

Chapitre III

Transfert de la chaleur par surfaces étendues (Extensions par ailettes et aiguilles)

III.1 Introduction

Dans différents domaines, nous sommes amenés à analyser des systèmes de transfert thermique combinés (conduction/convection). Le transfert thermique dans un corps est soit absorbé (reçu) ou dissipé (évacué) par le processus de convection, tel que la chaleur perdue par conduction à travers la paroi d'un four, dissipée vers le milieu environnant par convection. Dans certain cas on est appelé à augmenter cette dissipation par les surfaces étendues (Extensions par des ailettes et des aiguilles). Dans le cas des échangeurs de la chaleur, on peut utiliser un tube à ailettes pour éliminer la chaleur du liquide chaud, ce transfert de la chaleur vers le milieu extérieur s'effectue aussi par convection.

III.2 Ailettes de section transversale uniforme

Considérons une barre de section constante unidimensionnelle (une ailette) dont la base est encastrée dans une paroi à la température de surface T_s (Fig. III. 1). L'ailette est exposée à un fluide environnant à une température T_∞ . La surface A de la section transversale de l'ailette est uniforme. Elle est fabriquée avec un matériau ayant une conductivité uniforme k .

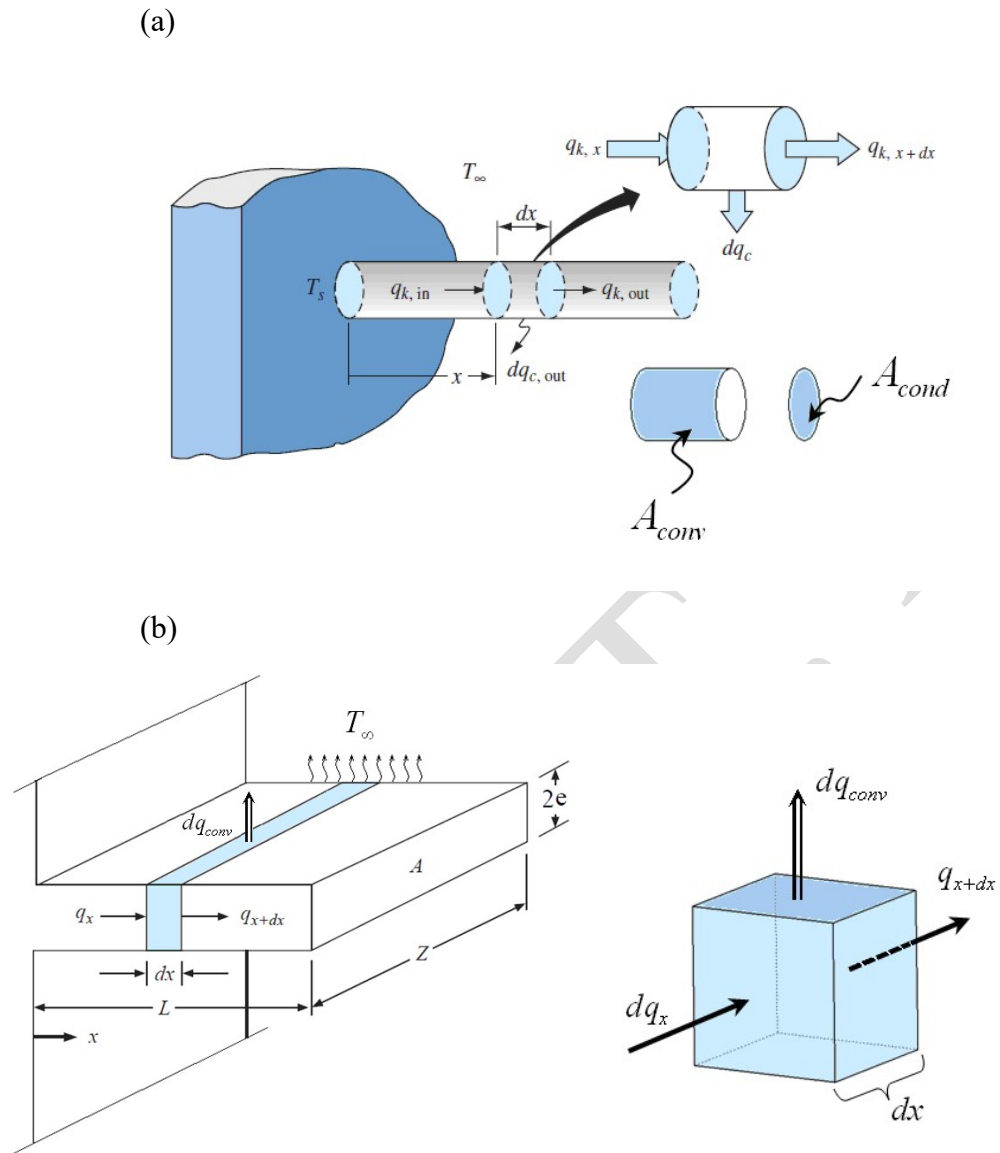


Figure III. 1 Schéma d'une ailette saillante d'un mur : (a) aiguille cylindrique; (b) de profil rectangulaire

Nous abordons le problème en faisant un bilan énergétique sur un élément de l'ailette d'épaisseur dx comme montré sur la Fig. III. 1. Ainsi dans des conditions du régime permanent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flux de la chaleur transmis} \\ \text{par conduction dans} \\ \text{l'élément à labscisse } x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Flux de la chaleur transmis} \\ \text{par conduction à} \\ \text{labscisse } x + dx \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Flux de la chaleur transmis} \\ \text{par convection à la surface} \\ \text{de périphérie de la barre} \\ \text{entre } x \text{ et } x + dx \end{array} \right\}$$

