

Chapitre IV

Conduction bidirectionnelle en régime permanent

IV.1 Introduction

Dans le chapitre I, le bilan du transfert de la chaleur en régime permanent (stationnaire) a été exprimé dans le cas général pour un gradient de température (tridimensionnel en coordonnées cartésiennes). Nous souhaitons maintenant analyser le flux de la chaleur dans le cas bidimensionnel en régime stationnaire sans génération de la chaleur.

L'objectif majeur de l'analyse de la conduction est de déterminer le champ de température du milieu engendré par les conditions appliquées à ses frontières. C'est-à-dire que nous souhaitons connaître la distribution et la variation de la température en fonction des coordonnées relatives à ce milieu. Une fois cette distribution connue, le flux de la chaleur par conduction peut être calculé à partir de la loi de Fourier en tout point du milieu ou sur sa surface.

Le calcul de la distribution de la température dans un solide permet de déterminer d'autres paramètres dus aux contraintes thermiques tels que: la dilatation, les contraintes mécaniques, la déflexion, etc. La distribution de la température pourrait également être utilisée pour optimiser l'épaisseur d'un matériau isolant, pour déterminer la compatibilité des revêtements spéciaux ou de l'adhésif utilisé avec le matériau.

IV.2 Analyse mathématique de la conduction de la chaleur bidimensionnelle

L'équation générale de la chaleur par conduction thermique en coordonnée cartésienne (en l'équilibre énergétique) s'écrit (Éq. I.19):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (\text{IV.1})$$

Où

$\alpha = k / (\rho \cdot c)$ est appelé la diffusivité thermique du matériau unité $[\text{m}^2/\text{s}]$

$\dot{q}$ = l'énergie produite par unité de volume (énergie interne du système considéré) $[\text{W}/\text{m}^3]$

c = la chaleur spécifique du matériau $[\text{J}/\text{kg } ^\circ\text{C}]$

ρ = la masse volumique $[\text{kg}/\text{m}^3]$

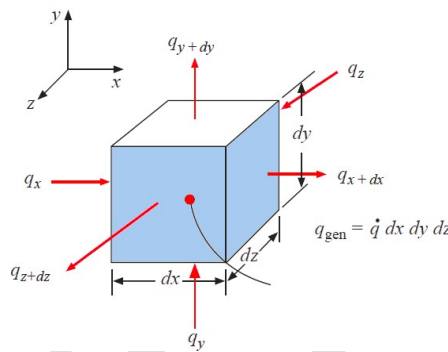


Figure IV. 1 L'analyse thermique par conduction en coordonnées cartésiennes traversant un volume élémentaire (de contrôle)

Si k = constante l'Éq. VI.1 s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (\text{IV.2})$$

Si k = constante et $\dot{q} = 0$ alors :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (\text{IV.3})$$

L'équation de Laplace en régime permanent (bidimensionnel/ bidirectionnelle) s'écrit comme

$$\text{suit : } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{IV.5})$$

L'objectif de l'analyse de transfert de la chaleur permet d'illustrer le flux de la chaleur ou la température qui en découle.

La solution de l'Éq. IV.5 exprimera la température dans un corps bidimensionnel en fonction des deux coordonnées indépendantes x et y . Ensuite, le flux de la chaleur dans les directions x et y peut être calculé à partir des équations de Fourier :

$$q_x = -k A_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{IV.6})$$

$$q_y = -k A_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{IV.7})$$

Ces quantités de flux de la chaleur sont orientées soit dans la direction x , soit dans la direction y . Le flux de la chaleur total de n'importe quel point dans le matériau est la résultante de q_x et q_y à ce point. Ainsi, le vecteur du flux thermique total est orienté de manière à ce qu'il soit perpendiculaire aux lignes de la température (constante dans le matériau), comme présenté sur la Fig. IV. 2. Donc, si la distribution de la température dans le matériau est connue, nous pouvons facilement établir le flux de la chaleur.

IV.2.1 Méthodes de séparation de variables

Considérons la plaque rectangulaire illustrée sur la Fig. IV. 3. Trois côtés de la plaque sont maintenus à la température constante T_1 , et le côté supérieur (la face supérieure) à une certaine répartition de la température. Cette distribution pourrait être simplement une température constante (répartie régulièrement) ou plus complexe, comme une distribution sinusoïdale. Nous examinerons les deux cas.

Ce problème est bidimensionnel, où on va le traiter par la méthode analytique, puis les méthodes numériques et finalement par la méthode des coefficients de forme.

On doit mentionner que dans de nombreux cas les solutions analytiques n'aboutissent pas toujours; en effet, ils sont fastidieux (très lourds et difficiles) à utiliser. Ce qui nous incite à utiliser d'autres méthodes plus avantageuses à l'aboutissement aux solutions à ce type de problèmes, soit-elle numérique ou par la méthode des coefficients de forme.

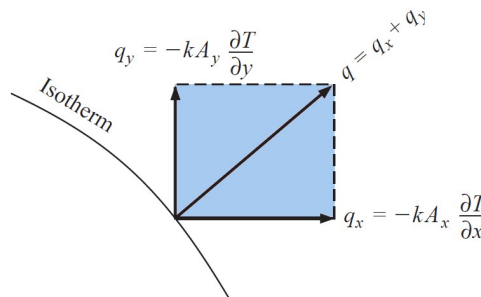


Figure IV. 2 Schéma montrant le flux de la chaleur en deux dimensions

IV.2.1.a Approche analytique

Pour résoudre l'Éq. IV.5, la méthode de séparation des variables est utilisée. Le point essentiel de cette méthode est de supposer que la solution de l'équation différentielle est de la forme d'un produit de deux fonctions indépendantes comme suit :

$$T = X \cdot Y \quad \text{avec:} \quad X = X(x) \quad \text{et} \quad Y = Y(y) \quad (\text{IV.8})$$

Les conditions aux limites sont ensuite appliquées pour déterminer la forme des fonctions X et Y.

L'hypothèse de base donnée par l'Éq. IV. 8 ne peut être vérifiée que s'il est possible de trouver une solution qui respecte cette forme et qui satisfait les conditions aux limites.

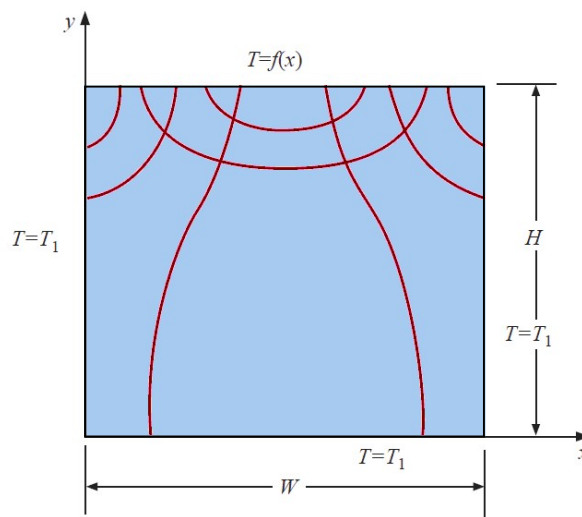


Figure IV. 3 Les lignes isothermes et les lignes du flux de la chaleur dans une plaque rectangulaire

Nous considérons d'abord les conditions aux limites avec une distribution de température sinusoïdale sur le bord supérieur de la plaque. Ainsi :

$$\begin{aligned} T &= T_1 & \text{à } y &= 0 \\ T &= T_1 & \text{à } x &= 0 \\ T &= T_1 & \text{à } x &= W \\ T &= f(x) = T_m \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 & \text{à } y &= H \end{aligned}$$

Où

T_m est l'amplitude de la fonction sinus.

