

Université de Boumerdès



Spécialité : Electronique des systèmes embarqués

Module: Traitement avancé du signal

Dr. Belkacem Samia

2022/2023

Chapitre 2

I. Les filtres numériques: Généralités

1)Introduction

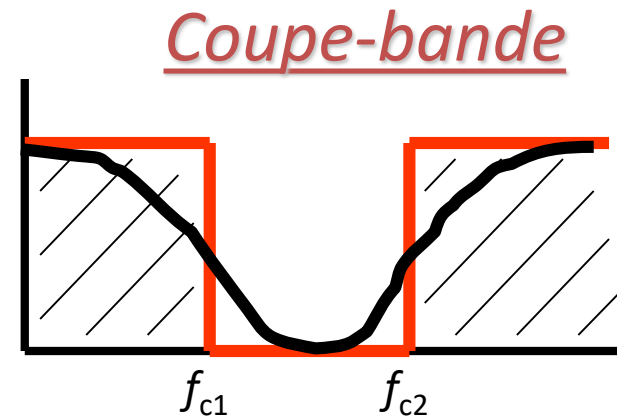
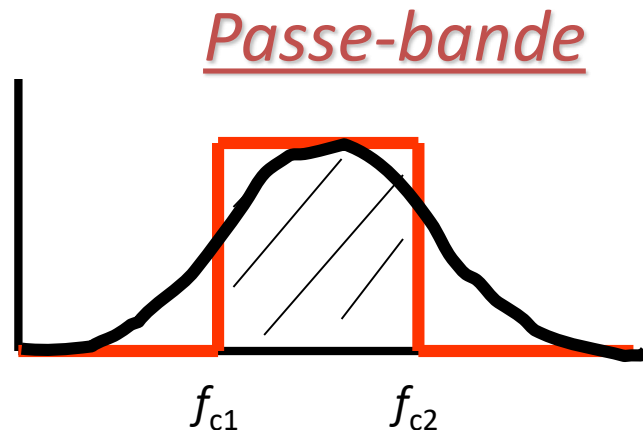
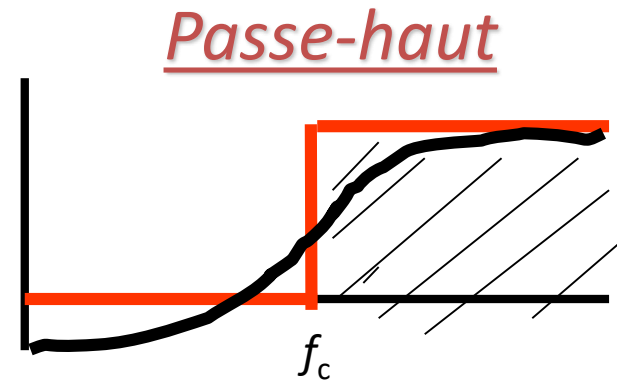
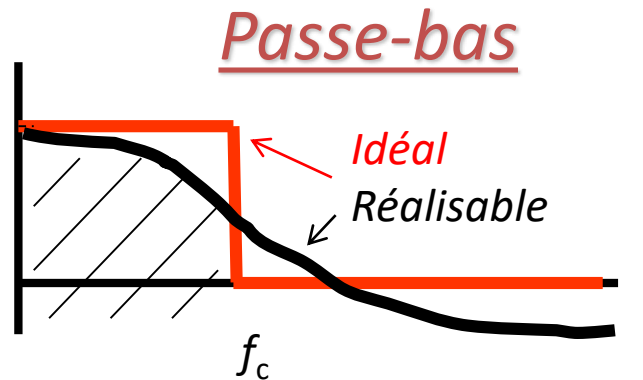
Des **exemples** d'utilisation de filtrage sont :

- Réduction de bruit pour des signaux radio, des images issues de capteurs,
- Modification de certaines zones de fréquence dans un signal audio ou sur une image.
- Limitation à une bande fréquentielle pré-définie.
- Fonctions spéciales (dérivation, intégration, transformée de Hilbert, ...).

