

Université de Boumerdès



Spécialité: Electronique des systèmes embarqués

Module: Traitement avancé du signal

Dr. Belkacem Samia

2022/2023

II. Les filtres numériques: FIR

1) Définition: FIR

les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou FIR (Finite Impulse Response). Dans ces filtres tous les coefficients a_j sont nuls (seulement les coefficients b_i sont présents):

1) Fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{i=M} b_i z^{-i}$$

2) L'équation de récurrence d'un FIR

- Équation d'e/s : $y(n)$ est calculée en fonction des entrées (filtre non récurrents)

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[n - i]$$

$x[n]$ représente les valeurs successives du signal d'entrée,

b_i représente les coefficients de la fonction de transfert du filtre,

$y[n]$ représente les valeurs successives du signal de sortie,

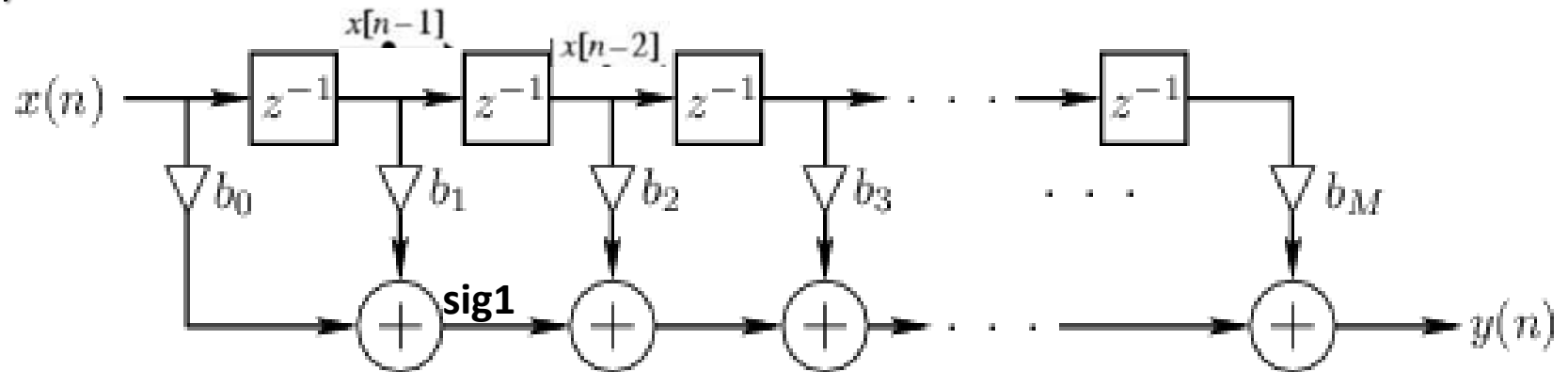
N est le nombre de coefficients du filtre (l'ordre).

3) Propriétés des FIRs

- Réponse stable par défaut
- Réponse en phase linéaire pour un filtre réalisable
- Peuvent demander un temps de calcul excessif

