

Chapitre II

Transfert thermique en régime permanent (Unidimensionnel)

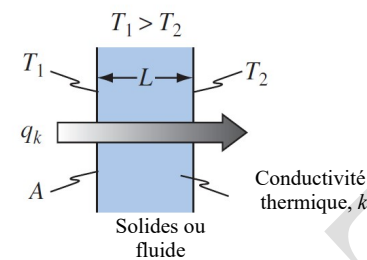
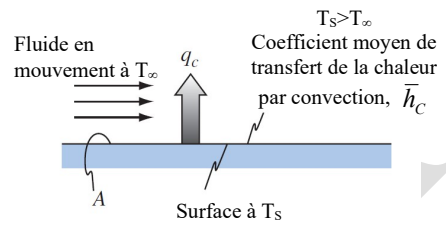
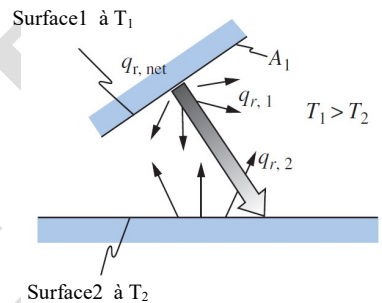
II.1 Introduction

L'examen des applications de la loi de Fourier pour le calcul du flux de la chaleur par conduction dans certains systèmes unidimensionnels (unidirectionnels) simples tels que: les systèmes cylindriques et sphériques, où la température dans le corps est une fonction dépendante de la distance radiale uniquement est indépendante de l'angle ou de la distance axiale, le problème du flux de la chaleur multidimensionnelle peut être approché par une analyse unidimensionnelle, car l'impacte d'une seconde coordonnée (dimension) de l'espace pour certains problèmes bidimensionnels est négligeable, étant donné que sa valeur est très petite, où l'équation différentielle est simplifiée et conduit à une solution beaucoup plus facile (due de cette simplification).

II.2 Murs plans en série et en parallèle

Dans l'industrie du bâtiment on utilise le paramètre qui représente la résistance thermique R , défini dans le tableau II.1.

Tableau II. 1 Les trois modes de transfert thermique

Un transfert de la chaleur par conduction unidimensionnel à travers un milieu stationnaire $q_k = \frac{k \cdot A}{L} (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R_k} \quad (\text{II.01})$ $R_k = \frac{L}{k \cdot A} \quad (\text{II.2})$	
Transfert de la chaleur par convection d'une surface exposée à un fluide en mouvement $q_c = \bar{h}_c \cdot A \cdot (T_s - T_\infty) = \frac{T_s - T_\infty}{R_c} \quad (\text{II.3})$ $R_c = \frac{1}{\bar{h}_c \cdot A} \quad (\text{II.4})$	
Transfert de la chaleur net par rayonnement de la surface 1 vers la surface 2 $q_r = A_1 \cdot F_{1-2} \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) = \frac{T_1 - T_2}{R_r} \quad (\text{II.5})$ $R_r = \frac{T_1 - T_2}{A_1 \cdot F_{1-2} \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)} \quad (\text{II.6})$	

II.2.1 Murs plans en série (*multicouches*)

Considérons une paroi plane constituée par la juxtaposition de trois murs simples de différents matériaux en contact parfait entre eux, où L_i représente les épaisseurs et k_i les conductivités thermiques indépendantes (**Fig. II.1**).

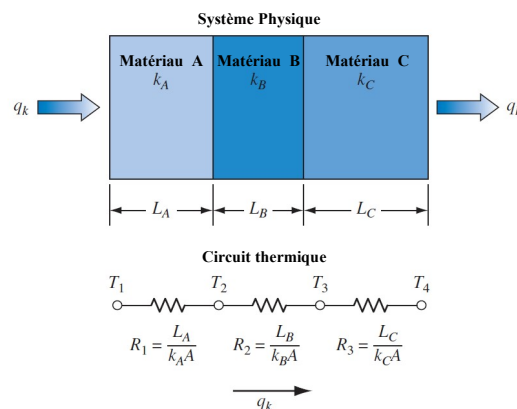


Figure II.1 La conduction à travers un système à trois couches en série.

Le gradient varie dans les couches. Le taux du flux de conduction de la chaleur à travers chaque couche est constant q_k . De ce fait on a :

$$q_k = \frac{k_A \cdot A_A}{L_A} (T_1 - T_2) = \frac{k_B \cdot A_B}{L_B} (T_2 - T_3) = \frac{k_C \cdot A_C}{L_C} (T_3 - T_4) \quad (II.7)$$

$$q_k = \left(\frac{k \cdot A}{L} \right)_A \cdot (T_1 - T_2) = \left(\frac{k \cdot A}{L} \right)_B \cdot (T_2 - T_3) = \left(\frac{k \cdot A}{L} \right)_C \cdot (T_3 - T_4)$$

$$q_k = \frac{T_1 - T_4}{R_{eq}} = \frac{T_1 - T_4}{R_{eq(A)} + R_{eq(B)} + R_{eq(C)}} \text{ , avec } (R_{eq} = R_{eq(A)} + R_{eq(B)} + R_{eq(C)}) \text{ (murs en séries)}$$