En remplaçons l'Éq. IV.8 dans l'Éq. IV.5:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dx} \left(\frac{dX}{dx} \cdot Y + X \cdot \underbrace{\frac{dY}{dx}}_{=0} \right) &= \frac{d}{dy} \left(\underbrace{\frac{dX}{dy}}_{=0} \cdot Y + X \cdot \frac{dY}{dy} \right) \Leftrightarrow -\frac{d}{dx} \left(\frac{dX}{dx} \cdot Y \right) = \frac{d}{dy} \left(X \cdot \frac{dY}{dy} \right) \quad \text{Avec: } X = X(x) \quad \text{et} \quad Y = Y(y) \\
&\Leftrightarrow - \left(\frac{d^2 X}{dx^2} \cdot Y + \underbrace{\frac{dX}{dx} \frac{dY}{dx}}_{=0} \right) = \left(\underbrace{\frac{dX}{dy} \frac{dY}{dy}}_{=0} + X \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} \right) \\
&\Leftrightarrow -Y \frac{d^2 X}{dx^2} = X \frac{d^2 Y}{dy^2} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \tag{IV.9}
\end{aligned}$$

Observez que chaque côté de l'Éq. IV.9 est indépendant de l'autre parce que x et y sont des variables indépendantes. Ceci exige que chaque côté soit égal à une constante. Nous pouvons ainsi obtenir deux équations différentielles ordinaires en fonction de cette constante,

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2, \quad \text{avec } \lambda = \text{cte}$$

Où :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 \cdot X = 0 \tag{IV.11}$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 \cdot Y = 0 \tag{IV.12}$$

Où λ^2 est appelée la constante de séparation. Sa valeur doit être déterminée à partir des conditions aux limites. Notez que la forme de la solution aux équations (IV.11) et (IV.12) dépendra du signe de λ^2 ; une forme différente résulterait également si λ^2 était nul. La seule façon de déterminer la forme correcte consiste à appliquer les conditions aux limites du problème. Nous allons donc d'abord noter toutes les solutions possibles, puis voir laquelle correspond au problème considéré.

➤ **Pour $\lambda^2 = 0$:**

$$X = C_1 + C_2 x \tag{IV.13}$$

$$Y = C_3 + C_4 y$$

$$(IV.8) \Leftrightarrow T = (C_1 + C_2 x)(C_3 + C_4 y)$$

Cette fonction n'est pas appropriée (adaptée) pour satisfaire la condition aux limites de la fonction sinus, de sorte que la solution $\lambda^2 = 0$, cette solution est exclue.

➤ Pour $\lambda^2 < 0$:

$$X = C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x}$$

$$Y = C_7 \cos(\lambda y) + C_8 \sin(\lambda y) \quad (IV.14)$$

$$(IV.8) \Leftrightarrow T = (C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x})(C_7 \cos(\lambda y) + C_8 \sin(\lambda y))$$

Encore une fois, la condition limite de la fonction sinus ne peut pas être satisfaite, donc cette solution est également exclue.

➤ Pour $\lambda^2 > 0$:

La solution générale de l'Éq. IV.11 est :

$$X = C_9 \cos(\lambda x) + C_{10} \sin(\lambda x)$$

et la solution générale de l'Éq. IV.12 est :

$$Y = C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}$$

$$(IV.8) \Leftrightarrow T = X \cdot Y = (C_9 \cos(\lambda x) + C_{10} \sin(\lambda x))(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \quad (IV.15)$$

Maintenant, nous essaierons de satisfaire les conditions aux limites (fonction trigonométrique sinus ainsi que les autres conditions). L'équation différentielle et la solution conservent alors la même forme suite au changement de variable (θ), et il suffit de l'appliquer aussi aux conditions aux limites (la manipulation des équations est plus au moins facile lorsque le changement de variable est effectué). Ainsi,

$$\theta = T - T_1$$

$$\theta = 0 \quad \text{à } y = 0 \quad (IV.16)$$

$$\theta = 0 \quad \text{à } x = 0$$

$$\theta = 0 \quad \text{à } x = W$$

$$\theta = T_m \sin \frac{\pi x}{W} \quad \text{à } y = H$$

En appliquant ces conditions (conditions aux limites), nous avons :

$$\blacksquare \quad \theta = 0 \quad \text{à } y = 0 : (IV.15) \Leftrightarrow 0 = (C_9 \cos(\lambda x) + C_{10} \sin(\lambda x))(C_{11} + C_{12}) \quad (IV.17.a)$$

$$\blacksquare \quad \theta = 0 \quad \text{à } x = 0 : (IV.15) \Leftrightarrow 0 = C_9 (C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \quad (IV.17.b)$$

$$\blacksquare \quad \theta = 0 \quad \text{à } x = W : (IV.15) \Leftrightarrow 0 = (C_9 \cos(\lambda W) + C_{10} \sin(\lambda W))(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \quad (IV.17.c)$$

$$\blacksquare \quad \theta = T_m \sin \frac{\pi x}{W} \quad \text{à } y = H : (IV.15) \Leftrightarrow T = (C_9 \cos(\lambda x) + C_{10} \sin(\lambda x))(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \quad (IV.17.d)$$

Par conséquent,

$$(IV.17.a) \Leftrightarrow C_{11} = -C_{12}$$

$$(IV.17.b) \Leftrightarrow C_9 = 0$$

$$(IV.17.c) \Leftrightarrow 0 = C_{10} \sin(\lambda W) (-C_{12}e^{-\lambda y} + C_{12}e^{\lambda y}) = C_{10} \sin(\lambda W) \overbrace{(C_{12}e^{\lambda y} - C_{12}e^{-\lambda y})}^{=2 \cdot C_{12} \sinh(\lambda y)} \quad (IV.18)$$

$$(IV.17.c) \Leftrightarrow 0 = 2 \cdot C_{10} C_{12} \sin(\lambda W) \sinh(\lambda y), \quad \left[\lambda W = n\pi \Leftrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{W}, n=1, 2, 3, \text{etc.} \right]$$

Pour satisfaire cette condition, $\sin(\lambda W)$ doit être nul ($\sin(\lambda W)=0$) où $\lambda=n\pi/W$, où $n=1, 2, 3, \text{etc.}$

