $x=0$ et $x=L$ et donc :

$$\begin{cases} \int_0^L \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x dx = 0 & \text{si } m \neq n \\ \int_0^L \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x dx \neq 0 & \text{si } m = n \end{cases} \quad (V.29)$$

Où λ_m peut prendre n'importe quelle valeur caractéristique de λ pour obtenir une valeur particulière de A_n , nous multiplions les deux côtés de l'Éq. V.21 par $\cos \lambda_m x$ et on intègre entre 0 et L.

Ceci peut être vérifié en effectuant l'intégration suivante :

$$\int_0^L \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x dx = \frac{\lambda_n \sin L \lambda_n \cos L \lambda_m - \lambda_m \sin L \lambda_m \cos L \lambda_n}{2L (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)}$$

Si $m \neq n$ l'Éq. V.26 s'écrit :

$$\frac{\cot \lambda_m L}{\lambda_m} = \frac{k_s}{h} = \frac{\cot \lambda_n L}{\lambda_n}$$

Où :

$$\lambda_n \cos \lambda_m L \sin \lambda_n L = \lambda_m \cos \lambda_n L \sin \lambda_m L$$

Donc, l'intégrale est nulle quand $m \neq n$.

Selon l'Éq. V.29, tous les termes du côté droit disparaissent mis à part ceux impliquant le carré de la fonction caractéristique $\cos \lambda_n x$, nous obtenons :

$$\int_0^L (T_i - T_\infty) \cos \lambda_n x \, dx = A_n \int_0^L \cos^2 \lambda_n x \, dx$$

Des intégrales standard, on a:

$$\int_0^L \cos^2 \lambda_n x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2\lambda_n} \sin \lambda_n x \cos \lambda_n x \Big|_0^L = \frac{L}{2} + \frac{1}{2\lambda_n} \sin \lambda_n L \cos \lambda_n L$$

et

$$\int_0^L \cos \lambda_n x \, dx = \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n L$$

D'où la constante A_n est

$$A_n = \frac{2\lambda_n}{L\lambda_n + \sin \lambda_n L \cos \lambda_n L} \frac{(T_i - T_\infty) \sin \lambda_n L}{\lambda_n} = \frac{2(T_i - T_\infty) \sin \lambda_n L}{L\lambda_n + \sin \lambda_n L \cos \lambda_n L} \quad (\text{V.30})$$

Exercice 3:

Pour illustrer la procédure générale décrite ci-dessus, déterminons A_1 lorsque $h=1$, $k_s=1$, $A_n=1$ et $L=1$. Sur courbe de la Fig. V. 5., la valeur de λ_1 est de 0,86 radian ou 49.2°, d'où :

$$\begin{aligned} A_1 &= (T_i - T_\infty) \frac{2 \sin 49.2}{(1)(0.86) + \sin 49.2 \cos 49.2} \\ &= (T_i - T_\infty) \frac{2 \times 0.757}{0.86 + 0.757 \times 0.653} \end{aligned}$$

$$A_1 = 1.12 (T_i - T_\infty)$$

De la même façon, nous obtenons:

$$A_2 = -0.152 (T_i - T_\infty) \text{ et } A_3 = -0.046 (T_i - T_\infty)$$

Pour $Bi=1$ la série converge rapidement, où les trois termes représentent une bonne approximation. Pour exprimer la température dans le panneau en termes de coefficient adimensionnel, on l'écrit sous la forme suivante $\lambda_n = \delta_n / L$. La solution résultante de la substitution de l'Éq. V.28 dans l'Éq. V.26 s'écrit:

$$\frac{T(x,t)-T_{\infty}}{T_i-T_{\infty}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta_n^2(t\alpha/L^2)} \frac{2 \sin \delta_n \cos(\delta_n x/L)}{\delta_n + \sin \delta_n \cos \delta_n} \quad (\text{V.31})$$

La dépendance temporelle est maintenant contenue dans le module adimensionnel de Fourier $Fo = t\alpha/L^2$. En outre, si nous écrivons la deuxième condition aux limites en termes de δ_n , de l'Éq. V.24 nous obtenons:

$$\cot \delta_n = \frac{k_s}{hL} \delta_n \quad (\text{V.32})$$

Ou bien,

$$\delta_n \tan \delta_n = \frac{hL}{k_s} = Bi \quad (\text{V.33})$$

Puisque δ_n est en fonction du nombre adimensionnel Biot uniquement, $Bi = hL/k_s$, la température $T(x,t)$ peut être exprimé en termes de trois quantités sans dimension $Fo = t\alpha/L^2$, $Bi = hL/k_s$ et x/L .