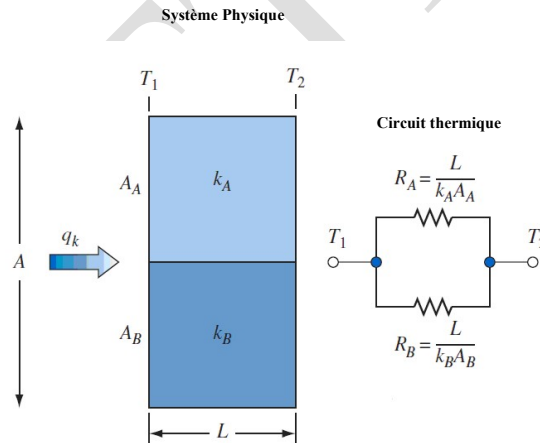
$$q_k = \frac{T_1 - T_4}{R_{eq}} = \frac{T_1 - T_4}{\left(\frac{L}{k \cdot A} \right)_A + \left(\frac{L}{k \cdot A} \right)_B + \left(\frac{L}{k \cdot A} \right)_C} \quad (II.8)$$

Pour N couches constituant le mur :

$$q_k = \frac{T_1 - T_{N+1}}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{L}{k \cdot A} \right)_i} \quad (II.9)$$

II.2.2 Murs plans en parallèle

La conduction peut se produire dans une section avec deux parois en parallèle (deux matériaux différents en parallèle) :



● **Figure II. 2** Conduction thermique dans un mur avec des parois en parallèle

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_B + R_A}{R_A \cdot R_B}$$

$$\Leftrightarrow R_{eq} = \frac{R_A \cdot R_B}{R_A + R_B}$$

$$q_k = q_A + q_B \Leftrightarrow q_{eq} = \frac{T_1 - T_2}{R_{eq}} = \frac{T_1 - T_2}{L / (A \cdot k)_A} + \frac{T_1 - T_2}{L / (A \cdot k)_B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_B + R_A}{R_A \cdot R_B}$$

$$\Leftrightarrow R_{eq} = \frac{R_A \cdot R_B}{R_A + R_B}$$

(II.10)

II.2.3 Murs plans en séries et en parallèles

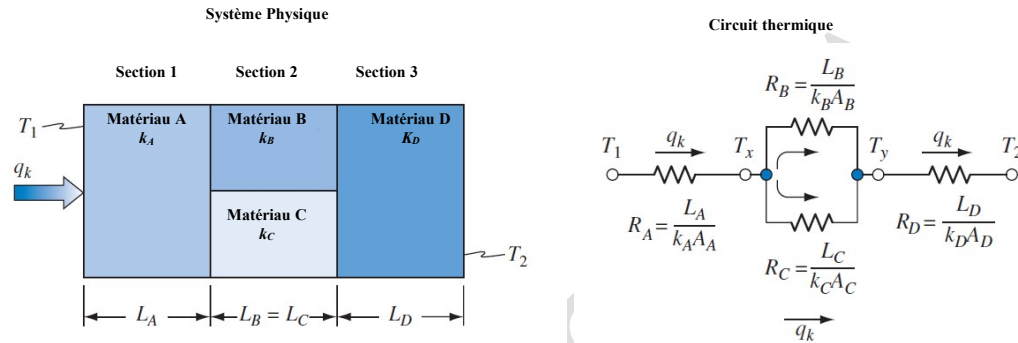


Figure II. 3 Conduction thermique à travers un mur constitué de paroi en séries et en parallèles.

$$\left. \begin{aligned} R_{eq} &= R_A + R_{B-C} + R_D \\ R_{B-C} &= \frac{R_B \cdot R_C}{R_B + R_C} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow R_{eq} = R_A + \frac{R_B \cdot R_C}{R_B + R_C} + R_D, \text{ avec } k_{eq} = \frac{L}{A \cdot R_{eq}}$$

$$\text{Où } q_k = \frac{T_1 - T_2}{R_{eq}} \text{ avec } \left(R_{eq} = \frac{L}{A \cdot k_{eq}} \right) \quad (II.11)$$

II.2.4 La convection et la conduction en série

Dans la partie précédente, nous avons traité la conduction par des parois en composites lorsque les températures de surface des deux côtés sont spécifiées. Généralement, les problèmes rencontrés en ingénierie sont différents (plus complexes), où la chaleur est transférée entre deux fluides de températures spécifique, séparés par un mur. Dans une telle situation, les températures de surface ne sont pas connues, mais elles peuvent être calculées si les coefficients de transfert de la chaleur par convection des deux côtés de la paroi sont connus.

La figure montre le réseau thermique d'un cas de transfert de la chaleur entre deux fluides séparés par un mur (Fig. II.4).