4) Implementation du filtre FIR

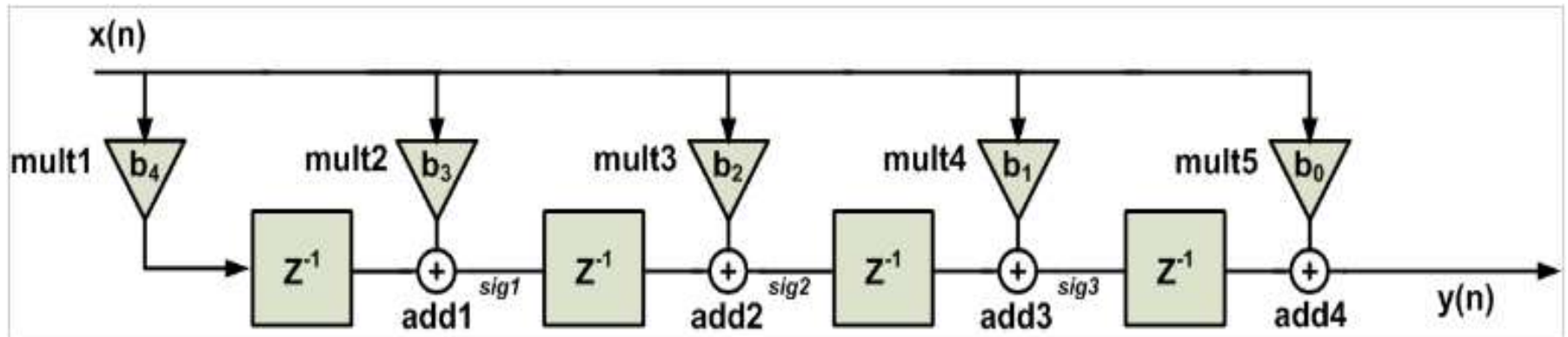
a) Structure directe



$$\text{Sig1} = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

4) Implementation du filtre FIR

b) Structure transposée



$$sig1 = b_4x(n-1) + b_3x(n)$$

$$sig2 = b_4x(n-2) + b_3x(n-1) + b_2x(n)$$

$$sig3 = b_4x(n-3) + b_3x(n-2) + b_2x(n-1) + b_1x(n)$$

$$y(n) = b_4x(n-4) + b_3x(n-3) + b_2x(n-2) + b_1x(n-1) + b_0x(n)$$

5) Synthèse des filtres FIR

- 1) Méthode de fenêtrage (domaine temporel)
 - 2) Méthode par échantillonnage fréquentielle
 - 3) Synthèse par optimisation (algo. Remez)
- Le calcul des coefficients repose sur l'utilisation de la transformée numérique et des fenêtres spectrales ((rectangulaire, Hanning, Hamming,...)).