Le taux de changement d'énergie interne du panneau par unité de surface, est donné par :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{q}{A} = -k_s \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} \quad (\text{V.34})$$

Le gradient de température peut-être obtenu par :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{2(T_0-T_{\infty})}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta_n^2 Fo} \frac{\delta_n \sin^2 \delta_n}{\delta_n + \sin \delta_n \cos \delta_n} \quad (\text{V.35})$$

En substituant l'Éq. V.35 dans l'Éq. V.34 et en intégrant de $t=0$ à t , nous obtenons :

$$Q = 2(T_0-T_{\infty})Lc\rho \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\delta_n^2 Fo}\right) \frac{\sin^2 \delta_n}{\delta_n^2 + \delta_n \sin \delta_n \cos \delta_n} \quad (\text{V.36})$$

Pour rendre l'Éq. V.36 sans dimension, nous considérons que $Q_0 = Lc\rho(T_0-T_{\infty})$ où $Lc\rho T_0$ représente l'énergie interne initiale par unité de surface du panneau, nous obtenons :

$$\frac{Q}{Q_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \delta_n}{\delta_n^2 + \delta_n \sin \delta_n \cos \delta_n} \left(1 - e^{-\delta_n^2 Fo}\right) \quad (\text{V.37})$$

La répartition de la température et la quantité de la chaleur transférée à tout moment peuvent être déterminées respectivement à partir des Éq.V.31 et Éq. V.37. Les expressions finales sont sous la forme de séries numériques. Où elles ont été évaluées, et les résultats obtenus sont mis sous forme diagrammes.

V.4 Solide semi-infini

Une autre configuration géométrique simple pour laquelle des solutions analytiques sont disponibles est le solide (mur, plaque, panneau, etc.) semi-infini. Un tel solide s'étend à l'infini dans toutes les directions sauf une et peut donc être caractérisé par une seule surface (Fig. V.6). Un solide semi-infini se rapproche de nombreux problèmes pratiques.

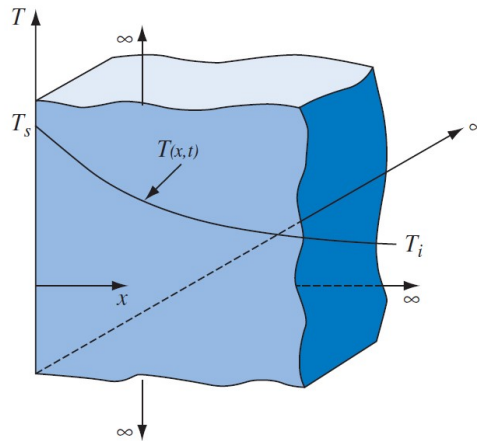


Figure V. 6. Solide semi-infini.

On peut citer comme exemple le cas du traitement thermique d'une grande plaque d'acier rectangulaire, où l'épaisseur est sensiblement plus petite que la longueur et la largeur de la dalle .

Si un changement thermique est appliqué brutalement à cette surface, une onde de température unidimensionnelle se propage par conduction dans le solide. L'Éq. V.14 décrit la conduction transitoire dans un solide semi-infini ($0 \leq x < \infty$). Pour résoudre cette équation, nous devons spécifier deux conditions aux limites ainsi que la distribution de température initiale.

Pour la condition initiale, nous préciserons que la température à l'intérieur du solide est uniforme est égale à T_i ou $T(x,0) = T_i$. Pour l'une des deux conditions aux limites requises, nous considérons si la surface est éloignée la température intérieure ne sera pas affectée par l'onde de température, c'est-à-dire $T(\infty, t) = T_i$.

Pour des formes fermées, on distingue trois conditions aux frontières à $t = 0$, ces trois cas sont illustrés sur la **Fig. V. 7**.