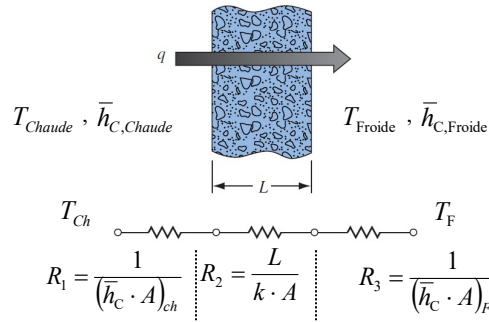


Figure II. 4 Transfert de la chaleur entre deux fluides séparés par un mur (T_{chaude} vers T_{froide})

$$q = \frac{T_{Ch} - T_F}{\sum_{i=1}^3 R_i} = \frac{\Delta T}{R_1 + R_2 + R_3}$$

D'où,

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{(\bar{h}_c \cdot A)_{ch}} \\ R_2 &= \frac{L}{k \cdot A} \\ R_3 &= \frac{1}{(\bar{h}_c \cdot A)_F} \end{aligned} \quad (II.12)$$

II.2.5 La convection et le rayonnement en parallèle

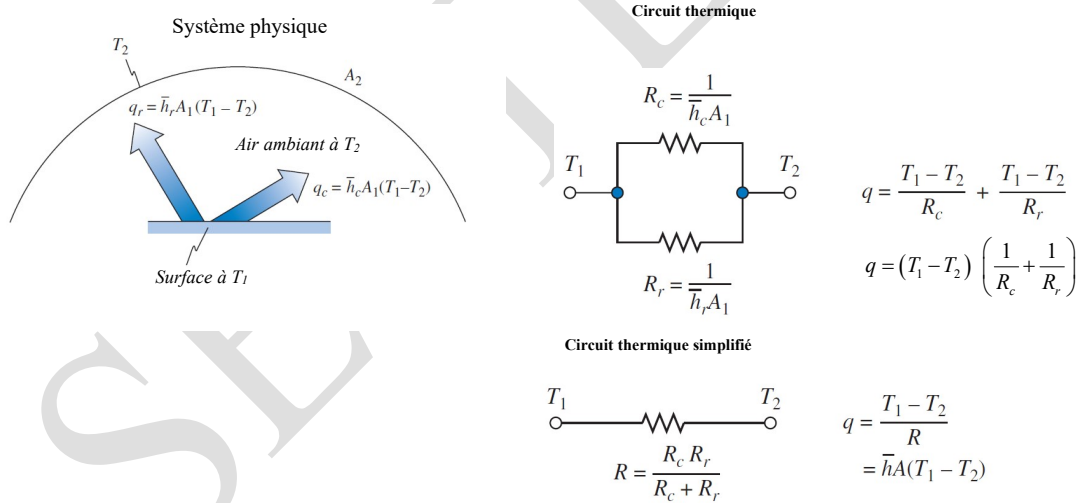


Figure II. 5 La convection et le rayonnement en parallèle

II.3 Système radial

II.3.1 Cylindre

Considérons un cylindre de longueur L , de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_o , (Fig. II.6). Notre intérêt se porte sur le flux de la chaleur qui traverse ce cylindre et qui est exposé à une différence de température $T_i - T_o$. Nous supposons que le cylindre est très long par rapport à son diamètre, et que la chaleur ne circule que dans la direction radiale, de sorte qu'il

soit défini la variable radiale r uniquement en coordonnées cylindriques. L'écoulement de la chaleur est dans ce cas selon la loi de Fourier défini comme suit:

$$q_r = -k \cdot A_r \cdot \frac{dT}{dr} \quad , \text{ avec } A_r = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L$$

$$q_r = -2 \cdot \pi \cdot k \cdot r \cdot L \cdot \frac{dT}{dr} \quad (II.13)$$

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_o} \frac{q_r}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot r \cdot L} dr &= - \int_{T_i}^{T_o} dT \Leftrightarrow \frac{q_r}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot L} \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r} = - \int_{T_i}^{T_o} dT \\ \Leftrightarrow \frac{q_r}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot L} [\ln(r)]_{r_i}^{r_o} &= -(T_o - T_i) \\ \Leftrightarrow \frac{q_r}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot L} [\ln(r_o) - \ln(r_i)] &= -(T_o - T_i) \\ \Leftrightarrow \frac{q_r}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot L} [\ln(r_o / r_i)] &= (T_i - T_o) \\ \Leftrightarrow q_r &= \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot L (T_i - T_o)}{\ln(r_o / r_i)} = \frac{(T_i - T_o)}{\left(\frac{\ln(r_o / r_i)}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot L} \right)} \end{aligned}$$

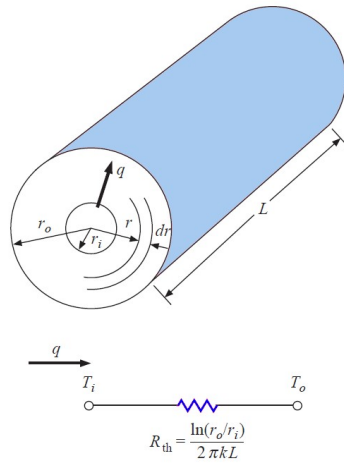


Figure II. 6 Flux de la chaleur unidimensionnel à travers un cylindre creux et le circuit électrique analogue.

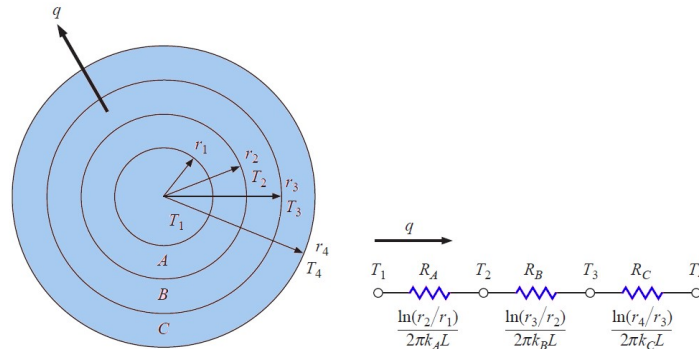


Figure II. 7 Flux de la chaleur unidimensionnel à travers plusieurs couches cylindriques et le circuit électrique analogue.