2) Filtres analogiques

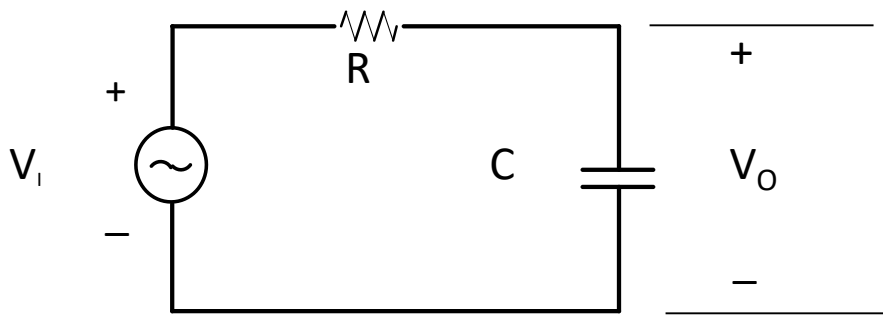
- **Basés sur des composants analogiques**
- **Les filtres passifs utilisent uniquement R, L et C et ont un gain inférieurs à 1.**
- **Les filtre analogiques actifs ajoutent des composants actifs (habituellement des amplificateurs opérationnels) pour un gain arbitraire**

2) Filtrages analogiques : Quatre types



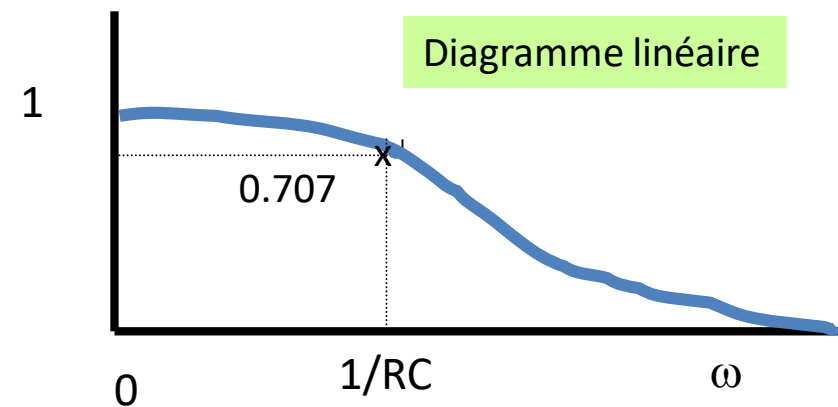
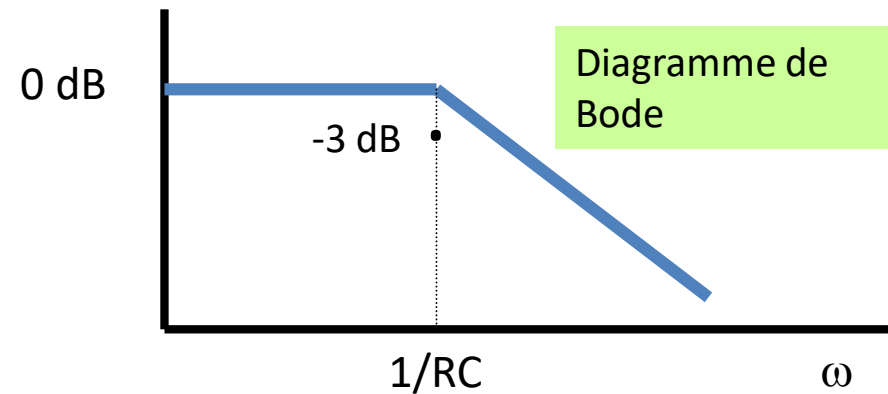
- L'analyse de la réponse en fréquence se fait généralement avec la transformée de Fourier
- La synthèse part de la transformée de Laplace