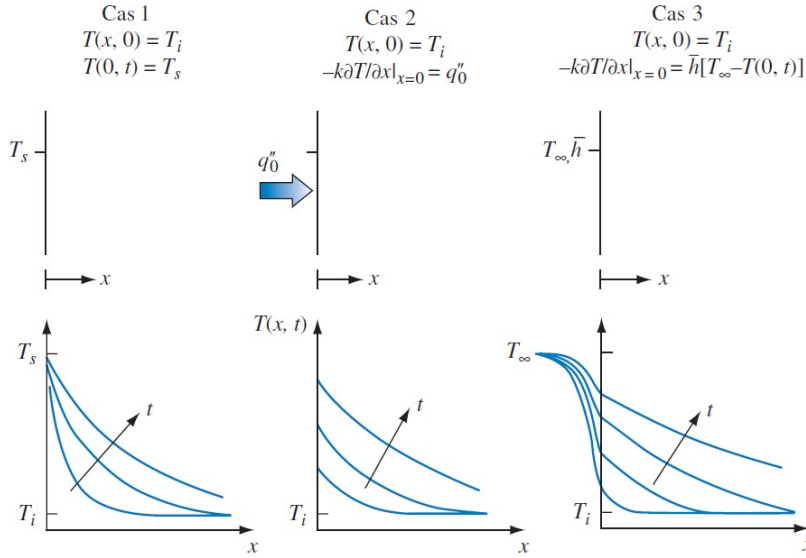


Figure V. 7. Distribution des températures transitoires dans un solide semi-infini à trois conditions en surface: (1) changement de la température à la surface, (2) flux constant de chaleur à la surface et (3) surface exposée à la convection.

Cas 1. Changement de la température de la surface:

$$T(0, t) = T_s$$

$$\frac{T(x, t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (\text{V.38})$$

$$q_s''(t) = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{k (T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Cas 2. Flux constant de la chaleur de la surface:

$$q_s'' = q_0''$$

$$T(x, t) - T_i = \frac{2 q_0'' (\alpha t / \pi)^{1/2}}{k_s} \exp\left(\frac{-x^2}{4 \alpha t}\right) - \frac{q_0'' x}{k_s} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (\text{V.39})$$

Cas 3. Surface exposée à la convection.

$$-k_s \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h [T_\infty - T(0, t)]$$

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right) \quad (\text{V.40})$$

La quantité $h^2 \alpha t / k^2$ est égale au produit du nombre de Biot au carré $Bi = h^2 x / k^2$ et du nombre de Fourier ($F_0 = \alpha t / x^2$).

Dans l'Éq. V.38 la fonction **erf** représente la **fonction d'erreur gaussienne**, qui est fréquemment rencontrée dans l'ingénierie est définie par :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2\sqrt{\alpha t})} e^{-\xi^2} d\xi \quad (\text{V.41})$$

et **erfc** est la fonction d'erreur complémentaire définie par:

$$\text{erfc}(w) = 1 - \text{erf}(w) \quad (\text{V.42})$$

L'évolution de la température pour les trois cas est illustrée qualitativement sur la Fig. V.8.

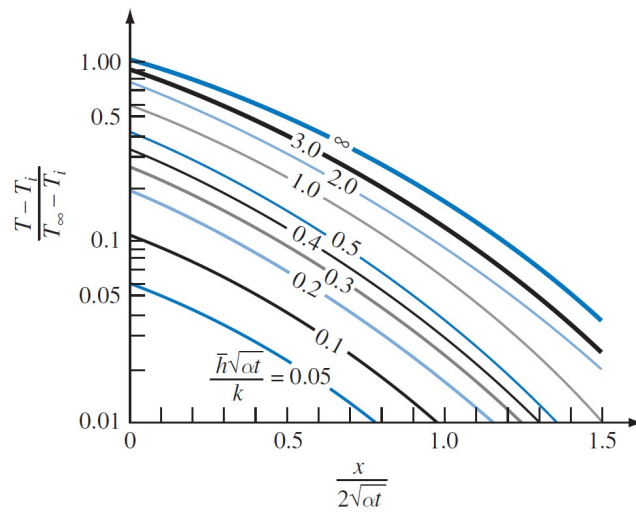


Figure V.8. Températures transitoires adimensionnelles d'un solide semi-infini avec transfert de la chaleur à la surface.

Pour le cas 3, l'évolution de la température spécifique est calculée par l'Éq. V.40 est représentée sur la Fig. V.8. La courbe correspondante à $h = \infty$ est équivalente au résultat obtenu dans le cas d'un changement soudain de la température de surface ($T_s = T(x,0)$), où le second terme du côté droit de l'Éq. V.40 s'annule, le résultat obtenu est équivalent à l'Éq. V.38 pour le 1^{er} cas.