Il existe donc une solution différente pour chaque n entier, et chaque solution a une constante d'intégration séparée C_n , λ est une constante de séparation indéterminée. En additionnant ces solutions, nous obtenons (*plusieurs valeurs satisfèront l'Éq. IV.18*):

$$\theta = T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi y}{W} \quad (IV.19.a)$$

En convertissant les termes exponentiels en fonction hyperbolique et en combinant les constantes, de la dernière condition limite on a:

$$T_m \sin \frac{\pi x}{W} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi H}{W} \quad (IV.20.a)$$

Ce qui suscite que $C_n = 0$ pour $n > 1$.

$$\text{de l'Éq. IV.19 on a : } T = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi y}{W} + T_1 \quad (IV.19.b)$$

$$\text{de l'Éq. IV.20 on a : } \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} = \frac{T_m \sin \frac{\pi x}{W}}{\sinh \frac{n\pi H}{W}} \quad (IV.20.b)$$

l'Éq. IV.20.b dans l'Éq. IV.19.b, la solution finale est donc :

$$T = T_m \frac{\sinh(\pi y/W)}{\sinh(\pi H/W)} \sin\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \quad (IV.21)$$

Le champ de température pour ce problème est illustré à la Fig. IV. 3. Notez que **les lignes d'écoulement de la chaleur sont perpendiculaires aux isothermes**.

Maintenant nous considérons la condition aux limites suivante :

$$\begin{aligned} T &= T_1 & \text{à } y=0 \\ T &= T_1 & \text{à } x=0 \\ T &= T_1 & \text{à } x=W \\ T &= T_2 & \text{à } y=H \end{aligned}$$

En utilisant la première condition aux limites, de l'Éq. IV.19 on a :

$$T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi y}{W} \quad (IV.22)$$

En appliquant la quatrième condition aux limites

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi H}{W} \quad (IV.23)$$

L'éq. IV.23 est une série de sinus de Fourier, et les valeurs de C_n peuvent être déterminées en augmentant la différence de la température $T_2 - T_1$ dans une série de Fourier sur l'intervalle $0 < x < W$. Cette série est :

$$T_2 - T_1 = (T_2 - T_1) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n \pi x}{W} \quad (\text{IV.24})$$

En comparant l'Éq. IV.23 avec l'Éq. IV.24, nous constatons que :

$$C_n = \frac{2}{\pi} (T_2 - T_1) \frac{1}{\sinh(n \pi H / W)} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \quad (\text{IV.25})$$

$$\text{de l'Éq. IV.23 on a : } \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n \pi x}{W} = \frac{T_2 - T_1}{\sinh \frac{n \pi H}{W}} \quad (\text{IV.26})$$

$$\text{de l'Éq. IV.24 dans l'Éq. IV.26 on a : } \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n \pi x}{W} = \frac{(T_2 - T_1) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n \pi x}{W}}{\sinh \frac{n \pi H}{W}} \quad (\text{IV.27})$$

$$\text{de l'Éq. IV.27 dans l'Éq. IV.22 on a : } T - T_1 = \frac{(T_2 - T_1) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n \pi x}{W}}{\sinh \frac{n \pi H}{W}} \sinh \frac{n \pi y}{W} \quad (\text{IV.28})$$

La solution finale s'exprime :

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n \pi x}{W} \frac{\sinh(n \pi y / W)}{\sinh(n \pi H / W)} \quad (\text{IV.29})$$

Une étude approfondie des techniques analytiques utilisées dans le transfert de la chaleur par conduction nécessite des connaissances concernant la théorie des fonctions orthogonales. Les séries de Fourier sont un exemple de fonctions orthogonales, tout comme les fonctions de Bessel et d'autres fonctions spéciales applicables à différentes géométries et conditions aux limites.

Exercice N°. 1

Un rectangle bidimensionnel plan comme indiqué sur la figure :

- 1- trouver la relation donnant la répartition de la température dans la plaque.
- 2- déterminer la température au milieu de la plaque (prendre les cinq premiers termes non nuls de la série).

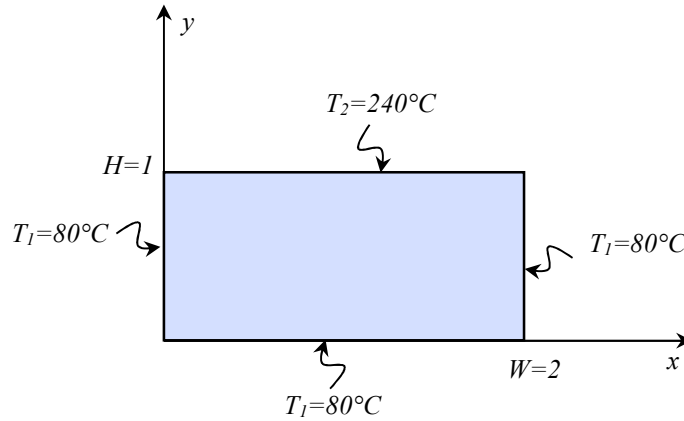


Figure IV. 4 Rectangle bidimensionnel

Solution de l'exercice N°. 1

1) de l'Éq. IV.29 on a :

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n \pi x}{W} \frac{\sinh(n \pi y / W)}{\sinh(n \pi H / W)} \Leftrightarrow T(x, y) = T_1 + \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n \pi x}{W} \frac{\sinh(n \pi y / W)}{\sinh(n \pi H / W)} \right) (T_2 - T_1)$$

2)

On a:

$$H=1, W=2, x=2/2=1 \text{ et } y=1/2=0.5$$

$$T(x=1, y=0.5) = T_1 + \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n \pi x}{W} \frac{\sinh(n \pi y / W)}{\sinh(n \pi H / W)} \right) (T_2 - T_1)$$

$$T(x=1, y=0.5) = T_1 + \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{\frac{(-1)^{(1)+1} + 1}{1}}_{=2} \sin \underbrace{\frac{(1) \pi (1)}{2}}_{=\pi/2} \frac{\sinh(\underbrace{(1) \pi (0.5)/(2)}_{=\pi/4})}{\sinh(\underbrace{(1) \pi (1)/(2)}_{=\pi/2})} + \underbrace{\frac{(-1)^{(2)+1} + 1}{2}}_{=0} \sin \underbrace{\frac{(2) \pi (1)}{2}}_{=\pi} \frac{\sinh(\underbrace{(2) \pi (0.5)/(2)}_{=-\pi/2})}{\sinh(\underbrace{(2) \pi (1)/(2)}_{=\pi})} + \right.$$