Sous la forme indicielle, cette équation devient

$$q_{k,x} = q_{k,x+dx} + dq_{conv} \quad \text{Ou :} \quad q_{cond,x} = q_{cond,x+dx} + dq_{conv} \quad (\text{III.1})$$

$$q_{k,x} = -k \cdot A_k \cdot \frac{dT}{dx} \quad (\text{III.2})$$

Nous supposons que les gradients de température transversaux sont si petits que la température à toute section transversale de la tige est uniforme, où $T = T(x)$.

$$q_{k,x} = -k \cdot A_k \cdot \frac{dT(x)}{dx}$$

$$q_{k,x+dx} = q_{k,x} + \frac{dq_{k,x}}{dx} dx \Leftrightarrow q_{k,x+dx} = \left(-k \cdot A_k \cdot \frac{dT(x)}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left(-k \cdot A_k \cdot \frac{dT(x)}{dx} \right) dx \quad (\text{III.3})$$

$$dq_{conv} = h \cdot dA_{conv} \cdot (T(x) - T_\infty) \quad (\text{III.4})$$

$$(\text{III.1}) \Leftrightarrow q_{k,x} = q_{k,x} + \frac{dq_{k,x}}{dx} dx + dq_{conv} \Leftrightarrow 0 = \frac{dq_{k,x}}{dx} dx + dq_{conv} \quad (\text{III.5})$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(-k \cdot A_k \cdot \frac{dT(x)}{dx} \right) dx + h \cdot dA_{conv} \cdot (T(x) - T_\infty) = 0$$

$$\Leftrightarrow -k \cdot A_k \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dT(x)}{dx} \right) + h \cdot \frac{dA_c}{dx} \cdot (T(x) - T_\infty) = 0 \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$$A_c = p \cdot dx \quad (\text{III.7})$$

Où

A_c : Surface de convection.

p : Périmètre de la surface de convection.

$$(\text{III.6}) \Leftrightarrow -k \cdot A_k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + h \cdot \frac{d(p \cdot dx)}{dx} \cdot (T(x) - T_\infty) = 0$$

$$\Leftrightarrow -k \cdot A_k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + h \cdot p \cdot \frac{dx}{dx} \cdot (T(x) - T_\infty) = 0 \quad (\text{III.8.a})$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{h \cdot p}{k \cdot A_k} \cdot (T(x) - T_\infty) = 0 \quad (\text{III.8.b})$$

On a :

$$m^2 = \frac{h \cdot p}{k \cdot A_k} \quad (\text{III.9})$$

$$\theta = T(x) - T_\infty \quad (\text{III.10})$$

$$(\text{III.8.b}) \Leftrightarrow \frac{d^2 (T(x) - T_\infty)}{dx^2} - \frac{h \cdot p}{k \cdot A_k} \cdot (T(x) - T_\infty) = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d^2 (T(x) - cte)}{dx^2} = \frac{d^2 T(x)}{dx^2} \quad (\text{III.11})$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta = 0 \quad (\text{III.12})$$

Solution générale :

$$\theta(x) = T(x) - T_{\infty} = c_1 \cdot e^{mx} + c_2 \cdot e^{-mx} \quad (\text{III.13})$$

La figure (Fig. III.2) ci dessous représente les différentes *Conditions aux limites (aux extrémités)* répartitions de la température et du flux de transfert de la chaleur pour les ailettes de section transversale uniforme :

- **Cas 1** : L'ailette très longue et sa température à l'extrémité s'approche de la température du fluide (barre infiniment longue (cas idéal)).
- **Cas 2** : L'extrémité de l'ailette est isolée (barre de longueur finie).
- **Cas 3** : La température à l'extrémité de l'ailette est fixée (cas réel).
- **Cas 4** : l'extrémité perd de la chaleur par convection.