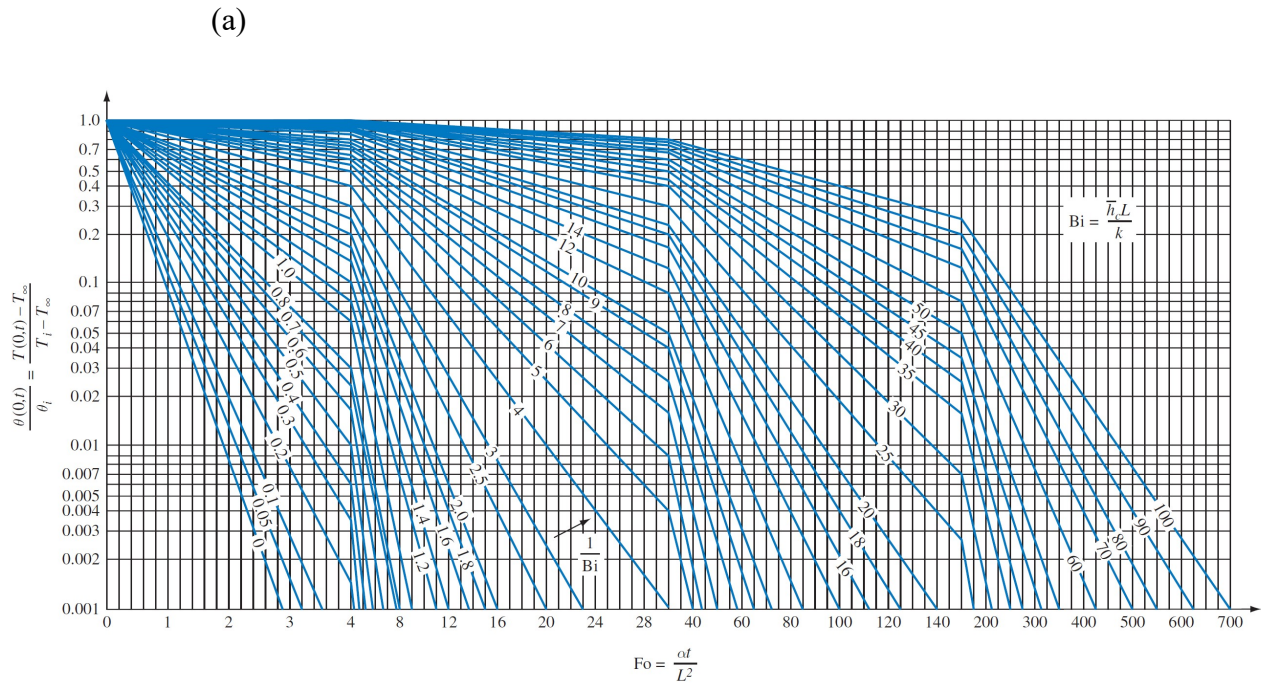


Figure V. 9.a. Températures transitoires adimensionnelles et le flux de chaleur dans une plaque infinie de largeur $2L$.

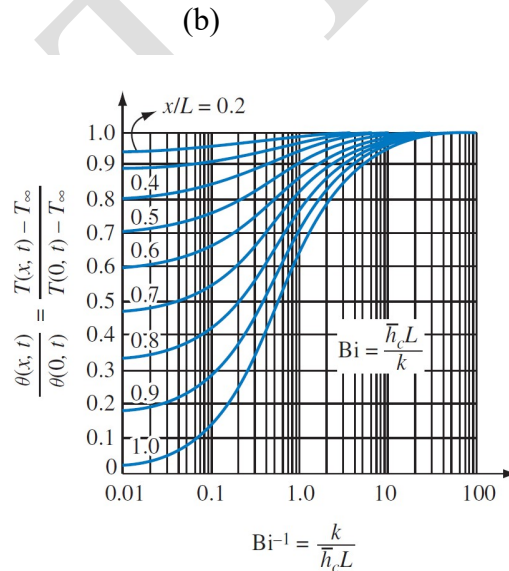


Figure V. 9.b. Températures transitoires adimensionnelles et le flux de chaleur dans une plaque infinie de largeur $2L$.