6) Conception de FIR par fenêtrage

Spécifications

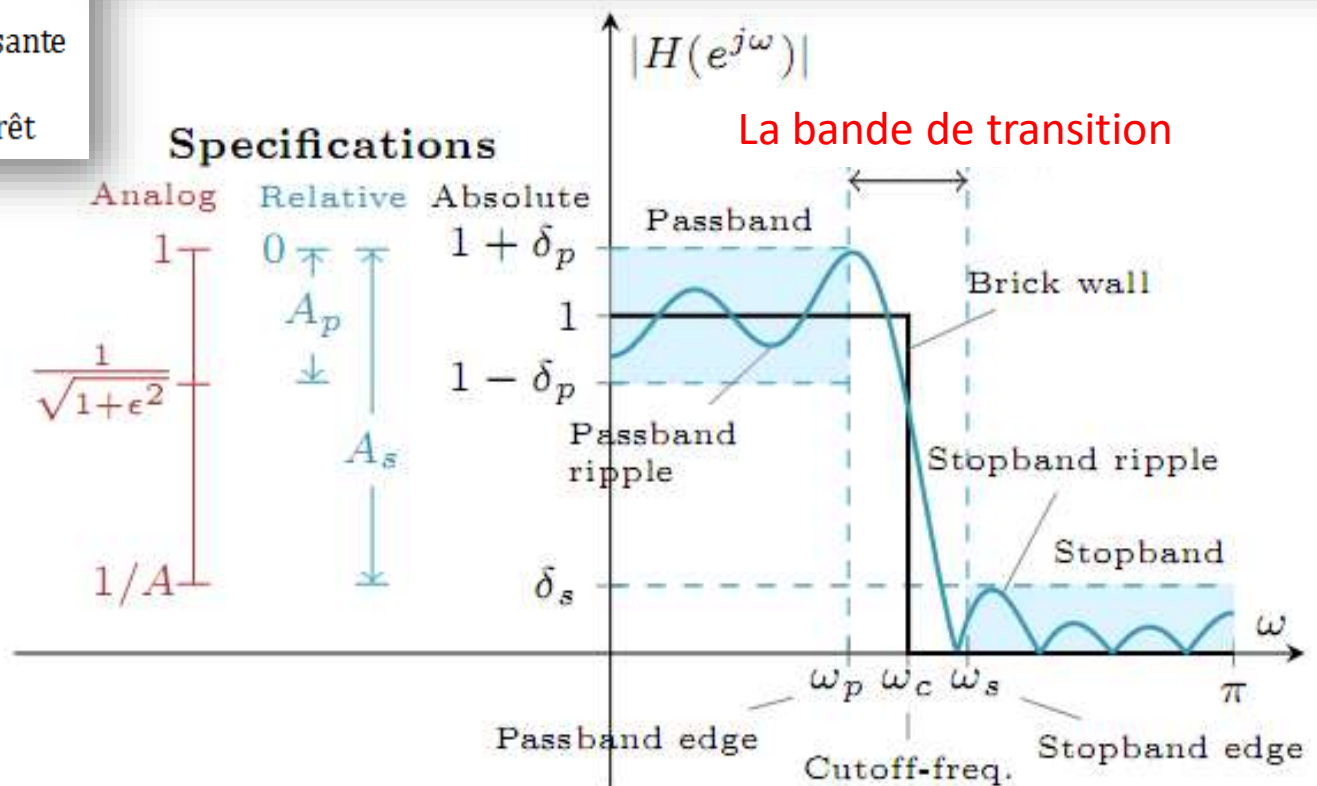
w_p : Pulsation de la bande passante

w_s : Pulsation de la bande d'arrêt

δ_p : Déviation de la bande passante

δ_s : Déviation de la bande d'arrêt

- La **bande passante** est définie par $0 \leq w \leq w_p$, on a besoin $|H(e^{jw})| \cong 1$ avec une erreur $\pm \delta_p$, c'est-à-dire $1 - \delta_p \leq |H(e^{jw})| \leq 1 + \delta_p, |w| \leq w_p$
- La **bande d'arrêt**, définie par $w_s \leq w \leq \pi$, on a besoin $|H(e^{jw})| \cong 0$, avec une erreur δ_s , c'est-à-dire $|H(e^{jw})| \leq \delta_s, w_s \leq |w| \leq \pi$



Paramètres à considérer

6) Conception de FIR par fenêtrage

- Concevoir un filtre numérique consiste à déterminer la **fonction de transfert en z** du filtre qui va approcher au mieux les spécifications sur la **réponse fréquentielle en amplitude**
- Dans la méthode de la fenêtre, nous développons un filtre FIR de phase linéaire causal en **multipliant** un **filtre idéal ($h_d(n)$)** qui a une réponse impulsionnelle de durée infinie (IIR) par une **fonction fenêtre ($w(n)$)** de durée finie:

$$h[n] = h_d(n)w[n]$$

7) Réponse impulsionnelle des filtres idéals

A. Lowpass filters

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} G e^{-j\omega n_d}, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$h_d[n] = G \frac{\sin(\omega_c(n - n_d))}{\pi(n - n_d)}$$

B. Highpass filters

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} G e^{-j\omega n_d}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

$$h_d[n] = G \left(\delta[n - n_d] - \frac{\sin(\omega_c(n - n_d))}{\pi(n - n_d)} \right)$$

C. Bandpass filters

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} G e^{-j\omega n_d}, & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0, & |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & \omega_2 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$h_d[n] = G \left(\frac{\sin(\omega_2(n - n_d))}{\pi(n - n_d)} - \frac{\sin(\omega_1(n - n_d))}{\pi(n - n_d)} \right) \text{ or, equivalently,}$$