$$\left. \underbrace{\frac{(-1)^{(3)+1} + 1}{3}}_{=-2/3} \sin \underbrace{\frac{(3) \pi (1)}{2}}_{=3\pi/2} \frac{\sinh(\underbrace{(3) \pi (0.5)/(2)}_{=3\pi/4})}{\sinh(\underbrace{(3) \pi (1)/(2)}_{=3\pi/2})} + \underbrace{\frac{(-1)^{(4)+1} + 1}{4}}_{=0} \sin \underbrace{\frac{(4) \pi (1)}{2}}_{=2\pi} \frac{\sinh(\underbrace{(4) \pi (0.5)/(2)}_{=\pi})}{\sinh(\underbrace{(4) \pi (1)/(2)}_{=2\pi})} + \right.$$

$$\left. \underbrace{\frac{(-1)^{(5)+1} + 1}{5}}_{=-2/5} \sin \underbrace{\frac{(5) \pi (1)}{2}}_{=5\pi/2} \frac{\sinh(\underbrace{(5) \pi (0.5)/(2)}_{=5\pi/4})}{\sinh(\underbrace{(5) \pi (1)/(2)}_{=5\pi/2})} + \underbrace{\frac{(-1)^{(6)+1} + 1}{6}}_{=0} \sin \underbrace{\frac{(6) \pi (1)}{2}}_{=3\pi} \frac{\sinh(\underbrace{(6) \pi (0.5)/(2)}_{=3\pi/2})}{\sinh(\underbrace{(6) \pi (1)/(2)}_{=3\pi})} + \right.$$

$$\left. \underbrace{\frac{(-1)^{(7)+1} + 1}{7}}_{=-2/7} \sin \underbrace{\frac{(7) \pi (1)}{2}}_{=7\pi/2} \frac{\sinh(\underbrace{(7) \pi (0.5)/(2)}_{=7\pi/4})}{\sinh(\underbrace{(7) \pi (1)/(2)}_{=7\pi/2})} + \underbrace{\frac{(-1)^{(8)+1} + 1}{8}}_{=0} \sin \underbrace{\frac{(8) \pi (1)}{2}}_{=4\pi} \frac{\sinh(\underbrace{(8) \pi (0.5)/(2)}_{=2\pi})}{\sinh(\underbrace{(8) \pi (1)/(2)}_{=4\pi})} + \right.$$

$$\left. \underbrace{\frac{(-1)^{(9)+1} + 1}{9}}_{=-2/9} \sin \underbrace{\frac{(9) \pi (1)}{2}}_{=9\pi/2} \frac{\sinh(\underbrace{(9) \pi (0.5)/(2)}_{=9\pi/4})}{\sinh(\underbrace{(9) \pi (1)/(2)}_{=9\pi/2})} \right) (T_2 - T_1)$$

$$T(x=1, y=0.5) = T_1 + \frac{2}{\pi} \left(2 \sin \frac{\pi}{2} \frac{\sinh(\pi/4)}{\sinh(\pi/2)} + \frac{3}{2} \sin \frac{3\pi}{2} \frac{\sinh(3\pi/4)}{\sinh(3\pi/2)} + \frac{2}{5} \sin \frac{5\pi}{2} \frac{\sinh(5\pi/4)}{\sinh(5\pi/2)} + \frac{2}{7} \sin \frac{7\pi}{2} \frac{\sinh(7\pi/4)}{\sinh(7\pi/2)} + \frac{2}{9} \sin \frac{9\pi}{2} \frac{\sinh(9\pi/4)}{\sinh(9\pi/2)} \right) (T_2 - T_1)$$

$$T(x=1, y=0.5) = 80 + \frac{2}{\pi} \left(2 \sin \frac{\pi}{2} \frac{\sinh(\pi/4)}{\sinh(\pi/2)} + \frac{3}{2} \sin \frac{3\pi}{2} \frac{\sinh(3\pi/4)}{\sinh(3\pi/2)} + \frac{2}{5} \sin \frac{5\pi}{2} \frac{\sinh(5\pi/4)}{\sinh(5\pi/2)} + \frac{2}{7} \sin \frac{7\pi}{2} \frac{\sinh(7\pi/4)}{\sinh(7\pi/2)} + \frac{2}{9} \sin \frac{9\pi}{2} \frac{\sinh(9\pi/4)}{\sinh(9\pi/2)} \right) (240 - 80)$$

$$T(x=1, y=0.5) = 80 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{0.7549 - 0.0626 + 0.0079 - 0.00117 + 0.000189}{0.69921} \right) (240 - 80)$$

$$= 80 + 0.0445 (240 - 80)$$

$$= 151.2^\circ\text{C}$$

IV.2.1.b Approche numérique

Un grand nombre de solutions analytiques pour les problèmes de transfert de la chaleur par conduction ont été accumulées dans la littérature au cours des 150 dernières années. Néanmoins, on est confronté à de nombreuses situations pratiques très complexes, liées à la géométrie ou aux conditions aux limites ce qui ne permet pas l'obtention de solutions analytiques ; si la solution existe, elle est si fastidieuse et complexe à obtenir, que l'évaluation numérique devient extrêmement difficile. Pour de telles situations, l'approche la plus fructueuse de ce type de problème est basé sur des techniques de différences finies, dont les principes de base seront illustrés.

Considérons un corps bidimensionnel (plan sur lequel on a appliqué un maillage de pas Δx et Δy) qui doit être divisé en incréments égaux dans les directions x et y , comme illustré sur la Fig. IV. 5. Les points nodaux sont désignés comme indiqué, les i et j indiquent respectivement l'incrément sur l'axe x et y . Nous souhaitons établir les températures à l'un de ces points nodaux dans le corps, en utilisant l'Éq. IV.5 comme une condition principale. Les différences finies sont utilisées pour approcher les incréments différentiels des coordonnées de la température; et plus nous augmentant ces incréments finis, plus la distribution de température réelle sera proche.

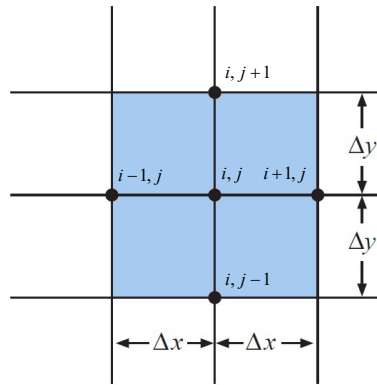


Figure IV. 5 Le schéma utilisé dans l'analyse numérique bidimensionnelle de la conduction thermique.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} ; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (\text{IV.30})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} ; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (\text{IV.31})$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} = \frac{\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} - \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{IV.32})$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} = \frac{\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} - \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y}}{\Delta y} = \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{(\Delta y)^2}$$

Ainsi, l'approximation des différences finies pour l'Éq. IV.5 devient

$$\frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (\text{IV.33})$$

Si $\Delta x = \Delta y$, on a :

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \quad (\text{IV.34})$$

Tous les flux thermiques peuvent être exprimés en termes différentiels de la température dans le cas de la conductivité thermique constante. L'Éq. IV.34 indique que le flux de la chaleur net dans un nœud est nul à l'équilibre. En effet, l'approche numérique des différences finies remplace la distribution continue de la température par des tiges (mailles) conductrices thermiques fictives connectées entre eux par des points nodaux qui ne génèrent pas de la chaleur. Nous pouvons également exprimer un système d'équations de différences finies pour prendre en compte la génération de la chaleur. Simplement en ajoutons le terme $\dot{q}/k$ dans l'équation générale on obtiens :

$$\frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{(\Delta y)^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Si $\Delta x = \Delta y$, on a :

$$k(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j}) + \dot{q}(\Delta x)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} + \frac{\dot{q}}{k}(\Delta x)^2 = 0 \quad (\text{IV.35})$$

En utilisant la méthode numérique, l'Éq. IV.34 doit être écrite pour chaque nœud du matériau et le système résultant génère des équations qui doivent être résolues pour les températures aux différents nœuds. Ce qu'on va expliquer (illustrer) par l'exemple suivant.