En appliquant les conditions aux limites

$$T = T_i \text{ à } r = r_i$$

$$T = T_o \text{ à } r = r_o$$

La solution de l'Éq. II. 13 est :

$$q = \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot L \cdot (T_i - T_o)}{\ln(r_o/r_i)} \quad (\text{II.14})$$

La résistance thermique dans ce cas est :

$$R_{th} = \frac{\ln(r_o/r_i)}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot L} \quad (\text{II.15})$$

Le concept de résistance thermique peut être utilisé pour des parois cylindriques à couches multiples tout comme il a été utilisé pour des parois planes. Pour le système à trois couches représentées sur la Fig. II.7, le flux de la chaleur s'écrit :

$$q = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_1 - T_4)}{\ln(r_2/r_1)/k_A + \ln(r_3/r_2)/k_B + \ln(r_4/r_3)/k_C} \quad (\text{II.16})$$

II.3.2 Sphères

Lorsque la température est fonction du rayon uniquement, les systèmes sphériques peuvent également être traités comme les cas unidimensionnels. Le flux de la chaleur s'écrit alors :

$$q = \frac{4 \cdot \pi \cdot k \cdot (T_i - T_o)}{1/r_i - 1/r_o} \quad (\text{II.17})$$

II.4 Exercices

Exercice N°. 1

La paroi d'un four est réalisée à partir d'une couche interne, en acier de 0,5 cm d'épaisseur ($k = 40 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$), et d'une couche externe de 10 cm de brique réfractaire (brique de zirconium) où $k = 2,5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, comme illustré sur la Fig. II. 8. La température de surface interne est de 820°C et la température de surface externe est de 20°C .

- Donner le schéma thermique équivalent.
- Calculer le taux de perte de chaleur par unité de surface de la paroi du four.
- Quelle est la température à l'interface?

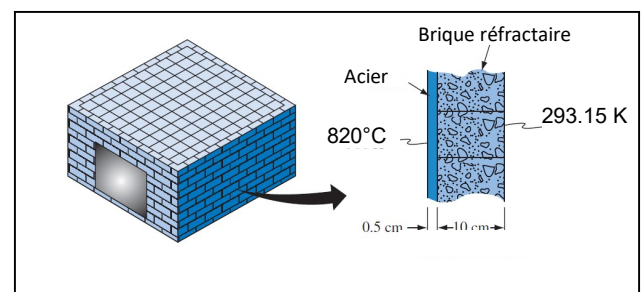


Figure II. 8 Schéma de la paroi du four.

Exercice N°. 2

La porte d'un four à gaz industriel mesure 2 m x 4 m et doit être isolée pour limiter les pertes de la chaleur à 1200 W/m² au maximum. La porte est représentée schématiquement sur la figure. La surface intérieure est une feuille d'inconel 600 (alliage nickel/chrome) de 3/8in d'épaisseur ($k_1 = 14,9 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) et la surface extérieure est une tôle d'acier inoxydable ($k_3 = 43 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$). Entre ces tôles, une épaisseur appropriée (e_2) de matériau isolant doit être placée ($k_2 = 0,27 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$). La température effective du gaz à l'intérieur du four est de 1200 °C et le coefficient global de transfert de la chaleur entre le gaz et la porte est $h_g = 20 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Le coefficient de transfert thermique entre la surface extérieure de la porte et l'environnement à 20°C est $h_a = 5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

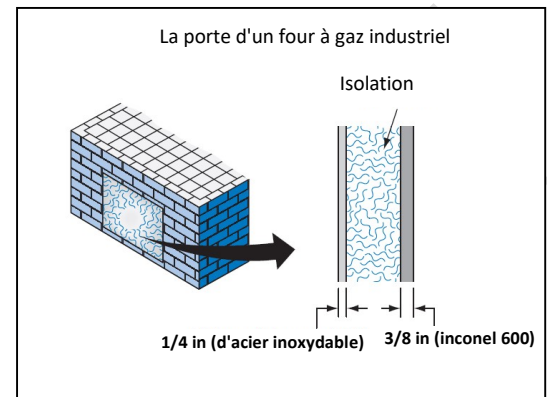


Figure II. 9 Coupe transversale de la paroi composite de la porte du four à gaz.

- 1- Donner le circuit thermique équivalent.
- 2- Donner l'expression de R_{eq} de la porte.
- 3- Calculer l'épaisseur d'isolation appropriée sur le matériau isolant (e_2).
- 4- Si l'épaisseur d'isolation est de 20 cm, calculer la température dans la porte du four et sont extérieure.