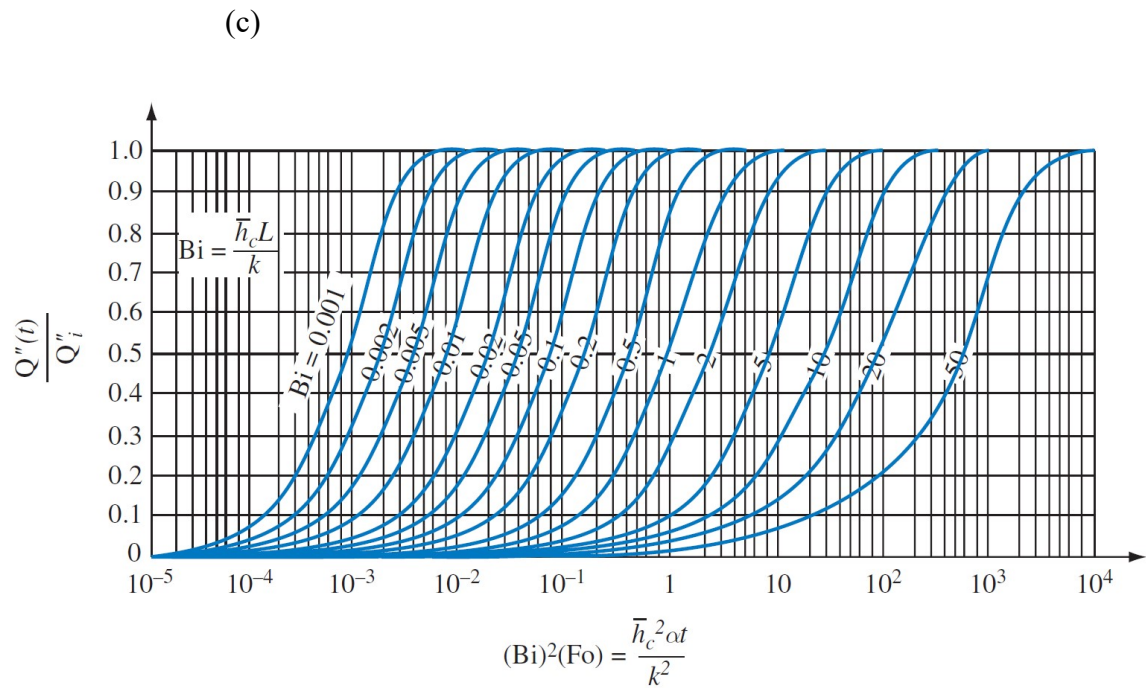


Figure V. 9.c. Températures transitoires adimensionnelles et le flux de chaleur dans une plaque infinie de largeur $2L$.

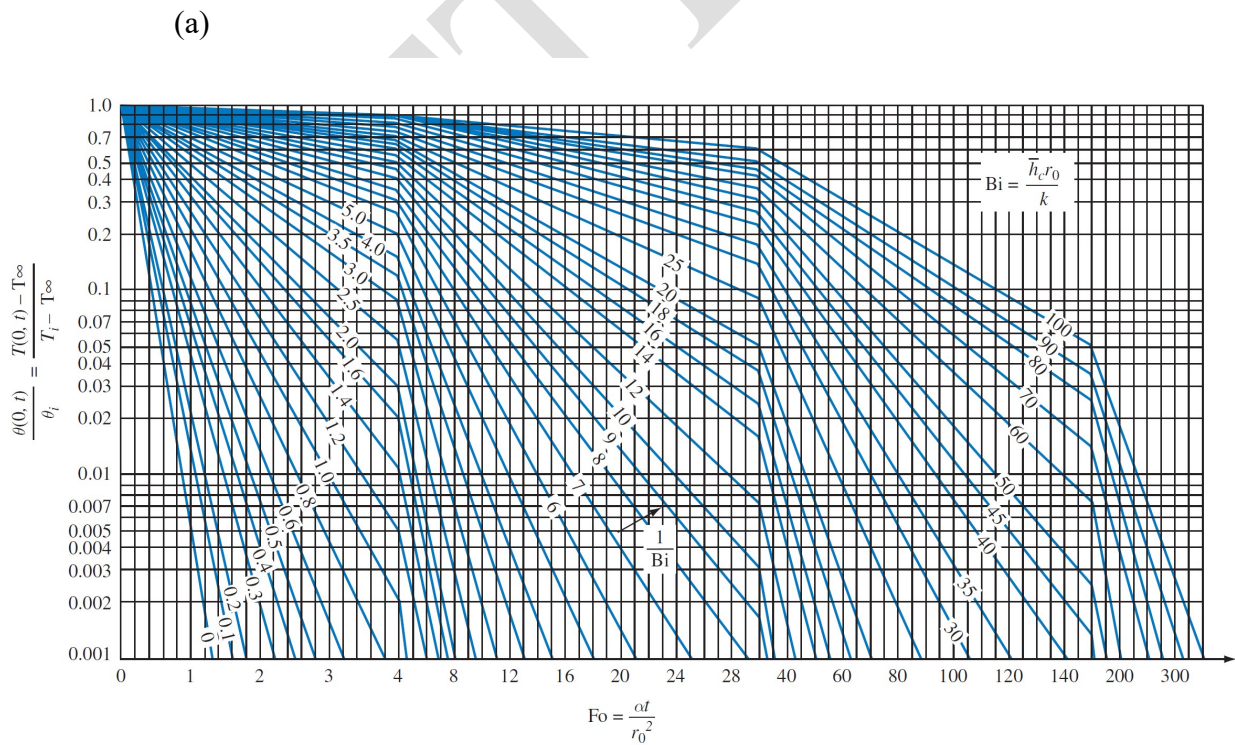


Figure V. 10.a. Températures transitoires adimensionnelles et flux de chaleur d'un cylindre long.