Exemple 1

Un exemple très simple est montré dans la Fig. IV. 6, et les quatre équations pour les nœuds, (2, 3), (3, 3) (2, 2) et (3, 2) seraient :

$$T_{i,j} = (T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})/4$$

$$\begin{cases} T_{3,3} + T_{1,3} + T_{2,4} + T_{2,2} - 4T_{2,3} = 0 \\ T_{4,3} + T_{2,3} + T_{3,4} + T_{3,2} - 4T_{3,3} = 0 \\ T_{3,2} + T_{1,2} + T_{2,3} + T_{2,1} - 4T_{2,2} = 0 \\ T_{4,2} + T_{2,2} + T_{3,3} + T_{3,1} - 4T_{3,2} = 0 \end{cases}$$

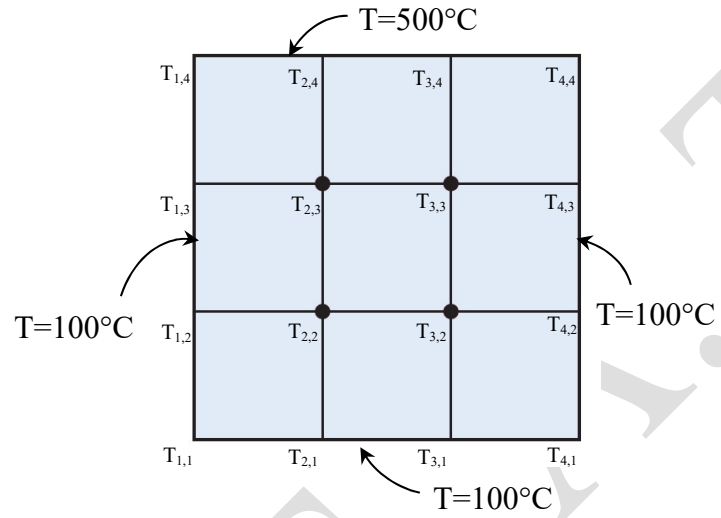


Figure IV. 6 schémas (maillage) du problème de quatre nœuds

D'où :

$$\begin{cases} T_{3,3} + 100 + 500 + T_{2,2} - 4 \cdot T_{2,3} = 0 \\ 100 + T_{2,3} + 500 + T_{3,2} - 4 \cdot T_{3,3} = 0 \\ T_{3,2} + 100 + T_{2,3} + 100 - 4 \cdot T_{2,2} = 0 \\ 100 + T_{2,2} + T_{3,3} + 100 - 4 \cdot T_{3,2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \cdot T_{2,3} + T_{3,3} + T_{2,2} + 0 \cdot T_{3,2} = -600 \\ T_{2,3} - 4 \cdot T_{3,3} + 0 \cdot T_{2,2} + T_{3,2} = -600 \\ T_{2,3} + 0 \cdot T_{3,3} - 4 \cdot T_{2,2} + T_{3,2} = -200 \\ 0 \cdot T_{2,3} + T_{3,3} + T_{2,2} - 4 \cdot T_{3,2} = -200 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -600 \\ -600 \\ -200 \\ -200 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 250 \\ 150 \\ 150 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} T_{2,3} = T_{3,3} = 250^\circ\text{C} \\ T_{2,2} = T_{3,2} = 150^\circ\text{C} \end{cases}$$

Une fois les températures déterminées, le flux de la chaleur peut être calculé à partir de

$$q = \sum k \Delta x \frac{\Delta T}{\Delta y} = \sum k \Delta T \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (\text{IV.36})$$

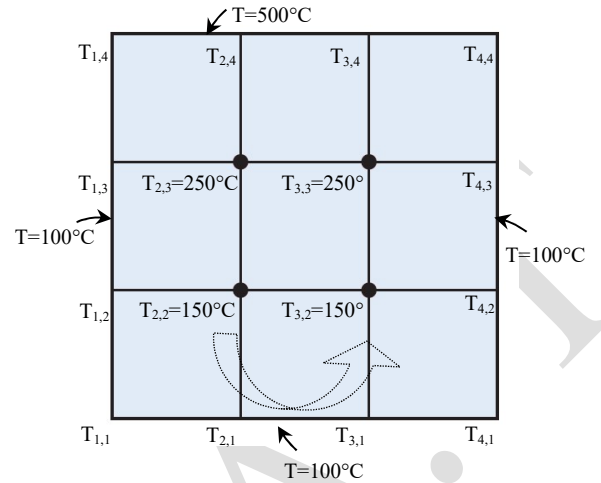
Où ΔT est pris aux limites. Dans l'exemple, le flux de la chaleur peut être calculé soit à la face à 500°C , soit aux trois faces à 100°C . Si une grille (maillage) suffisamment fine est utilisée, les deux valeurs devraient être à peu près les mêmes. En général, il est généralement préférable de prendre la moyenne arithmétique des deux valeurs pour les calculs. Dans l'exemple, les deux calculs donnent:

La face à 500 °C:

$$q = -k \frac{\Delta x}{\Delta y} ((250 - 500) + (250 - 500)) = k \cdot 500$$

La face à 100 °C:

$$q = -k \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(\begin{array}{l} (250 - 100) + (150 - 100) + \\ (150 - 100) + (150 - 100) + \\ (150 - 100) + (250 - 100) \end{array} \right) = -k \cdot 500$$



Selon la méthode Gauss-Seidel, on peut arrêter la résolution si le critère de convergence est satisfait (le critère de convergence dépend de la méthode utilisée à résoudre le système d'équations): $|T_i^{(p)} - T_i^{(p-1)}| \leq \varepsilon$

Lorsque le solide est exposé à certaines conditions aux limites (de convection), les températures à la surface doivent être calculées différemment de la méthode donnée ci-dessus. Considérez la limite illustrée à la Fig. IV. 7. Le bilan énergétique sur le noeud (i, j) est :

$$k \Delta y \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} - k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y} - k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} = h \Delta y (T_{i,j} - T_{\infty})$$

Si $\Delta x = \Delta y$, la température aux limites est exprimée par l'équation :

$$T_{i,j} \left(\frac{h \Delta x}{k} + 2 \right) - \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} - \frac{1}{2} (2 T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) = 0 \quad (\text{IV.37})$$

Quand on est confronté à la convection aux frontières l'Éq. IV.37 est utilisée, on l'écrit pour chaque nœud le long de la surface, comme illustré sur la Fig. IV. 7.