2)Filtre analogiques passifs



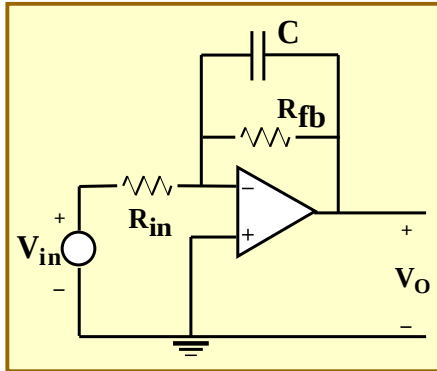
Filtre passe-bas de premier ordre

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

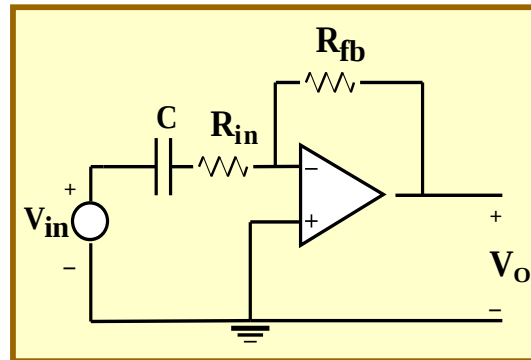


Réponse en amplitude

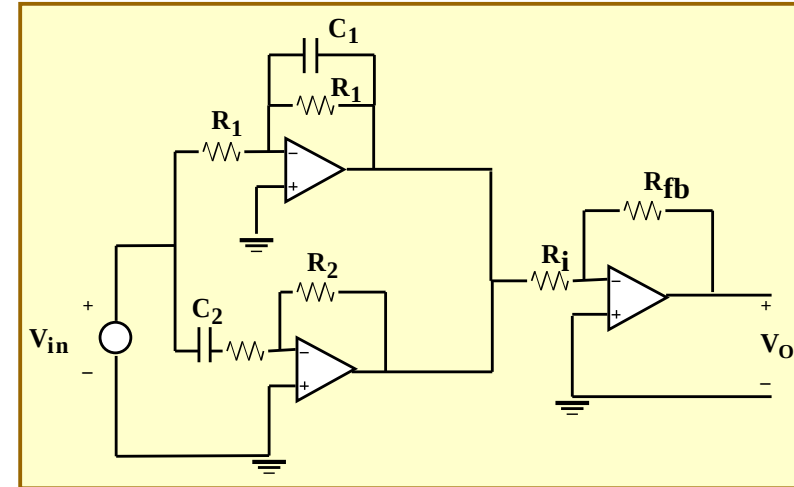
2)Filtre analogiques actifs



Filtre passe-bas du 1er ordre



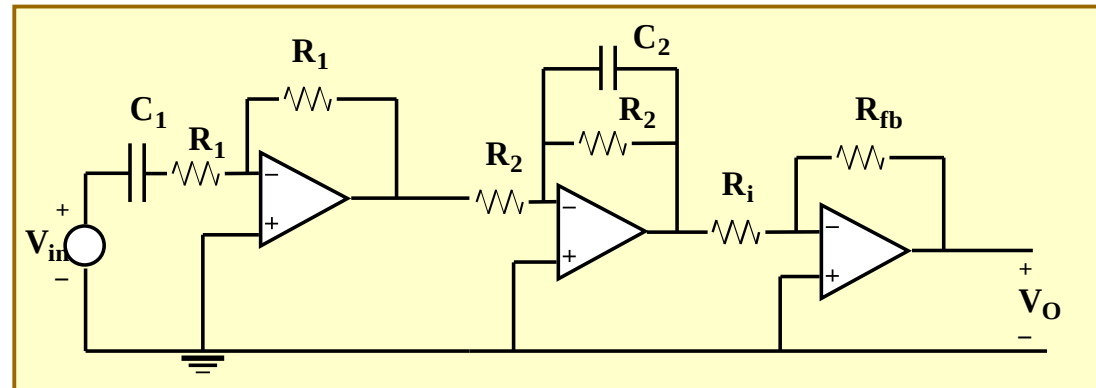
Filtre passe-haut du 1er ordre



Filtre coupe-bande du 2nd ordre

Rappel :