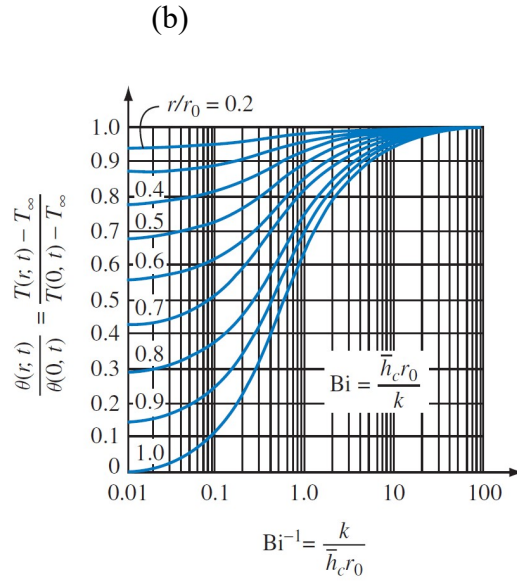


Figure V. 10.b. Températures transitoires adimensionnelles et flux de chaleur d'un cylindre long.

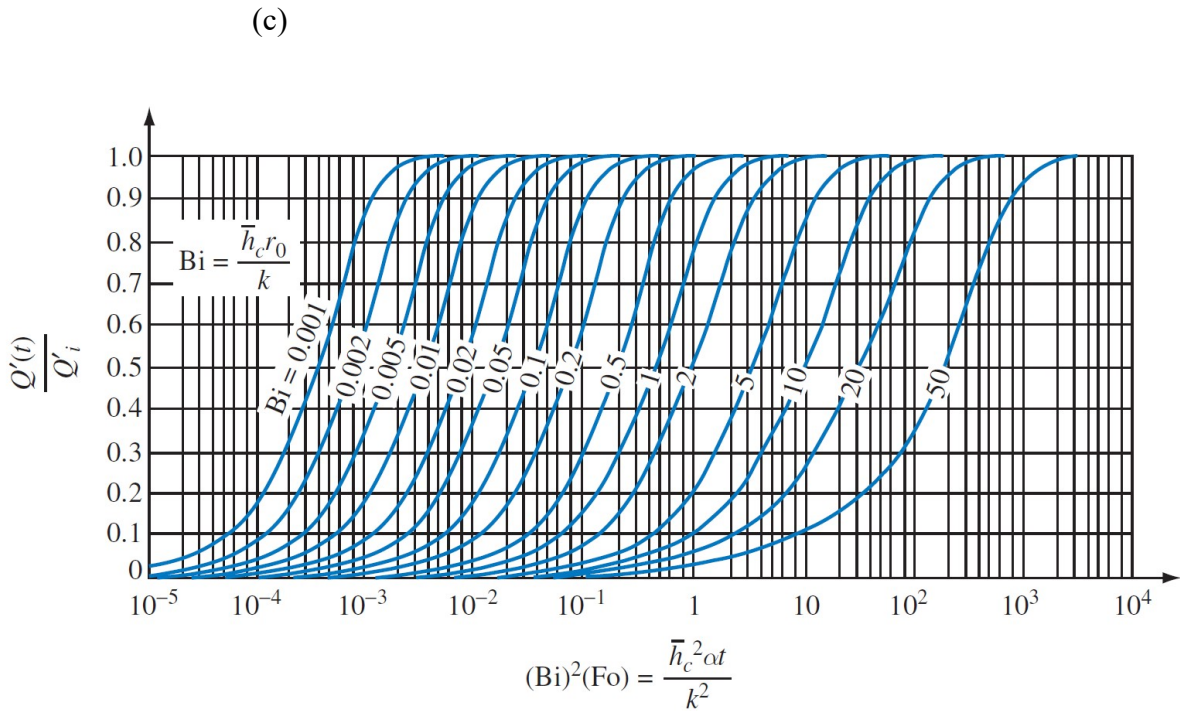


Figure V. 10.c. Températures transitoires adimensionnelles et flux de chaleur d'un cylindre long.