On utilise l'Éq. IV.34 pour les points intérieurs et l'Éq. IV.37 dans le cas des surfaces planes exposées à la convection (condition aux limites). Elle n'est pas applicable pour les autres cas, tels qu'un mur isolé ou un coin exposé à une condition limite de convection. Considérons la section d'angle illustrée à la Fig. IV. 8. Le bilan énergétique de la section d'angle est :

$$-k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} - k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} = h \frac{\Delta x}{2} (T_{i,j} - T_{\infty}) + h \frac{\Delta y}{2} (T_{i,j} - T_{\infty})$$

Si $\Delta x = \Delta y$,

$$2T_{i,j} \left(\frac{h \Delta x}{k} + 1 \right) - 2 \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} - (T_{i-1,j} - T_{i,j-1}) = 0 \quad (\text{IV.38})$$

D'autres conditions aux limites peuvent être traitées de la même manière, et un résumé pratique des équations nodales est donné dans le Tableau IV. 1 pour différentes situations géométriques et limites. Les situations *f* et *g* sont d'un intérêt particulier, car elles fournissent les équations de calcul qui peuvent être employées avec des limites courbées (incurvées), tout en utilisant toujours des incréments uniformes en Δx et Δy .

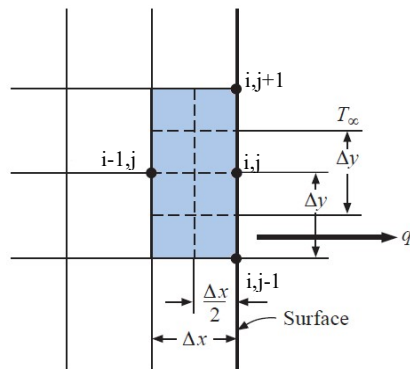


Figure IV. 7 Schémas de l'équation nodale avec convection (méthodes implicites).

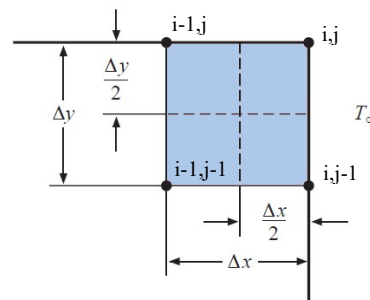
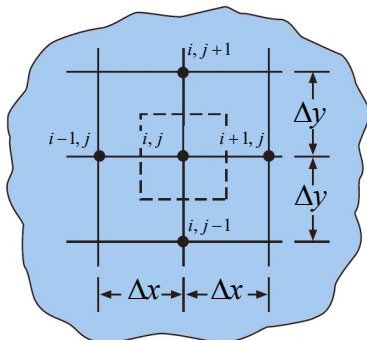


Figure IV. 8 Schémas de l'équation nodale avec convection coin (angle)

Tableau IV. 1 Formules nodales pour les calculs de différences finies.

Situation physique	Equation nodale pour des incréments identiques dans la direction x et y (La deuxième équation est dans la forme de l'itération de Gauss-Seidel)
(a) Nœud interne	

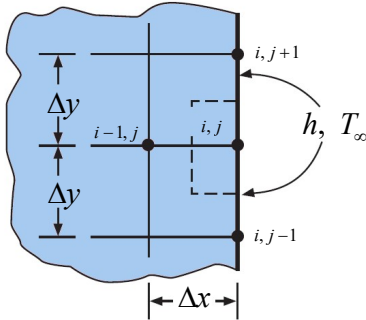


(Les lignes pointillées indiquent le volume de l'élément) La limite de convection peut être convertie en surface isolée en réglant $h = 0$ ($Bi = 0$).

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

$$T_{i,j} = (T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) / 4$$

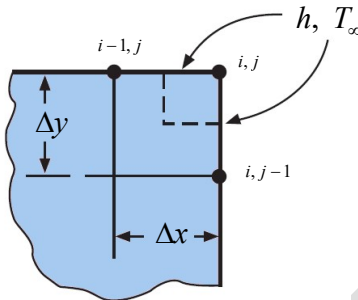
Tableau IV. 1 (suite)

(b) Nœuds à une frontière (limite, Extrémité) exposée à la convection

$$\frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} + \frac{1}{2} (2T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - \left(\frac{h \Delta x}{k} + 2 \right) T_{i,j} = 0$$

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + (T_{i,j+1} + T_{i,j-1})/2 + Bi T_{\infty}}{2 + Bi}$$

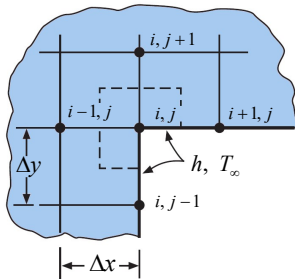
$$Bi = \frac{h \Delta x}{k}$$

(c) Angle (coin) extérieur exposé à la contrainte de convection

$$2 \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} + (T_{i-1,j} + T_{i,j-1}) - 2 \left(\frac{h \Delta x}{k} + 1 \right) T_{i,j} = 0$$

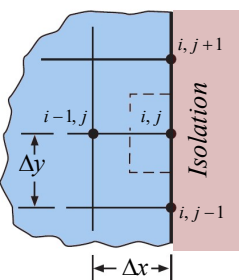
$$T_{i,j} = \frac{(T_{i-1,j} + T_{i,j-1})/2 + Bi \cdot T_{\infty}}{1 + Bi}$$

$$Bi = \frac{h \Delta x}{k}$$

(d) Coin (angle) intérieur avec limite de convection

$$2 \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} + 2(T_{i-1,j} + T_{i,j+1}) + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} - 2 \left(3 + \frac{h \Delta x}{k} \right) T_{i,j} = 0$$

$$T_{i,j} = \frac{Bi \cdot T_{\infty} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + (T_{i+1,j} + T_{i,j-1})/2}{3 + Bi}$$

(e) Extrémité (bord) isoler

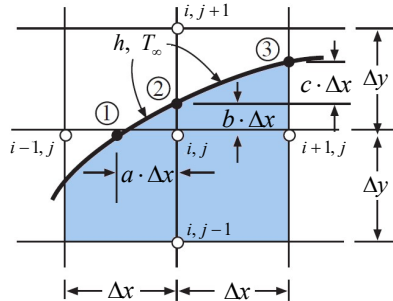
$$T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + 2T_{i-1,j} - 4T_{i,j} = 0$$

$$T_{i,j} = (T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + 2T_{i-1,j})/4$$

Tableau IV. 1 (suite)

(f) Noeuds à l'intérieur de la courbe délimitant la frontière

Cette équation est obtenue en multipliant la résistance par $4 / (a + 1) (b + 1)$



$$\frac{2}{b(b+1)}T_2 + \frac{2}{a+1}T_{i+1,j} + \frac{2}{b+1}T_{i,j-1} + \frac{2}{a(a+1)}T_1 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)T_{i,j} = 0$$

(g) Noeud à la frontière avec convection le long**de la courbe délimitante- Nœud (2) du cas (f)**

Cette relation est obtenue en divisant la formulation de la résistance par 2.