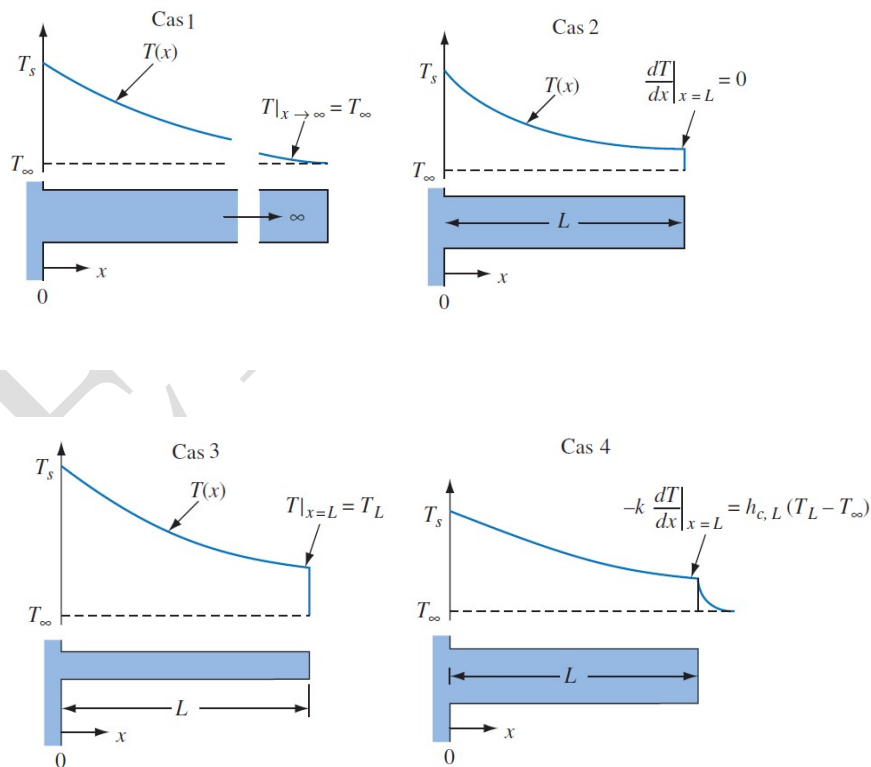


Figure III. 2 Les différents cas de répartition de la température et du flux de transfert de la chaleur pour les ailettes de section transversale uniforme.

Tableau III. 1 Équations pour la répartition de la température et du flux de transfert de la chaleur pour les ailettes de section transversale uniforme

Cas	Conditions à l'extrémité	Répartition de la température	Flux de transfert de la chaleur
1	Ailette à l'infinie : $L \rightarrow \infty$ $\theta(L) = 0$	$\frac{T(x) - T_\infty}{T_s - T_\infty} = e^{-m \cdot x}$	$q = \sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A} \cdot (T_s - T_\infty)$ $= \sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A} \cdot \theta_s = M$
2	Adiabatique : $\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right _{x=L} = 0$	$\frac{T(x) - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \frac{\cosh m(L - x)}{\cosh(m \cdot L)}$	$q = \sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A} \cdot \theta_s \cdot \tanh(m \cdot L) = M \tanh(m \cdot L)$
3	Température fixe : $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{T(x) - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \frac{(\theta_L / \theta_s) \sinh(m \cdot x) + \sinh m(L - x)}{\sinh(m \cdot L)}$	$q = M \frac{\cosh(m \cdot L) - (\theta_L / \theta_s)}{\sinh(m \cdot L)}$
4	Convection transfert : $h_c \cdot \theta(L) = -k \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right _{x=L}$	$\frac{T(x) - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \frac{\cosh m(L - x) + (h_c / (m \cdot k)) \sinh m(L - x)}{\cosh(m \cdot L) + (h_c / (m \cdot k)) \sinh(m \cdot L)}$	$q = M \frac{\sinh(m \cdot L) + (h_c / (m \cdot k)) \cosh(m \cdot L)}{\cosh(m \cdot L) + (h_c / (m \cdot k)) \sinh(m \cdot L)}$

Exercice1

Démontrer les résultats obtenus dans le tableau III.2 pour les cas 1 et 2.

Solution (démonstration):

Cas 1 : L'ailette très longue et sa température à l'extrémité s'approche de la température du fluide (barre infiniment longue (cas idéal)) :

$$\begin{aligned}
 x = 0 &\Leftrightarrow T(0) = T_s \\
 &\Leftrightarrow \theta(x) = T(x) - T_\infty = c_1 \cdot e^{mx} + c_2 \cdot e^{-mx} \\
 &\Leftrightarrow T_s - T_\infty = c_1 + c_2
 \end{aligned} \tag{III.14.a}$$

$$\begin{aligned}
 x = \infty &\Leftrightarrow T(\infty) = T_\infty \\
 &\Leftrightarrow T_\infty - T_\infty = c_1 \cdot e^\infty + c_2 \cdot 0 = 0 \quad \text{Ou : } \theta(L) = T(L) - T_\infty = 0 \quad (L \rightarrow \infty) \\
 &\Leftrightarrow 0 = c_1 \cdot e^\infty \\
 &\Leftrightarrow 0 = c_1
 \end{aligned} \tag{III.14.b}$$

$$(III.14.a \text{ et } b) \Leftrightarrow \begin{cases} T_s - T_\infty = c_1 + c_2 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow T_s - T_\infty = c_2$$

$$(III.13) \Leftrightarrow \theta(x) = T(x) - T_\infty = \underbrace{c_1}_0 \cdot e^{mx} + \underbrace{c_2}_{(T_s - T_\infty)} \cdot e^{-mx}$$

$$(III.13) \Leftrightarrow T(x) - T_\infty = (T_s - T_\infty) \cdot e^{-mx} \text{ ou } \frac{T(x) - T_\infty}{T_s - T_\infty} = e^{-mx} \tag{III.15}$$

$$\begin{aligned}
 (III.8.a) \Leftrightarrow q_{\text{aillette}} &= -k \cdot A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \int_0^\infty h \cdot p \cdot \underbrace{(T(x) - T_\infty)}_{(T_s - T_\infty) e^{-mx}} dx && \text{avec } (x = 0 \Leftrightarrow T(0) = T_s) \\
 &= \int_0^\infty h \cdot p \cdot (T_s - T_\infty) \cdot e^{-mx} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \frac{h \cdot p}{(-m)} (-m) (T_s - T_{\infty}) e^{-mx} dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{-h \cdot p}{\sqrt{\frac{h \cdot p}{k \cdot A_k}}} (-m) (T_s - T_{\infty}) e^{-mx} dx \\
&= \frac{-h \cdot p}{\sqrt{\frac{h \cdot p}{k \cdot A_k}}} (T_s - T_{\infty}) \int_0^{\infty} (-m) e^{-mx} dx, \text{ Avec } \left\{ -h \cdot p \sqrt{\frac{k \cdot A}{h \cdot p}} = -\sqrt{\frac{h^2 \cdot p^2 \cdot k \cdot A}{h \cdot p}} = \sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A} \right\} \\
&= -\sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A} (T_s - T_{\infty}) \left[e^{-mx} \right]_0^{\infty} \\
&= -\sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A} (T_s - T_{\infty}) \left[\underbrace{e^{-m \cdot \infty}}_0 - \underbrace{e^{-m \cdot 0}}_1 \right] \\
q_{\text{aillette}} &= \sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A} \left(\underbrace{T_s - T_{\infty}}_{\theta_s} \right) = M \\
q_{\text{aillette}} &= \sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A} \cdot \theta_s = M
\end{aligned} \tag{III.16}$$