Exercice N°. 3

Une longue tige cylindrique, chauffée électriquement, de 2cm de diamètre, est installée dans un four sous vide comme le montre la Fig. II. 10. L'émissivité de la surface de la tige chauffante est 0,9 et est maintenue à 1000 K, tandis que les parois intérieures du four sont noires et sont à 800 K. Calculer:

- 1- Le taux de dissipation de l'énergie électrique due à la chaleur de la tige (Le rayonnement de transfert de la chaleur).
- 2- Le coefficient de transfert de la chaleur par rayonnement h_r (équivalent).

$$L = 1.0 \text{ m}, \quad \sigma = 5.669 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} &= 0.578 \text{ Btu/h ft } ^\circ\text{F} \\ 1 \text{ ft} &= 12 \text{ in} \\ 1 \text{ in} &= 0.0833 \text{ ft} \\ 1 \text{ in} &= 2.54 \text{ cm} \end{aligned}$$

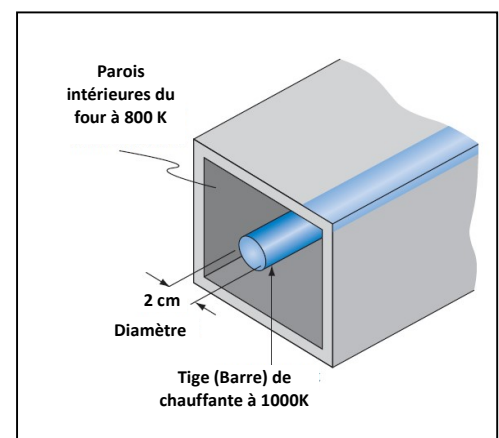


Figure II. 10 Schéma du four à vide avec tige de chauffante.

Exercice N°. 4

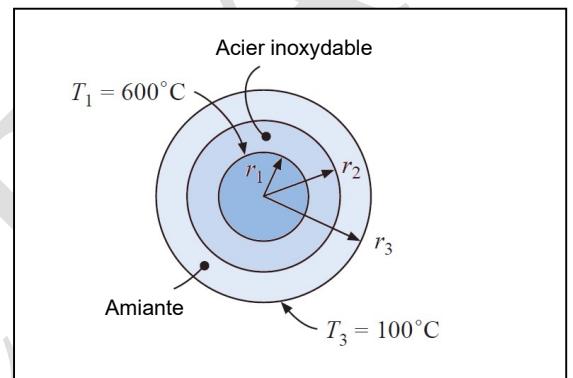
L'épaisseur de la paroi en brique extérieure d'une maison est de 4 in où $k_b = 0.7 [W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}]$ suivie d'une couche de plâtre de 1,5 in avec $k_p = 0.48 [W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}]$.

- Quelle épaisseur d'isolant en laine de roche [$k_l = 0.065 W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$] qu'on doit ajouter pour réduire 80% la perte de la chaleur (ou gain) dans le mur?

Exercice N°. 5

Un tube de paroi épaisse en acier inoxydable [18% Cr, 8% Ni, $k = 19 W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$]. Avec un diamètre intérieur de 2 cm et un diamètre extérieur de 4 cm est recouvert d'une couche d'isolation en amiante de 3 cm [$k = 0,2 W / m \cdot ^\circ C$].

- Si la température de la paroi intérieure du tuyau est maintenue à $600^\circ C$, calculer la perte de la chaleur par mètre de longueur.
- Calculez également la température de l'interface d'isolation du tube.

**Exercice N°. 6**

Considérons une couche d'isolant déposée autour d'un tuyau circulaire, comme présentée sur la figure. La température interne de l'isolant est fixée à T_i , et la surface extérieure est exposée à un environnement de convection T_∞ .

A partir du réseau thermique, le transfert de la chaleur est:

$$q = \frac{2 \pi L (T_i - T_\infty)}{\frac{\ln(r_o/r_i)}{k} + \frac{1}{r_o h}}$$

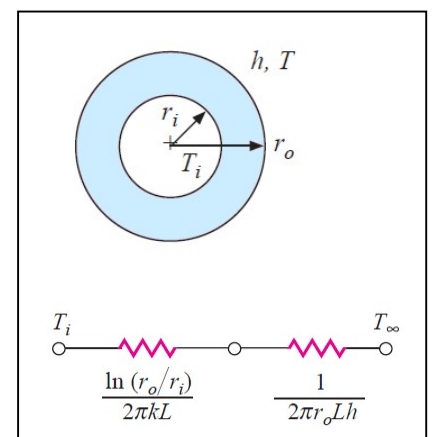


Figure II. 11 Épaisseur d'isolation critique déposée autour d'un tuyau circulaire.

1- Déterminer le rayon extérieur de l'isolation r_o , qui maximisera le transfert de la chaleur.

La condition de maximisation est: $\frac{dq}{dr_o} = 0$

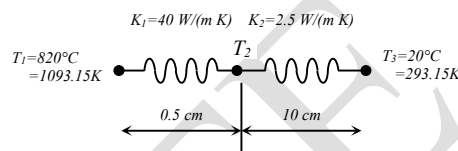
2- Calculer le rayon critique d'isolation pour l'amiante [$k=0,17 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$] entourant un tuyau et exposé à l'air ambiant à 20°C avec $h=3,0 \text{ W}/\text{m}^2$. Calculer la perte de la chaleur d'un tube de 200°C de $5,0 \text{ cm}$ de diamètre lorsqu'il est recouvert avec le rayon critique d'isolation et sans isolation.

II.5 Solutions des exercices

Solution de l'exercice N°. 1

Supposons qu'il existe un état stationnaire, négligeons les effets aux angles et aux bords du mur et supposons que les températures de surface sont uniformes.