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}T_1 + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}}T_3 + \frac{a+1}{b}T_{i,j} + \frac{h \cdot \Delta x}{k}(\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2})T_\infty - \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{a+1}{b} + (\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2})\frac{h \cdot \Delta x}{k}\right)T_2 = 0$$

IV.2.1.c Méthode du coefficient (facteur) de forme de conduction

Dans un système bidimensionnel où seules deux limites de température sont impliquées, on peut définir un facteur de forme de conduction S tel que :

$$q = k \cdot S \cdot \Delta T_{\text{total (global)}} = k \cdot S \cdot (T_1 - T_2) \quad (\text{IV.39})$$

Où :

k : Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces A₁ et A₂ [$W m^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$]

S : facteurs de forme [m]

T₁ : Température de la surface A₁

T₂ : Température de la surface A₂

Les valeurs des facteurs de forme S sont développées dans différents cas de géométries. Le **Tableau IV. 2** représente un résumé de quelques valeurs des facteurs de forme pour quelques géométries.

Les facteurs de forme pour un mur (tridimensionnel comme dans un four), utilisés sont distincts pour calculer le flux de la chaleur à travers les sections des bords et des coins (d'angles), selon les dimensions indiquées sur la Fig. IV. 9, et lorsque toutes les dimensions intérieures sont supérieures au cinquième de l'épaisseur de la paroi on a :

$$S_{\text{paroi}} = \frac{A}{L} \quad S_{\text{bord}} = 0.54 D \quad S_{\text{coin}} = 0.15 L \quad 37(\text{IV.40})$$

Où,

S : facteurs de forme

A = la section du mur

L = épaisseur de la paroi

D = longueur du bord

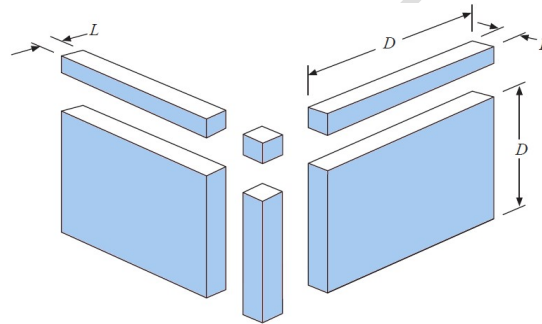


Figure IV. 9 Schémas illustrant les dimensions à utiliser pour le calcul du facteur de forme en trois dimensions

Le flux de la chaleur traversant l'enceinte s'écrit alors :

$$S = \sum_{i=1}^6 S_{\text{paroi}} + \sum_{i=1}^{12} S_{\text{bord}} + \sum_{i=1}^8 S_{\text{coini}} \quad 38(\text{IV.41})$$

$$q = k \cdot S \cdot \Delta T$$

Exercice N°. 2 (Tuyau enterré)

Un tuyau horizontal de diamètre 15 cm et de longueur 4 m, est enfoui (enterré) dans la terre à une profondeur de 20 cm. La température de la paroi du tuyau est de 75 °C et la température de la surface de la terre est de 5 °C. En supposant que la conductivité thermique de la terre est de 0,8 W/ m · °C, calculez la chaleur perdue par le tuyau.

Solution de l'exercice N°. 2

Nous pouvons calculer le facteur de forme pour cette situation en utilisant l'équation donnée dans le **Tableau IV. 2**. À partir de ($D < 3r$) où :

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(D/r)} = \frac{2\pi(4)}{\cosh^{-1}(20/7.5)} = 15.35m$$

Le flux de la chaleur est calculé à partir de $D < 3r$,

$$q = k \cdot S \cdot \Delta T = (0.8)(15.35)(75 - 5) = 859.6 W \quad [2933 Btu / h]$$

Exercice N°. 3 (Four cubique)

Un petit four cubique de 50 par 50 par 50 cm est construit en brique réfractaire à l'intérieur

[$k = 1,04 W / m \cdot ^\circ C$] avec une épaisseur de paroi de 10 cm. L'intérieur du four est maintenu à $500^\circ C$ et l'extérieur est maintenu à $50^\circ C$., calculez la chaleur perdue à travers les murs.

Solution de l'exercice N°. 3

Nous calculons le facteur de forme total en ajoutant les facteurs de forme pour les murs, les arêtes et les coins:

- Des murs: $S = \frac{A}{L} = \frac{(0.5)(0.5)}{0.1} = 2.5m$
- Bords: $S = 0.54D = (0.54)(0.5) = 0.27m$
- Coins: $S = 0.15L = (0.15)(0.1) = 0.015m$

Il y a six sections de mur, douze bords et huit coins, de sorte que le facteur de forme total est

$$S = (6)(2.5) + (12)(0.27) + (8)(0.015) = 18.36m$$

Le flux de la chaleur est calculé comme suit :

$$q = k \cdot S \cdot \Delta T = (1.04)(18.36)(500 - 50) = 8.892 kW \quad [29.320 Btu / h]$$

Tableau IV. 2 Coefficients de forme de conduction

Remarque: la différence de température pour les objets enterrés est : $\Delta T = T_{\text{objet}} - T_{\text{champ distant}}$, où la température du champ distant est la même que la température de la surface isotherme pour les milieux semi-infinis.

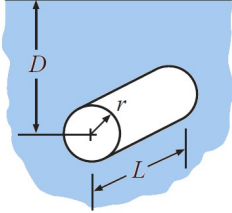
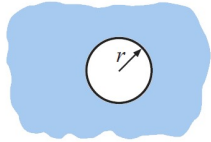
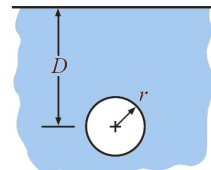
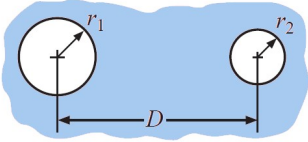
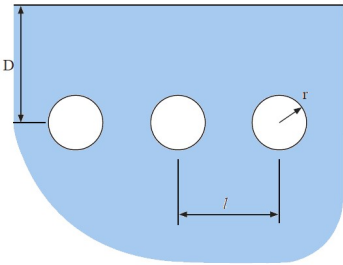
Système physique	Schéma physique	Coefficient de forme	Restrictions
Cylindre isotherme de rayon r enterré dans un milieu semi-infini avec surface isotherme	Isotherme 	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(D/r)}$ $\frac{2\pi L}{\ln(D/r)}$	$L \gg r$ $L \gg r$ $D > 3r$
Sphère isotherme de rayon enterré dans un milieu infini		$4\pi r$	
Sphère isotherme de rayon enterré dans un milieu semi-infini ayant une surface isotherme $\Delta T = T_{\text{surf}} - T_{\text{champ éloigné}}$	Isotherme 	$\frac{4\pi r}{1 - r/2D}$	
Conduction entre deux cylindres isothermes de longueur L enterrés dans un milieu infini		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}\right)}$	$L \gg r$ $L \gg D$
Rangée de cylindres horizontaux de longueur L dans un milieu semi-infini moyen avec isotherme surface	Isotherme 	$\frac{2\pi L}{\ln\left(\left(\frac{1}{\pi r}\right) \sinh(2\pi D/l)\right)}$	$D > 2r$