Cas 2 : L'extrémité de l'aillette est isolée (*barre de longueur finie*)

$$x = 0 \Leftrightarrow T(0) = T_s$$

$$\begin{aligned}
\text{(III.14.a)} \Leftrightarrow \theta(x) &= T(x) - T_{\infty} = c_1 \cdot e^{mx} + c_2 \cdot e^{-mx} \\
\Leftrightarrow T_s - T_{\infty} &= c_1 + c_2
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \text{ Où } \frac{\partial T(x)}{\partial x} = m \cdot (c_1 \cdot e^{mx} - c_2 \cdot e^{-mx})$$

$$\left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot e^{mL} - c_2 \cdot e^{-mL} = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 \cdot e^{mL} = c_2 \cdot e^{-mL}$$

$$\Leftrightarrow c_2 = c_1 \cdot \frac{e^{mL}}{e^{-mL}}$$

$$\Leftrightarrow c_2 = c_1 \cdot e^{2mL}$$

$$\Leftrightarrow T_s - T_{\infty} = c_1 + c_1 \cdot e^{2mL}$$

$$\Leftrightarrow c_1 = \frac{T_s - T_{\infty}}{1 + e^{2mL}} \frac{e^{-mL}}{e^{-mL}}$$

$$\Leftrightarrow c_1 = \frac{e^{-mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} \cdot (T_s - T_{\infty})$$

$$c_2 = c_1 \cdot \frac{e^{mL}}{e^{-mL}} = c_1 \cdot e^{2mL} \Leftrightarrow c_2 = \frac{e^{-mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} \cdot (T_s - T_{\infty}) \cdot e^{2mL}$$

$$\Leftrightarrow c_2 = \frac{e^{mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} \cdot (T_s - T_{\infty})$$

$$\theta(x) = T(x) - T_{\infty} = c_1 \cdot e^{mx} + c_2 \cdot e^{-mx} \Leftrightarrow \theta(x) = T(x) - T_{\infty} = \frac{e^{-mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} \cdot (T_s - T_{\infty}) \cdot e^{mx} + \frac{e^{mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} \cdot (T_s - T_{\infty}) \cdot e^{-mx}$$

Rappel :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_s - T_{\infty}} = \frac{e^{-m \cdot L + m \cdot x} + e^{m \cdot L - m \cdot x}}{e^{-m \cdot L} + e^{m \cdot L}} = \frac{\overbrace{e^{-m(L-x)} + e^{m(L-x)}}^{2 \cdot \cosh(m(L-x))}}{\underbrace{e^{-m \cdot L} + e^{m \cdot L}}_{2 \cdot \cosh(m \cdot L)}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_s - T_{\infty}} = \frac{e^{-m \cdot L + m \cdot x} + e^{m \cdot L - m \cdot x}}{e^{-m \cdot L} + e^{m \cdot L}} = \frac{2 \cdot \cosh(m(L-x))}{2 \cdot \cosh(m \cdot L)} = \frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(m \cdot L)}$$

$$q = -k \cdot A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \int_0^L h \cdot p \cdot (T(x) - T_{\infty}) \cdot dx$$

$$= \int_0^L h \cdot p \cdot (T_s - T_{\infty}) \frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(m \cdot L)} \cdot dx$$

$$= \frac{h \cdot p \cdot (T_s - T_{\infty})}{\cosh(m \cdot L)} \int_0^L \frac{-m \cdot \cosh(m(L-x))}{-m} \cdot dx$$

Rappel :

$$\int_0^L \frac{-m}{-m} \times \cosh(m(L-x)) \times dx = \left[\frac{\sinh(m(L-x))}{-m} \right]_0^L$$

$$q = -k \cdot A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \frac{h \cdot p \cdot (T_s - T_{\infty})}{\cosh(m \cdot L)} \int_0^L \frac{-m \cdot \cosh(m(L-x))}{-m} \cdot dx$$

$$= \frac{h \cdot p \cdot (T_s - T_{\infty})}{\cosh(m \cdot L)} \left[\frac{\sinh(m(L-x))}{-m} \right]_0^L$$

$$= \frac{h \cdot p \cdot (T_s - T_{\infty})}{-m \cdot \cosh(m \cdot L)} [\sinh(m(L-x))]_0^L$$

Avec :

$$m = \sqrt{\frac{h \cdot p}{k \cdot A_k}}$$

$$\frac{h \cdot p}{m} = \frac{h \cdot p}{\sqrt{\frac{h \cdot p}{k \cdot A_k}}} = \sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A_k}$$

$$\begin{aligned}
 q = -k \cdot A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} &= -\sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A_k} \cdot \frac{(T_s - T_\infty)}{\cosh(m \cdot L)} \cdot \left[\underbrace{\sinh\left(m \left(\underbrace{L-L}_{=0} \right)\right)}_{=0} - \sinh\left(\underbrace{m(L-0)}_{=m \cdot L}\right) \right] \\
 &= \underbrace{\sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A_k} \cdot (T_s - T_\infty)}_{=M} \cdot [\tanh(m \cdot L)] = \underbrace{\sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A_k} \cdot \theta_s}_{=M} \cdot [\tanh(m \cdot L)]
 \end{aligned}$$