1) Le circuit thermique correspondant :



2) Le taux de perte de la chaleur:

$$q = \frac{(T_1 - T_3)}{\left(\frac{1}{A}\right)R_{eq}} \Leftrightarrow \frac{q}{A} = \frac{(T_1 - T_3)}{R'_{eq}} = \frac{(T_1 - T_3)}{R'_1 + R'_2} \quad \text{Avec } \frac{L}{K} = R'$$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{A} = \frac{(T_1 - T_3)}{\frac{L_a}{k_a} + \frac{L_b}{k_b}}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{(820 - 20)}{\frac{0.005 \text{ m}}{40 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} + \frac{0.1 \text{ m}}{2.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})}} = 19937.7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 19.94 \frac{\text{KW}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Ou: } \frac{q}{A} = \frac{(1093.15 - 293.15)}{\frac{0.05 \text{ m}}{40 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} + \frac{0.1 \text{ m}}{2.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})}} = 19937.7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 19.94 \frac{\text{KW}}{\text{m}^2}$$

3) La température à l'interface:

$$\frac{q}{A} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_1} \Leftrightarrow T_2 = T_1 - \frac{q}{A} \cdot R_1$$

$$\Leftrightarrow T_2 = T_1 - \frac{q}{A} \cdot \frac{L_1}{K_1} = 1093.15 - 19937.7 \cdot \frac{0.005}{40}$$

$$\Leftrightarrow T_2 = 1090.65 \text{ K} = 817.50^\circ\text{C}$$

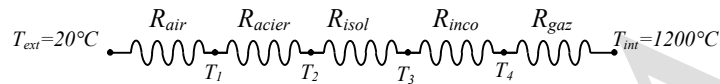
Ou

$$\frac{q}{A} = \frac{(T_2 - T_3)}{R_2} \Leftrightarrow T_2 = T_3 + \frac{q}{A} \cdot R_2 = 293.15 + 19937.7 \cdot \frac{0.1}{2.5}$$

$$\Leftrightarrow T_2 = 1090.65 K = 817.50^\circ C$$

Solution de l'exercice N°. 2

1) Le circuit thermique correspondant

L'expression de la résistance thermique R_{eq} , définie par:

$$R_{eq} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{1}{h_{air}} + \frac{L_{acier}}{K_{acier}} + \frac{L_{isol}}{K_{isol}} + \frac{L_{inco}}{K_{inco}} + \frac{1}{h_{gaz}} \right)$$

Avec :

$$\frac{q}{A} = \frac{k}{L} (T_1 - T_2), \text{ où : } R_{cond} = \frac{L}{k}$$

$$\frac{q}{A} = h_c \cdot (T_s - T_\infty), \text{ où : } R_{conv} = \frac{1}{h}$$

2) L'épaisseur d'isolation appropriée :

$$\frac{q}{A} = 1200 = \frac{1200 - 20}{\frac{1}{5} + \frac{(1/4) \times 0.0254}{43} + \frac{e_2}{0.27} + \frac{(3/8) \times 0.0254}{14.9} + \frac{1}{20}} \Leftrightarrow$$

$$1200 \left(\frac{1}{5} + \frac{(1/4) \times 0.0254}{43} + \frac{(3/8) \times 0.0254}{14.9} + \frac{1}{20} \right) + \frac{1200 \times e_2}{0.27} = 1200 - 20$$

$$\Leftrightarrow 1200 \left(\frac{1}{5} + \frac{(1/4) \times 0.0254}{43} + \frac{(3/8) \times 0.0254}{14.9} + \frac{1}{20} \right) + \frac{1200 \times e_2}{0.27} = 1200 - 20$$

$$\Leftrightarrow e_2 = \frac{0.27}{1200} \left(1180 - 1200 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{0.0254}{4 \times 43} + \frac{3 \times 0.0254}{8 \times 14.9} + \frac{1}{20} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow e_2 = \frac{0.27}{1200} \cdot (1180 - 1200 \times 0.2507)$$

$$\Leftrightarrow e_2 = 0.27 \times 879.05 / 1200 = 0.1977 \text{ m } (19.77 \text{ cm})$$

3) la température dans la porte du four et son extérieur (e= 20 cm) :

$$T_{ext} = 1200 - 1200 \left(\underbrace{\frac{1}{5}}_{=0.2} + \underbrace{\frac{(1/4) \times 0.0254}{43}}_{=1.4767 \cdot 10^{-4}} + \underbrace{\frac{0.2}{0.27}}_{=0.7407} + \underbrace{\frac{(3/8) \times 0.0254}{14.9}}_{=6.3926 \cdot 10^{-4}} + \underbrace{\frac{1}{20}}_{=0.05} \right)$$

$$= 1200 - 1200 (0.2 + 1.4767 \cdot 10^{-4} + 0.7407 + 6.3926 \cdot 10^{-4} + 0.05)$$

$$= 1200 - 1200 \times 0.9915 = 10.16^\circ C \quad (283.33 K)$$

$$\frac{q}{A} = \frac{k.A}{L} (T_1 - T_2), \text{ où : } R_{\text{cond}} = \frac{L}{k.A}$$

$$T_1 = 10.16 + 1200 \frac{1}{5} = 250.31^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 250.31 + 1200 \left(\frac{(1/4) \times 0.0254}{43} \right) = 250.48^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 250.48 + 1200 \left(\frac{0.2}{0.27} \right) = 1139.19^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 1139.19 + 1200 \left(\frac{(3/8) \times 0.0254}{14.9} \right) \approx 1139.95^\circ\text{C} \text{ ou } T_4 = 1200 - 1200 \left(\frac{1}{20} \right) \approx 1140^\circ\text{C}$$