Tableau IV. 2 (suite)

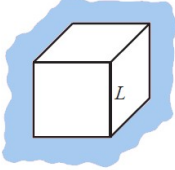
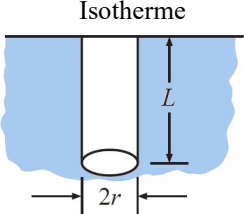
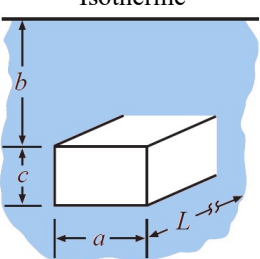
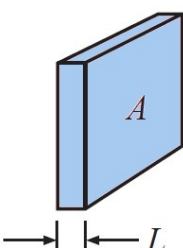
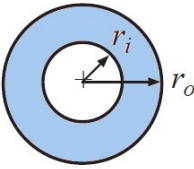
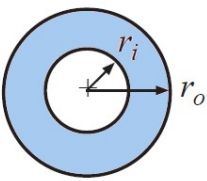
Système physique	Schéma physique	Coefficient de forme	Restrictions
Cube enterré dans un milieu infini (profond), d'un côté L		$8.24L$	
Cylindre isotherme du rayon r placé dans un milieu semi-infini comme montré		$\frac{2\pi L}{\ln(2L/r)}$	$L \gg 2r$
Isothermique rectangulaire parallélépipède enfoui dans un milieu semi-infini ayant surface isotherme		$1.68L \left[\log \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right]^{-0.59} \left(\frac{b}{c} \right)^{-0.6}$	
Paroi plane		$\frac{A}{L}$	Flux de la chaleur à une dimension
Cylindre creux, longueur L		$\frac{2\pi L}{\ln(r_o/r_i)}$	$L \gg r$
Sphère creuse		$\frac{4\pi r_o r_i}{\ln(r_o/r_i)}$	

Tableau IV. 2 (suite)

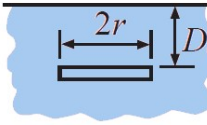
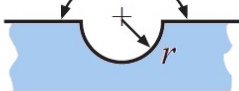
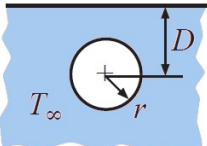
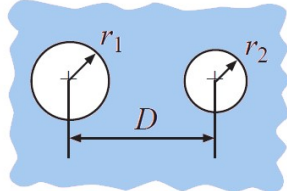
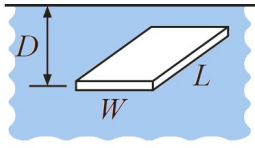
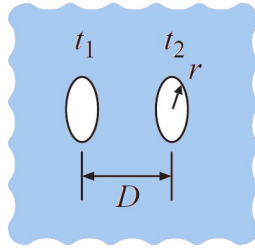
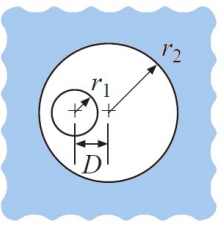
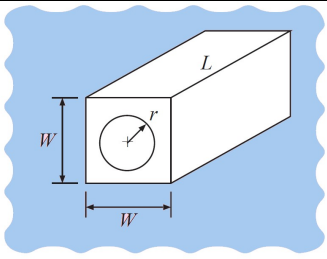
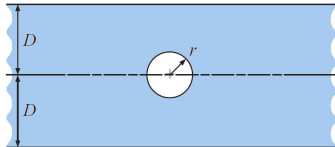
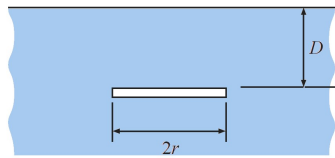
Système physique	Schéma physique	Coefficient de forme	Restrictions
Disque horizontal mince enterré dans un milieu semi-infini avec surface isotherme	Isotherme 	$4r$ $8r$ $\frac{4\pi r}{\pi/2 - \tan^{-1}(r/2D)}$	$D = 0$ $D \gg 2r$ $\tan^{-1}(r/2D)$ en radians
Hémisphère enfoui dans un milieu semi-infini $\Delta T = T_{\text{sphère}} - T_{\text{champ éloigné}}$	Isotherme 	$2\pi r$	
Sphère isotherme enfouie dans un milieu semi-infini avec surface isolée	Isolé 	$\frac{4\pi r}{1 + r/2D}$	
Deux sphères isothermes enterrés dans un milieu infini		$\frac{4\pi r_2}{\frac{r_2}{r_1} \left(1 - \frac{(r_1/D)^4}{1 - (r_2/D)^2} \right) - \frac{2r_2}{D}}$	$D > 5r_{\text{max}}$
Plaque rectangulaire mince de longueur L, enfoui dans un milieu semi-infini ayant une surface isotherme	Isotherme 	$\frac{\pi W}{\ln(4W/L)}$ $\frac{2\pi W}{\ln(4W/L)}$ $\frac{2\pi W}{\ln(2\pi D/L)}$	$D = 0$ $W > L$ $D \gg W$ $W > L$ $W \gg L$ $D > 2W$
Des disques parallèles enfouis dans un milieu infini		$\frac{4\pi r}{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(r/D)}$	$D > 5r$ $\tan^{-1}(r/D)$ en radians

Tableau IV. 2 (suite)

Système physique	Schéma physique	Coefficient de forme	Restrictions
Cylindre excentriques de longueur L		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - D^2}{2r_1 r_2}\right)}$	$L \gg r_2$
Cylindre centré dans un carré de longueur L		$\frac{2\pi L}{\ln(0.54 W / r)}$	$L \gg W$
Cylindre horizontal de longueur L centré dans une plaque infinie	Isotherme  Isotherme	$\frac{2\pi L}{\ln(4D / r)}$	
Disque horizontal mince enfoui dans un milieu semi-infini avec surface adiabatique $\Delta T = T_{\text{disk}} - T_{\text{champ éloigné}}$	Isolé 	$\frac{4\pi r}{\pi / 2 - \tan^{-1}(r / 2D)}$	$D / 2r > 1$ $\tan^{-1}(r / 2D)$ en radians