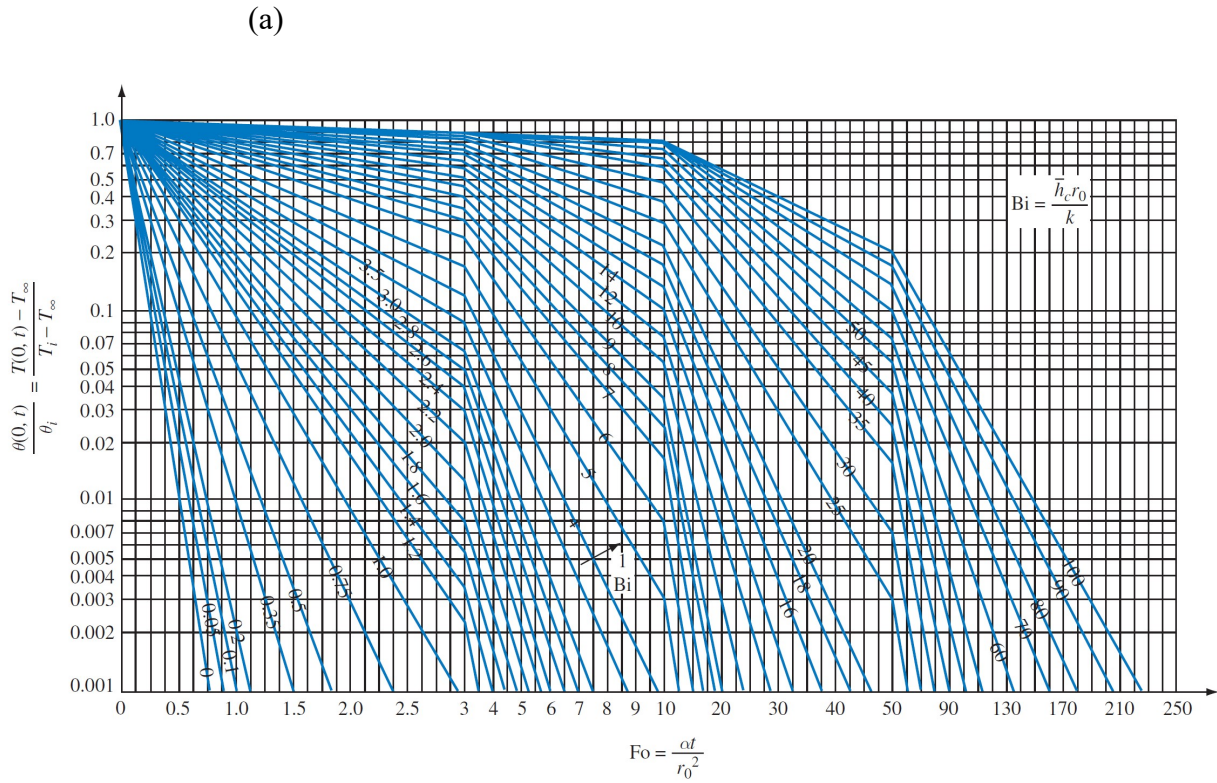


Figure V. 11.a. Températures transitoires adimensionnelles et flux d'une sphère.

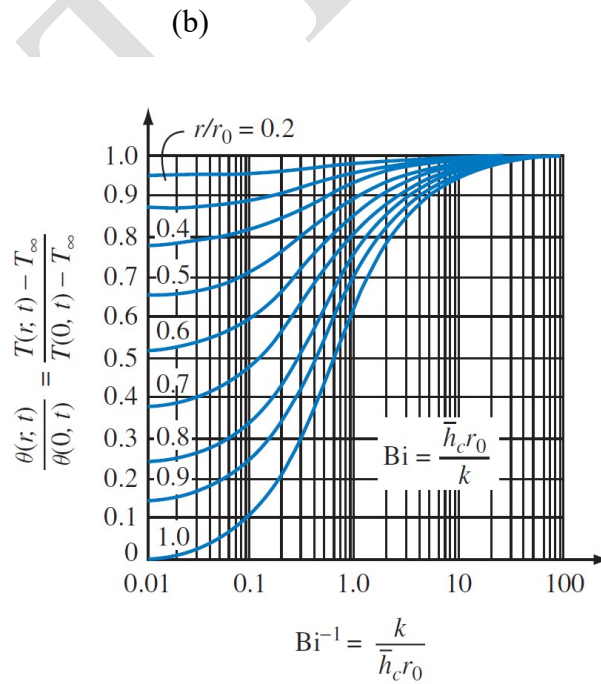


Figure V. 11.b. Températures transitoires adimensionnelles et flux d'une sphère.