D'où :

$$q = -k \cdot A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = M \cdot [\tanh(m \cdot L)]$$

Cas 3 : La température à l'extrémité de l'ailette est fixée (*cas réel*)

$$\begin{aligned}
 q &= \sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A_k} \cdot (T_s - T_\infty) \cdot \frac{\cosh(m \cdot L) - (\theta_L / \theta_s)}{\sinh(m \cdot L)} \\
 &= \sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A_k} \cdot \theta_s \cdot \frac{\cosh(m \cdot L) - (\theta_L / \theta_s)}{\sinh(m \cdot L)} \\
 &= M \frac{\cosh(m \cdot L) - (\theta_L / \theta_s)}{\sinh(m \cdot L)}
 \end{aligned}$$

Cas 4 : l'extrémité perd de la chaleur par convection

$$\begin{aligned}
 q &= \sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A_k} \cdot (T_s - T_\infty) \cdot \frac{\sinh(m \cdot L) + (h_c / (m \cdot k)) \cosh(m \cdot L)}{\cosh(m \cdot L) + (h_c / (m \cdot k)) \sinh(m \cdot L)} \\
 &= \sqrt{h \cdot p \cdot k \cdot A_k} \cdot \theta_s \cdot \frac{\sinh(m \cdot L) + (h_c / (m \cdot k)) \cosh(m \cdot L)}{\cosh(m \cdot L) + (h_c / (m \cdot k)) \sinh(m \cdot L)} \\
 &= M \frac{\sinh(m \cdot L) + (h_c / (m \cdot k)) \cosh(m \cdot L)}{\cosh(m \cdot L) + (h_c / (m \cdot k)) \sinh(m \cdot L)}
 \end{aligned}$$

III.3 Les ailettes de section transversale non uniforme

III.3.1 Ailettes de profile triangulaire

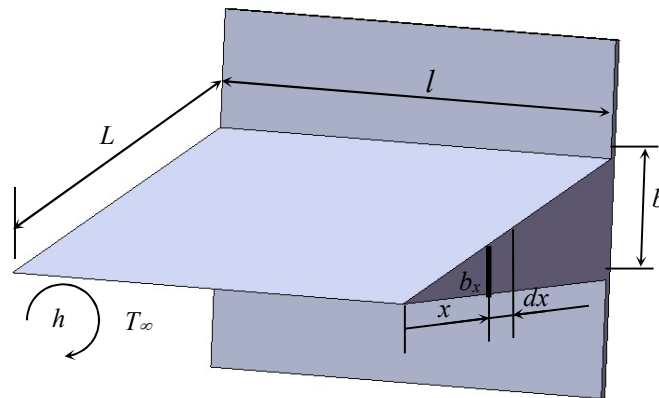


Figure III. 3 Ailette de profile triangulaire

Pour assimiler (rendre) le problème unidirectionnel on suppose $L \ll l$, $b \ll L$. L'équation générale de cette ailette s'écrit comme suit :

$$(III.1) \Leftrightarrow q_{k,x} = q_{k,x} + \frac{dq_{k,x}}{dx} dx + dq_{conv} \Leftrightarrow 0 = \frac{dq_{k,x}}{dx} dx + dq_{conv} \quad (III.17)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(-k \cdot A_x \cdot \frac{dT(x)}{dx} \right) dx + h \cdot dA_{conv} \cdot (T(x) - T_\infty) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(A_x \cdot \frac{dT(x)}{dx} \right) - \frac{h}{k} \cdot \frac{dA_c}{dx} \cdot (T(x) - T_\infty) = 0 \quad (III.18)$$

Avec :

$$\frac{b_x}{x} = \frac{b}{L} \Leftrightarrow b_x = \frac{b}{L} x \quad (III.19)$$

$$p_x = 2 \cdot (l + b_x) \approx 2 \cdot l$$

$$A_x = (l \cdot b_x) = \frac{l \cdot b}{L} x$$

$$A_c = p_x \cdot dx$$

D'où les variables géométriques (b_x , p_x , A_x) :

$$\frac{d}{dx} \left(A_x \cdot \frac{dT(x)}{dx} \right) - \frac{h}{k} \cdot \frac{dA_c}{dx} \cdot (T(x) - T_\infty) = 0$$

$$(III.18) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{l \cdot b}{L} x \cdot \frac{dT(x)}{dx} \right) - \frac{h}{k} \cdot \frac{d(p_x \cdot dx)}{dx} \cdot (T(x) - T_\infty) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{l \cdot b}{L} \cdot \frac{dT(x)}{dx} + \frac{l \cdot b}{L} x \cdot \frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{h}{k} \cdot 2 \cdot l \cdot (T(x) - T_\infty) = 0 \quad (III.20.a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dT(x)}{dx} - \frac{h \cdot 2 \cdot L}{k \cdot b \cdot x} \cdot (T(x) - T_\infty) = 0 \text{ avec } y = (T(x) - T_\infty) \quad (III.20.b)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - B^2 y = 0$$

Cette équation ressemble à l'équation de **Bessel** $y'' + \frac{1}{x} y' - B^2 y = 0$ où la solution générale de cette

équation est de la forme :

$$y = (T(x) - T_\infty) = C_1 \cdot I_0 \cdot (2 \cdot B \cdot \sqrt{x}) + C_2 \cdot K_0 \cdot (2 \cdot B \cdot \sqrt{x})$$

C_1, C_2 sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites,

$I_0(x), K_0(x)$ sont respectivement des *fonctions de Bessel* modifiée d'ordre 0, du 1^{er} et du 2^{es} espèce,

donné par le Tableau (III. 2. a) et (III. 2. b).