Pour un ampli-op inverseur : $G = -Z_f/Z_i$



Filtre passe-bande du 2nd ordre

3) Les filtres numériques

Définition

Un filtre numérique est un **algorithme de calcul** qui fait correspondre à une suite d'échantillons **x(n)** une autre suite d'échantillons **y(n)**:

Equation aux différences : Une équation reliant le nième terme à ses prédécesseurs est appelée équation récurrente ou équation aux différences

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i) + \sum_{j=1}^N a_j y(n-j)$$

x(n): l'entrée du filtre

y(n): la sortie du filtre

a_j, b_i: les coefficients du filtre

Implémentés : DSP, microprocesseur, microcontrôleurs, FPGA ou ...

3) Les filtres numériques

- une partie fonction de la valeur courante et des valeurs précédentes de l'entrée $x(n)$,
- et une partie fonction des valeurs précédentes de la sortie $y(n)$.

Fonctions de transfert rationnelle

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i Z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^N a_j Z^{-j}}$$

- si les a_j sont non nuls, on parlera de **filtres récurrents (IIR)**
- si les a_j sont nuls, on parlera donc de **filtres non récurrents (FIR)**.

3) Les filtres numériques

- passage de la transformée en z à l'équation de récurrence

*multiplier par z^{-1} revient à retarder de T_E
(théorème du retard).*

4) Equations aux différences

Exemple

Soit la fonction de transfert suivante

_____ Soit $H(z) = \frac{z^2 - 3z}{z^2 - 3z + 2}$.

Trouver l'expression de l'équation aux différences

Solution

- ① Multiplication du numérateur et du dénominateur Par z^{-2} pour n'avoir que des puissances négatives :

$$H(z) = \frac{z^2 - 3z}{z^2 - 3z + 2} \times z^{-2} = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

- ② Produit en croix :

$$Y(z)(1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}) = X(z)(1 - 3z^{-1}).$$

- ③ Utilisation du théorème du retard :

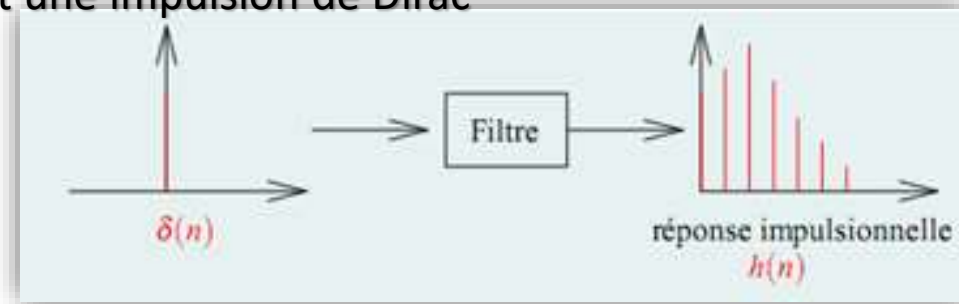
$$\begin{aligned} y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} &= x_n - 3x_{n-1} \\ \Rightarrow \boxed{y_n} &= \boxed{x_n - 3x_{n-1} + 3y_{n-1} - 2y_{n-2}} \end{aligned}$$

C'est l'équation de récurrence.