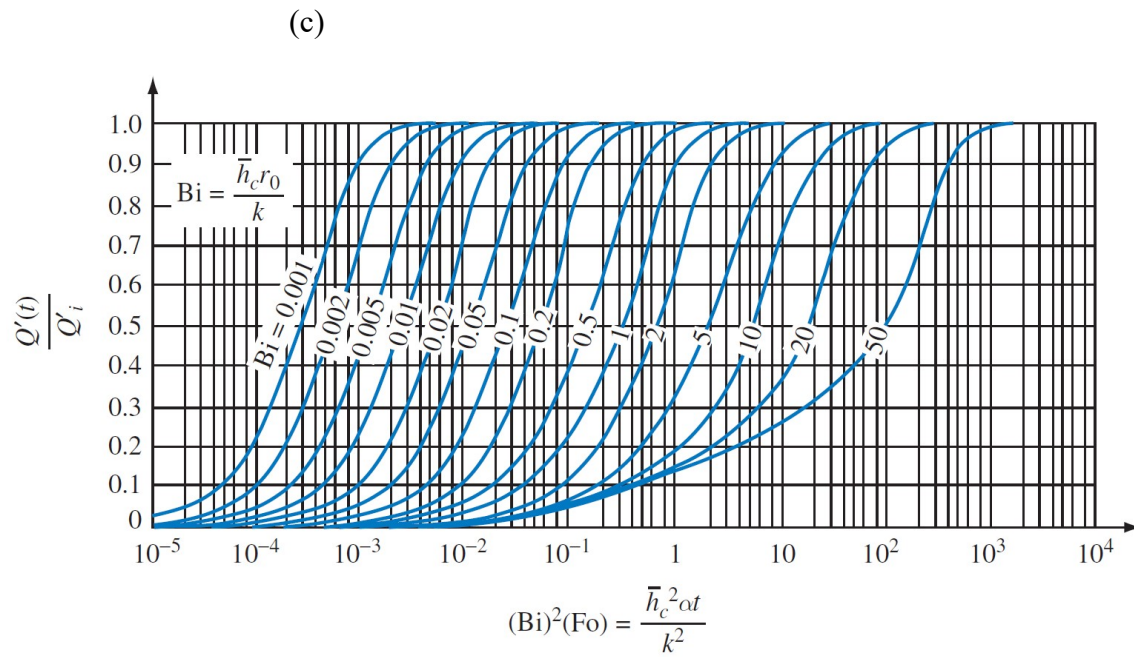
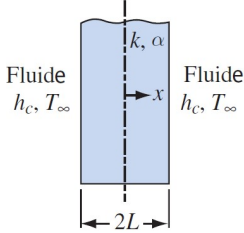
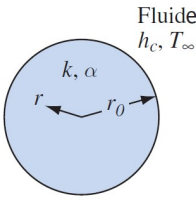
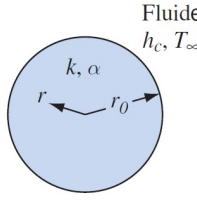


Figure V. 11.c. Températures transitoires adimensionnelles et flux d'une sphère.

Tableau V. 1 Récapitulatif des paramètres sans dimension à utiliser avec les diagrammes de conduction thermique transitoire des Fig. V.9. à Fig. V.11.

Situation	Plaque infinie Épaisseur $2L$	Cylindre infiniment long Rayon r_0	Sphère Rayon r_0
Géométrie			
Position sans dimension	$\frac{x}{L}$	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{r}{r_0}$
Nombre de Biot	$\frac{\bar{h}_c L}{k}$	$\frac{\bar{h}_c r_0}{k}$	$\frac{\bar{h}_c r_0}{k}$
Nombre de Fourier	$\frac{\alpha t}{L^2}$	$\frac{\alpha t}{r_0^2}$	$\frac{\alpha t}{r_0^2}$
Ligne médiane adimensionnelle $\frac{\theta(0, t)}{\theta_i}$	Fig. V. 9.a.	Fig. V. 10.a.	Fig. V. 11.a.
Température locale adimensionnelle $\frac{\theta(x, t)}{\theta(0, t)}$ or $\frac{\theta(r, t)}{\theta(0, t)}$	Fig. V. 9.b.	Fig. V. 10.b.	Fig. V. 11.b.
Transfert de chaleur Adimensionnelle $\frac{Q''(t)}{Q_i''}$ or $\frac{Q'(t)}{Q_i'}$ or $\frac{Q(t)}{Q_i}$	Fig. V. 9.c. $Q_i'' = \rho c L (T_i - T_\infty)$	Fig. V. 10.c. $Q_i' = \rho c \pi r_0^2 (T_i - T_\infty)$	Fig. V. 11.c. $Q_i = \rho c \frac{4}{3} \pi r_0^3 (T_i - T_\infty)$

M. SETTET. A. T.