Où

$$B^2 = \frac{2 \cdot L \cdot h}{k \cdot b}, \text{ ou } B = \sqrt{\frac{2 \cdot L \cdot h}{k \cdot b}} \quad (III.21)$$

L'équation pour la répartition de la température et du flux de transfert de la chaleur pour les ailettes à sections variables :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \frac{y}{y_o} = \frac{I_o \cdot (2 \cdot B \cdot \sqrt{x}) \cdot K_1 \cdot (2 \cdot B \cdot \sqrt{x}) + I_1 \cdot (2 \cdot B \cdot \sqrt{x}) \cdot K_o \cdot (2 \cdot B \cdot \sqrt{x})}{I_o \cdot (2 \cdot B \cdot \sqrt{L}) \cdot K_1 \cdot (2 \cdot B \cdot \sqrt{L}) + I_1 \cdot (2 \cdot B \cdot \sqrt{L}) \cdot K_o \cdot (2 \cdot B \cdot \sqrt{L})} \quad (\text{III.22})$$

III.3.2 Conditions aux limites CL

$$x=L \rightarrow T=T_s$$

$$x=0 \rightarrow K_o(0) = \infty \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \frac{I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})}{I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})} \quad (\text{III.23})$$

III.3.3 Flux de transfert de la chaleur

On a

$$\begin{aligned} \frac{d[I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})]}{d(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})} &= [I_1(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})] \Leftrightarrow d[I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})] = [I_1(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})] \cdot d(2 \cdot B \cdot \sqrt{x}) \\ &\Leftrightarrow d[I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})] = [I_1(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})] \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot B \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow d[I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})] = [I_1(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})] \cdot B \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{avec : } B^2 = \frac{2 \cdot L \cdot h}{k \cdot b}, \text{ et } A_x = (l \cdot b_x) = \frac{l \cdot b}{L} x \text{ ou } A_L = (l \cdot b_x) = \frac{l \cdot b}{L} L = l \cdot b$$

$$\begin{aligned} T(x) = T_\infty + (T_s - T_\infty) \frac{I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})}{I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})} &\Leftrightarrow \frac{dT(x)}{dx} \Big|_{x=L} = \left[(T_s - T_\infty) \cdot \frac{I_1(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})}{I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})} \cdot B \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right]_{x=L} \\ &= \left[(T_s - T_\infty) \cdot \frac{I_1(2 \cdot B \cdot \sqrt{x})}{I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot L \cdot h}{k \cdot b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right]_{x=L} \\ &= (T_s - T_\infty) \cdot \frac{I_1(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})}{I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot L \cdot h}{k \cdot b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{L}} \\ &= (T_s - T_\infty) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{k \cdot b}} \cdot \frac{I_1(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})}{I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})} \end{aligned}$$

$$q = k \cdot A_L \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = k \cdot \underbrace{l \cdot b}_{A_L} \sqrt{\frac{2 \cdot h}{k \cdot b}} \cdot (T_s - T_\infty) \frac{I_1(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})}{I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})}$$

$$q = l \cdot \sqrt{2 \cdot h \cdot k \cdot b} (T_s - T_\infty) \frac{I_1(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})}{I_o(2 \cdot B \cdot \sqrt{L})} \quad (\text{III.24})$$

III.4 Ailette circulaire de section rectangulaire

Considérons l'ailette circulaire (**Fig. III. 4**). Bien que l'épaisseur des ailettes est uniforme (e est indépendant de r), la section transversale Ac ($Ac = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot e$) varie avec r .

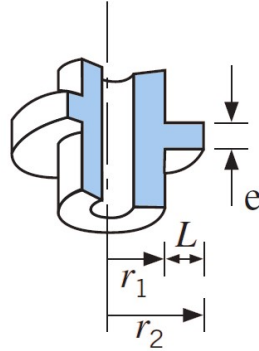


Figure III. 4 Ailette circulaire de section rectangulaire

$$As = 2 \cdot \pi \cdot (r^2 - r_1^2)$$

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} - \frac{2 \cdot h}{k \cdot e} \cdot (T - T_\infty) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} - m^2 \cdot \theta = 0, \text{ avec : } m^2 = \frac{2 \cdot h}{k \cdot e}, \text{ et } \theta = T(r) - T_\infty$$

L'expression précédente ressemble à l'équation de **Bessel** modifiée d'ordre zéro $\theta'' + \frac{1}{x} \theta' - B^2 \theta = 0$

où la solution générale de cette équation est de la forme :

$$\theta = (T(r) - T_\infty) = C_1 \cdot I_0(m \cdot r) + C_2 \cdot K_0(m \cdot r) \quad (\text{III.25})$$

C_1 et C_2 étant déterminés par les conditions aux limites :

$$\text{À } r = r_1 \rightarrow \theta = T_0 - T_\infty$$

$$\text{À } r = r_2 \rightarrow h \cdot \theta(r_2) = -k \cdot \frac{d\theta}{dr} \cdot r_2 \text{ (cas le plus général : transfert de la chaleur à l'extrémité)}$$