Solution de l'exercice N°. 3

Supposons que l'état d'équilibre a été atteint. De plus, il faut noter que les parois du four enfermant complètement la tige de chauffage, toute l'énergie rayonnante émise par la surface de la tige est interceptée par les parois du four. Ainsi, pour une enceinte noire, la perte de la chaleur nette de la tige de la surface :

$$q_r = A \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) = \pi \cdot D_1 \cdot L \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

$$q_r = \pi \cdot 0.02 \cdot (1) \cdot (0.9) \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (1000^4 - 800^4)$$

$$q_r = 1892.67\text{W} \approx 1893.01\text{W} \approx 1.893\text{KW}$$

Notons que pour que l'état stationnaire puisse exister, la tige chauffante doit dissiper l'énergie électrique à un taux de 1893 W et le taux de perte de la chaleur à travers les parois du four doit être égale au taux électrique d'entrée du système, c'est-à-dire à la tige.

Le coefficient de transfert de la chaleur par rayonnement h_r :

$$q_r = h_r (T_1 - T_2) = A \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) \Leftrightarrow h_r = \varepsilon \cdot \sigma \cdot \frac{(T_1^4 - T_2^4)}{T_1 - T_2} \text{ ou } h_r = \varepsilon \sigma (T_1 + T_2) (T_1^2 + T_2^2)$$

$$= (0.9) \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot \left(\frac{1000^4 - 800^4}{1000 - 800} \right)$$

$$= 150.61 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

Solution de l'exercice N°. 4

La perte de la chaleur globale est donnée par :

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R_i}$$

La perte de la chaleur dans le mur avec isolant en laine de roche doit représenter seulement 20 % que celle sans isolant (réduire de 80 % la perte dans le mur).

$$q_{\text{avec isolant}} = 0.2 \times q_{\text{sans isolant}} \Leftrightarrow (T_1 - T_2) / \sum R_i \text{ avec isolation} = 0.2 \cdot (T_1 - T_2) / \sum R_i \text{ sans isolation}$$

Où

$$\frac{q \text{ avec isolation}}{q \text{ sans isolation}} = (0.2) = \frac{\sum R_i \text{ sans isolation}}{\sum R_i \text{ avec isolation}}$$

D'où :

$$R_{\text{avec isol}} = \frac{R_{\text{sans isol}}}{0.2}$$

Nous avons pour la brique et le plâtre, par unité de surface :

$$R_b = \frac{\Delta x}{k} = \frac{(4) \cdot (0.0254)}{0.7} = 0.145 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C} / W$$

$$R_p = \frac{\Delta x}{k} = \frac{(1.5) \cdot (0.0254)}{0.48} = 0.079 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C} / W$$

Le flux de la chaleur dans la paroi sans isolation:

$$R_{\text{sans isolant}} = R_b + R_p = 0.145 + 0.079 = 0.224 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C} / W$$

Le flux de la chaleur perdu de la paroi (avec isolant) :

$$q_{\text{avec isolant}} = 0.2 \times q_{\text{sans isolant}} \Leftrightarrow \frac{(T_1 - T_2)}{R_{\text{avec isol}}} = 0.2 \frac{(T_1 - T_2)}{R_{\text{sans isol}}}$$

$$\Leftrightarrow R_{\text{avec isolant}} = \frac{R_{\text{sans isolant}}}{0.2} = 1.122$$

Cette valeur représente la somme des résistances dans paroi (brique + plâtre + laine de roche)

$$R_{\text{avec isolant}} = R_{\text{sans isolation}} + R_{\text{laine de roche}} \Leftrightarrow 1.122 = 0.224 + R_{\text{laine de roche}}$$

$$\Leftrightarrow R_{\text{laine de roche}} = \frac{\Delta x}{k}$$

$$\Leftrightarrow 0.898 = \frac{\Delta x}{0.065}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x_{\text{laine de roche}} = 0.0584 \text{ m}$$

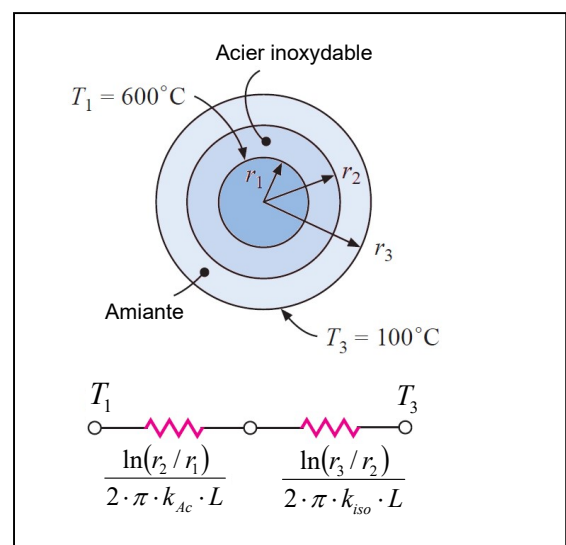
Solution de l'exercice N°. 5

$$\left. \begin{array}{l} D_1 = 2 \text{ cm} \Leftrightarrow r_1 = 1 \text{ cm} \\ D_2 = 4 \text{ cm} \Leftrightarrow r_2 = 2 \text{ cm} \end{array} \right\} \Leftrightarrow r_3 = 2 + 3 = 5 \text{ cm}$$

Le flux de la chaleur est donné par :

$$\frac{q}{L} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (T_1 - T_3)}{\frac{\ln(r_2 / r_1)}{k_{Ac}} + \frac{\ln(r_3 / r_2)}{k_{iso}}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (600 - 100)}{\frac{\ln(2)}{19} + \frac{\ln(5/2)}{0.2}} = 680 \text{ W} / m$$

Ce flux de la chaleur peut être utilisé pour calculer la température d'interface entre la paroi du tube extérieure et l'isolation.