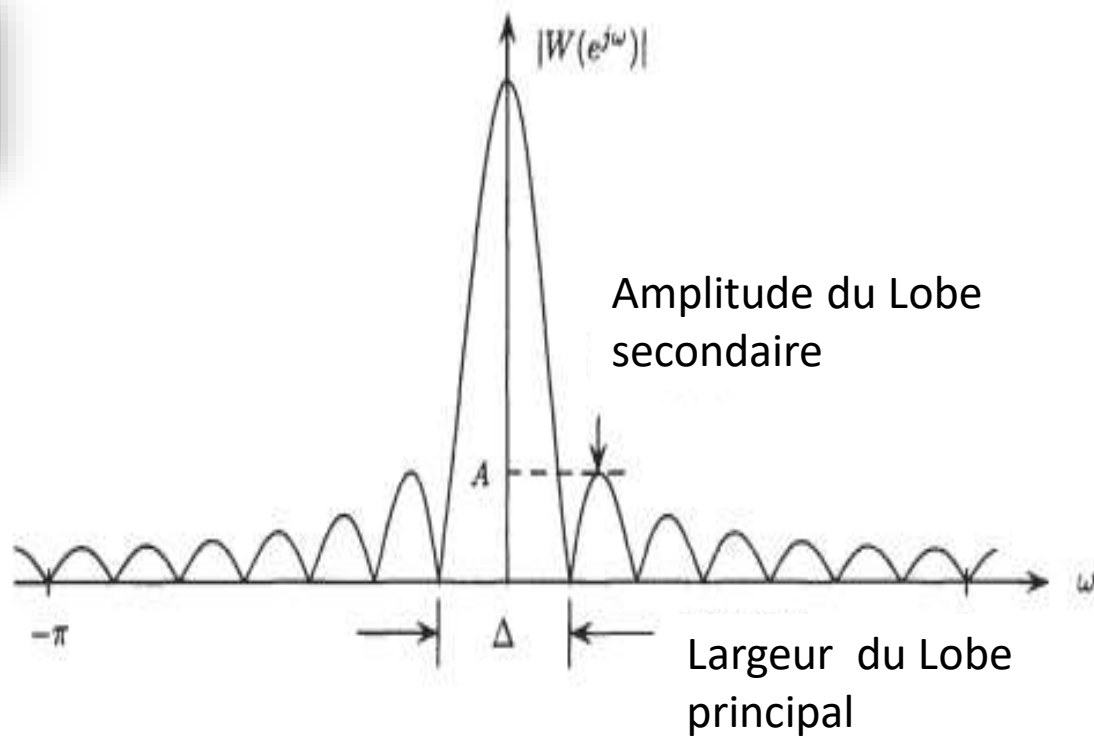
$$h_d[n] = 2G \cos\left(\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)(n - n_d)\right) \frac{\sin\left(\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)(n - n_d)\right)}{\pi(n - n_d)}$$

8)Implementation en Matlab

- `w=boxcar(M)` returns the M-point rectangular window function in array `w`.
- `w=bartlett(M)` returns the M-point Bartlett window function in array `w`.
- `w=hann(M)` returns the M-point Hann window function in array `w`.
- `w=hamming(M)` returns the M-point Hamming window function in array `w`.
- `w=blackman(M)` returns the M-point Blackman window function in array `w`.
- `w=kaiser(M,beta)` returns the `beta`-valued M-point rectangular window function in array `w`.

10) Fenêtres et leurs propriétés

- La largeur du lobe principale
- L'amplitude du lobe secondaire



9)Exemple de fenêtre:wvtool

M: ordre du filtre

Rectangulaire

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Bartlett :

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{M} & 0 \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 2 - \frac{2n}{M} & \frac{M}{2} \leq n \leq M \end{cases}$$

Hanning :

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \right] \quad 0 \leq n \leq M$$