On en déduit les valeurs de C_1 et de C_2 :

$$C_1 = \frac{K_1(m \cdot r_2) - \frac{h}{k \cdot m} K_0(m \cdot r_2)}{I_1(m \cdot r_2) \cdot K_0(m \cdot r_0) + I_0(m \cdot r_0) \cdot K_1(m \cdot r_2) + \frac{h}{k \cdot m} [I_0(m \cdot r_2) \cdot K_0(m \cdot r_0) + I_0(m \cdot r_0) \cdot K_0(m \cdot r_2)]}$$

$$C_2 = \frac{1 - C_1 \cdot I_0(m \cdot r_0)}{K_0(m \cdot r_0)}$$

$$\frac{T(r) - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{I_0(m \cdot r) \cdot K_1(m \cdot r_2) + I_1(m \cdot r_2) \cdot K_0(m \cdot r)}{I_0(m \cdot r_1) \cdot K_1(m \cdot r_2) + I_1(m \cdot r_2) \cdot K_0(m \cdot r_1)} \quad (\text{III.26})$$

Où :

$$I_1(mr) = d[I_0(mr)] / d(mr) \text{ et } K_1(mr) = -d[K_0(mr)] / d(mr)$$

Le taux de transfert de la chaleur des ailettes est exprimé par :

$$q = -k \cdot A_{c,b} \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_1} = -k (2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot t) \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=r_1}$$

$$q = 2\pi k r_1 t \theta_b m \frac{K_1(m \cdot r_1) \cdot I_1(m \cdot r_2) - I_1(m \cdot r_1) \cdot K_1(m \cdot r_2)}{K_0(m \cdot r_1) \cdot I_1(m \cdot r_2) + I_0(m \cdot r_1) \cdot K_1(m \cdot r_2)}$$

D'où le rendement

$$\eta_f = \frac{q_f}{h 2 \pi (r_2^2 - r_1^2) \theta_b} = \frac{2 r_1}{m (r_2^2 - r_1^2)} \frac{K_1(m \cdot r_1) \cdot I_1(m \cdot r_2) - I_1(m \cdot r_1) \cdot K_1(m \cdot r_2)}{K_0(m \cdot r_1) \cdot I_1(m \cdot r_2) + I_0(m \cdot r_1) \cdot K_1(m \cdot r_2)} \quad (\text{III.27})$$

La connaissance du rendement thermique d'une ailette permet d'évaluer sa résistance thermique, d'où :

$$R_{t,f} = \frac{1}{h A_f \eta_f}$$

III.5 Efficacité d'une ailette

L'efficacité (Rendement) d'une ailette est définie comme le rapport entre la quantité de la chaleur dissipé (évacuée) par l'ailette et la quantité de la chaleur d'une ailette de mêmes dimensions mais où sa température serait uniforme (constante) et égale à celle de sa base:

$$\text{Efficacité de l'ailette} = \frac{\text{chaleur réelle transférée}}{\text{La chaleur qui serait transférée si la surface entière de l'ailette était à la température de sa base}} \quad (\text{III.28})$$

L'efficacité de l'ailette s'écrit donc :

$$\eta = \frac{\varphi_p}{\varphi_{\max}} \quad (\text{III.29})$$

$$\eta_f = \frac{q_f}{q_{\max}} = \frac{q_f}{h A_f \theta_b} \quad (\text{III.30})$$

Définit les performances d'une ailette en comparant le flux dissipé à celui qui serait dissipé dans une ailette de mêmes dimensions mais dont la température serait uniforme et égale à celle de la base (conductivité thermique $\lambda \rightarrow \infty$, pas de résistance thermique de conduction donc pas de chute de température dans l'ailette).

Tableau III. 2. a Fonctions de Bessel de la première espèce

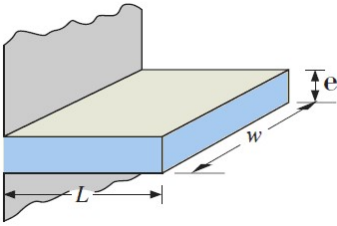
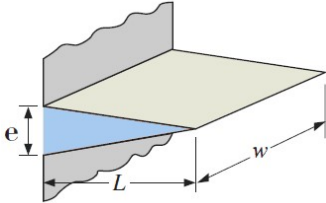
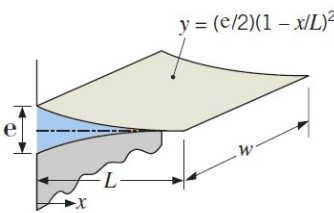
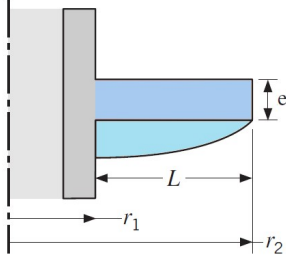
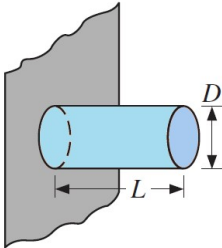
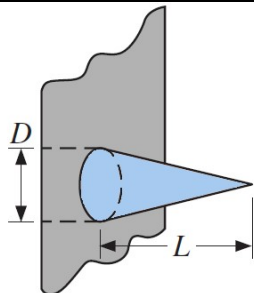
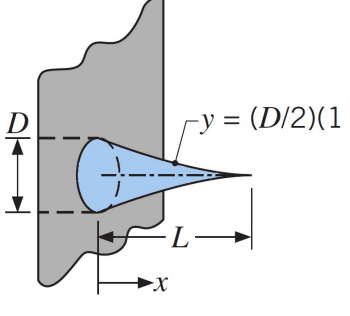
Ailettes droites		
Rectangulaire^a $A_f = 2wL_c$ $L_c = L + (t/2)$ $A_p = e L$		$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$
Triangulaire^a $A_f = 2w[L^2 + (e/2)^2]^{1/2}$ $A_p = (e/2)L$		$\eta_f = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$
Parabolique^a $A_f = w[C_1L + (L^2/e)\ln(e/L + C_1)]$ $C_1 = [1 + (e/L)^2]^{1/2}$ $A_p = (e/3)L$		$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$
Ailette circulaire		
Rectangulaire^a $A_f = 2\pi(r_{2c}^2 - r_1^2)$ $r_{2c} = r_2 + (e/2)$ $V = \pi(r_2^2 - r_1^2)e$		$\eta_f = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})}$ $C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$
Ailette aiguille		
Rectangulaire^b $A_f = \pi DL_c$ $L_c = L + (D/4)$ $V = (\pi D^2/4)L$		$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$
Triangulaire^b $A_f = \frac{\pi D}{2} [L^2 + (D/2)^2]^{1/2}$ $V = (\pi/12)D^2L$		$\eta_f = \frac{2}{mL} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$