Nous avons

$$\frac{q}{L} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2 \cdot \pi \cdot k_{iso}}} = \frac{(T_2 - 100)}{\frac{\ln(5/2)}{2 \cdot \pi \cdot 0.2}} = 680 \text{ W/m}$$

Où T_2 est la température d'interface.

$$T_2 = 595.8 \text{ } ^\circ\text{C}$$

La plus grande résistance thermique résulte clairement de l'isolation, et donc la majeure partie de la chute de température est à travers ce matériau.

Solution de l'exercice N°. 6

1) On a :

$$q = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_i - T_\infty)}{\frac{1}{k} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) + \frac{1}{r_o \cdot h}}$$

$$q = h \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_o \cdot L \cdot (T_i - T_\infty)$$

$$q = \frac{(T_i - T_\infty)}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot r_o \cdot h}}$$

Maintenant, manipulons cette expression pour déterminer le rayon extérieur de l'isolant r_o qui maximisera le transfert de la chaleur. La condition de maximisation est :

$$\frac{dq}{dr_o} = 0 = \frac{-2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_i - T_\infty) \cdot \left[\frac{1}{k \cdot r_o} + \frac{-1}{h \cdot r_o^2} \right]}{\left[\frac{1}{k} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) + \frac{1}{r_o \cdot h} \right]^2}$$

$$\frac{dq}{dr_o} = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_i - T_\infty) \cdot \left[\frac{1}{k \cdot r_o} + \frac{-1}{h \cdot r_o^2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{k \cdot r_o} - \frac{1}{h \cdot r_o^2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k \cdot r_o} = \frac{1}{h \cdot r_o^2}$$

$$\Leftrightarrow r_o = \frac{k}{h}$$

$$[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$\left[\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) \right]' = \frac{1}{\frac{r_o}{r_i}} = \frac{1}{r_i} \cdot \frac{r_i}{r_o} = \frac{1}{r_o}$$

$$\left(\frac{r_o^{-1}}{h} \right)' = \frac{-1 \cdot r_o^{-2}}{h} = \frac{-1}{h \cdot r_o^2}$$

$$\ln(1) = 0$$

2-a)

$$r_o = \frac{k}{h} = \frac{0.17}{3.0} = 0.0567 \text{ m} = 5.67 \text{ cm}$$

$$\frac{q}{L} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (200 - 20)}{\frac{\ln(5.67/2.5)}{0.17} + \frac{1}{(0.0567)(3.0)}} = 105.7 \text{ W/m}$$

$$\frac{q}{L} = 105.7 \text{ W/m}$$

2-b) Sans isolation

La convection à partir de la surface extérieure du tuyau est :

$$\text{Si } r_o = r_i \Leftrightarrow q = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_i - T_\infty)}{\frac{1}{k} \ln\left(\frac{r_i}{r_i}\right) + \frac{1}{r_i \cdot h}} \quad \text{où } \frac{1}{k} \ln\left(\frac{r_i}{r_i}\right) = 0$$

$$q = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_i - T_\infty)}{\frac{1}{r_i \cdot h}} = r_i \cdot h \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_i - T_\infty) \Leftrightarrow \frac{q}{L} = r_i \cdot h \cdot 2 \cdot \pi \cdot (T_i - T_\infty)$$

$$\frac{q}{L} = (0.025) \cdot (3) \cdot 2 \cdot \pi \cdot (200 - 20) = 84.8 \text{ W / m}$$

Ainsi, l'ajout de 3.17 cm (5.67-2,5=3.17) d'isolation augmente en effet le transfert de la chaleur de 20 pour cent.

En changeant l'isolant par une couche de fibre de verre ayant une conductivité thermique de 0,04 W /m·°C. Le rayon critique serait alors :

$$r_o = \frac{k}{h} = \frac{0.04}{3.0} = 0.0133 \text{ m} = 1.33 \text{ cm} < r_{\text{critique}} = 5.67 \text{ cm}$$

Or, la valeur du rayon critique est inférieure à celle du rayon extérieur du tuyau (2,5 cm), d'où l'ajout d'une isolation en fibre de verre entraînerait une diminution du transfert de la chaleur.

Remarque :

Dans un problème pratique d'isolation de tuyau, la perte de la chaleur totale sera également influencée par le rayonnement ainsi que la convection de la surface extérieure de l'isolant.

$$q(r) = \frac{2 \pi L (T_i - T_\infty)}{\frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{k} + \frac{1}{r h}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (200 - 20)}{\frac{\ln(r/2.5)}{0.17} + \frac{1}{(r \times 0.01)(3.0)}} \quad r[\text{cm}]$$