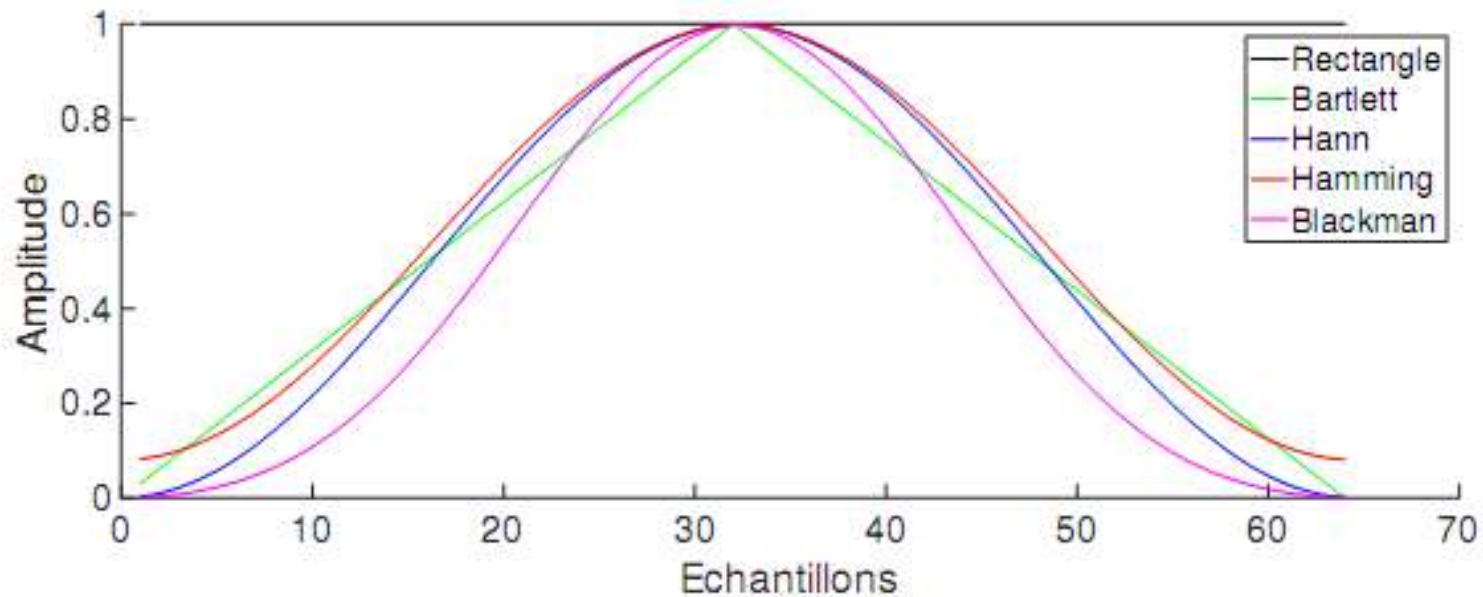
Hamming :

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \quad 0 \leq n \leq M$$

Blackman :

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) \quad 0 \leq n \leq M$$

9)Exemple de fenêtre:temporelle



Fenêtres populaires : représentation temporel

11)La méthode des fenêtres

On trouve l'ordre du filtre selon la largeur de la bande de transition, une fois l'atténuation est déterminée dans la bande d'arrêt.

N: la longueur de la fenêtre

$\Delta f = f_s - f_p$

Ordre $M = N - 1$

Fenêtre	Bande de transition normalisée ($\Delta f(\text{Hz})$)	Ondulation dans la bande passante (dB)	Atténuation dans la bande d'arrêt (dB)	Amplitude du lobe secondaire (dB)	β de la fenêtre de Kaiser équivalente
Rectangulaire	$\frac{0.9}{N}$	0.7416	-21	-13	0
Hanning	$\frac{3.1}{N}$	0.0546	-44	-31	3.86
Hamming	$\frac{3.3}{N}$	0.0194	-53	-41	4.86
Blackman	$\frac{5.5}{N}$	0.0017	-74	-57	7.04
Kaiser	$\frac{2.93}{N} \rightarrow \beta = 4.54$	0.0274	-50		
	$\frac{5.71}{N} \rightarrow \beta = 8.96$	0.000275	-90		

12) Méthode de la conception

Soit les spécifications suivantes : $\{w_p, w_s, \delta_p, \delta_s\}$

1- $\delta = \min \{ \delta_p, \delta_s \}$

2- $w_c = \frac{w_p + w_s}{2}$

3- Calcul de l'atténuation $A_s = -20 \log_{10} \delta$ et $\Delta w = w_s - w_p$ (A_s atténuation minimale de la bande d'arrêt)

4- Choisir une fenêtre (à partir de la table) :

- Sélectionner la forme de fenêtre qui possède le petit A qu'est plus grand que A_s
- Sélectionner une longueur de fenêtre minimale ($N = ?$)

5- Calculer la réponse impulsionnelle par $h_d[n] = \frac{\sin [w_c(n - \frac{M}{2})]}{\pi(n - \frac{M}{2})}$ (pour un filtre Passe-bas)

6- Calculer la réponse impulsionnelle fenêtrée par (multiplier les coefficients par la fenêtre) $h[n] = h_d[n]w[n]$

Exercice

Concevoir un filtre passe-bas à phase linéaire FIR selon les spécifications suivantes :

$$\begin{aligned} 0.99 \leq |H(e^{jw})| \leq 1.01 & \quad 0 \leq |w| \leq 0.19\pi \\ |H(e^{jw})| \leq 0.01 & \quad 0.21\pi \leq |w| \leq \pi \end{aligned}$$