Tableau III. 2. a Fonctions de Bessel de la première espèce (suite)

Parabolique^b $A_f = \frac{\pi L^3}{8D} \{C_3 C_4 - \frac{L}{2D} \ln [(2DC_4/L) + C_3]\}$ $C_3 = 1 + 2(D/L)^2$ $C_4 = [1 + (D/L)^2]^{1/2}$ $V = (\pi/20)D^2 L$		$\eta_f = \frac{2}{[4/9(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$
--	---	--

$$^a m = (2h/kt)^{1/2}.$$

$$^b m = (4h/kD)^{1/2}.$$

Tableau III. 2. b Fonctions de Bessel modifiées du premier et de la seconde espèce

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$e^x K_0(x)$	$e^x K_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	0.0	1.0000	0.0000	∞	∞
0.1	0.9975	0.0499	0.2	0.8269	0.0823	2.1407	5.8334
0.2	0.9900	0.0995	0.4	0.6974	0.1368	1.6627	3.2587
0.3	0.9776	0.1483	0.6	0.5993	0.1722	1.4167	2.3739
0.4	0.9604	0.1960	0.8	0.5241	0.1945	1.2582	1.9179
0.5	0.9385	0.2423	1.0	0.4657	0.2079	1.1445	1.6361
0.6	0.9120	0.2867	1.2	0.4198	0.2152	1.0575	1.4429
0.7	0.8812	0.3290	1.4	0.3831	0.2185	0.9881	1.3010
0.8	0.8463	0.3688	1.6	0.3533	0.2190	0.9309	1.1919
0.9	0.8075	0.4059	1.8	0.3289	0.2177	0.8828	1.1048
1.0	0.7652	0.4400	2.0	0.3085	0.2153	0.8416	1.0335
1.1	0.7196	0.4709	2.2	0.2913	0.2121	0.8056	0.9738
1.2	0.6711	0.4983	2.4	0.2766	0.2085	0.7740	0.9229
1.3	0.6201	0.5220	2.6	0.2639	0.2046	0.7459	0.8790
1.4	0.5669	0.5419	2.8	0.2528	0.2007	0.7206	0.8405
1.5	0.5118	0.5579	3.0	0.2430	0.1968	0.6978	0.8066
1.6	0.4554	0.5699	3.2	0.2343	0.1930	0.6770	0.7763
1.7	0.3980	0.5778	3.4	0.2264	0.1892	0.6579	0.7491
1.8	0.3400	0.5815	3.6	0.2193	0.1856	0.6404	0.7245
1.9	0.2818	0.5812	3.8	0.2129	0.1821	0.6243	0.7021
2.0	0.2239	0.5767	4.0	0.2070	0.1787	0.6093	0.6816
2.1	0.1666	0.5683	4.2	0.2016	0.1755	0.5953	0.6627
2.2	0.1104	0.5560	4.4	0.1966	0.1724	0.5823	0.6453
2.3	0.0555	0.5399	4.6	0.1919	0.1695	0.5701	0.6292
2.4	0.0025	0.5202	4.8	0.1876	0.1667	0.5586	0.6142
			5.0	0.1835	0.1640	0.5478	0.6003
			5.2	0.1797	0.1614	0.5376	0.5872
			5.4	0.1762	0.1589	0.5279	0.5749
			5.6	0.1728	0.1565	0.5188	0.5633
			5.8	0.1696	0.1542	0.5101	0.5525
			6.0	0.1666	0.1520	0.5019	0.5422
			6.4	0.1611	0.1479	0.4865	0.5232
			6.8	0.1561	0.1441	0.4724	0.5060
			7.2	0.1515	0.1405	0.4595	0.4905
			7.6	0.1473	0.1372	0.4476	0.4762
			8.0	0.1434	0.1341	0.4366	0.4631
			8.4	0.1398	0.1312	0.4264	0.4511
			8.8	0.1365	0.1285	0.4168	0.4399
			9.2	0.1334	0.1260	0.4079	0.4295
			9.6	0.1305	0.1235	0.3995	0.4198
			10.0	0.1278	0.1213	0.3916	0.4108

¹ $I_{n+1}(x) = I_{n-1}(x) - (2n/x)I_n(x)$