5) Réponse impulsionnelle (RI)

1) La réponse impulsionnelle, notée $h(n)$

la fonction d'entrée est une impulsion de Dirac



2) La réponse impulsionnelle (RI) est la fonction en z inverse de $H(z)$.

$$RI = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n).z^{-n}$$

5) Réponse impulsionnelle

Exemple

Soit la fonction de transfert suivante

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

1) calculer RI

2) Trouver l'expression de l'équation aux différences

Solution

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

$$(1 - 0.8z^{-1})H(z) = (5 + 2z^{-1})$$

$$H(z) = 0.8z^{-1}H(z) + 5 + 2z^{-1}$$

Il est facile d'en déduire l'équation aux différences pour h :

$$h(n) = 0.8h(n-1) + 5\delta(n) + 2\delta(n-1)$$

5) Réponse impulsionnelle

L'équation aux différences peut également être obtenue par la transformée en z :

$$\begin{array}{ccc} & & Y(z) = H(z)X(z) \\ \text{TZ}^{-1} \Big| & \downarrow & \\ & & y(n) = 0.8y(n-1) + 5x(n) + 2x(n-1) \end{array}$$

- remplacer δ par x
- remplacer h par y

6) Réponse fréquentielle

La réponse en fréquence peut être obtenue à partir de la fonction de transfert $H(z)$ en remplaçant z par $e^{j\omega}$.

La réponse en fréquence d'un signal discret $h(n)$ est donnée par :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

6) Réponse fréquentielle

Exemple

Soit la fonction de transfert:

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Calculer $|H(f)|$

Solution

$$H(\exp^{2\pi j f}) = \frac{5(1 + 0.4 \exp^{-2\pi j f})}{1 - 0.8 \exp^{-2\pi j f}}$$

$$|1 - a \exp^{-jx}| = \sqrt{1 - 2a \cos x + a^2}$$

$$|H(f)| = \frac{5\sqrt{1 + 0.8 \cos(2\pi f) + 0.16}}{\sqrt{1 - 1.6 \cos(2\pi f) + 0.64}}$$

7) Lien entre réponse fréquentielle et diagramme pole /zéros

Exemple

Soit le système défini par la fonction de transfert suivante :

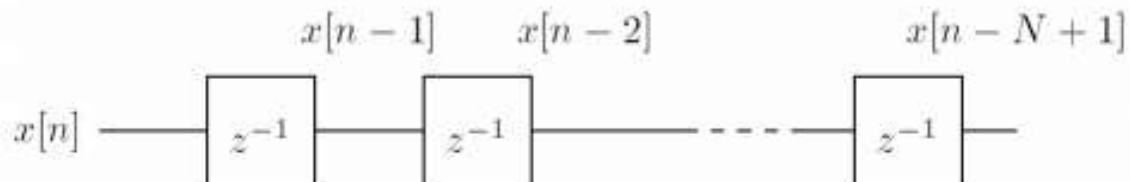
$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Tracer le module de la réponse fréquentielle de ce système.

8) Structure d'un filtre numérique

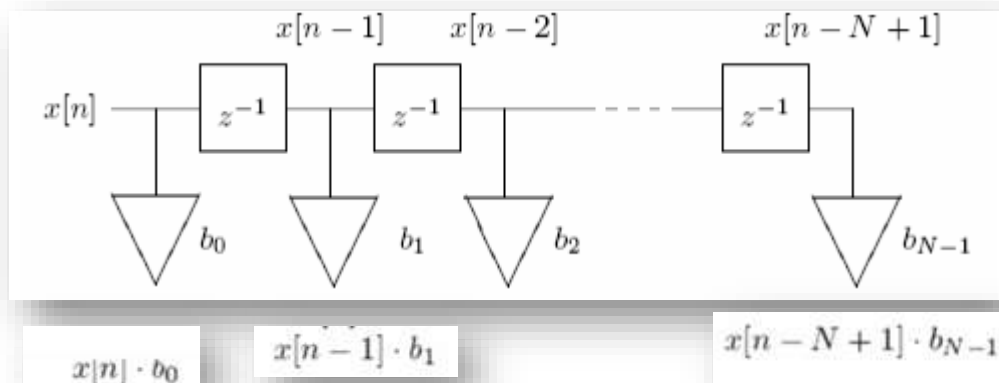
c'est un schéma qui représente l'équation aux différences à partir de trois éléments de base:

- L'élément « délai », symbolisé par z^{-1} , qui produit une sortie retardée d'une valeur par rapport à son entrée.



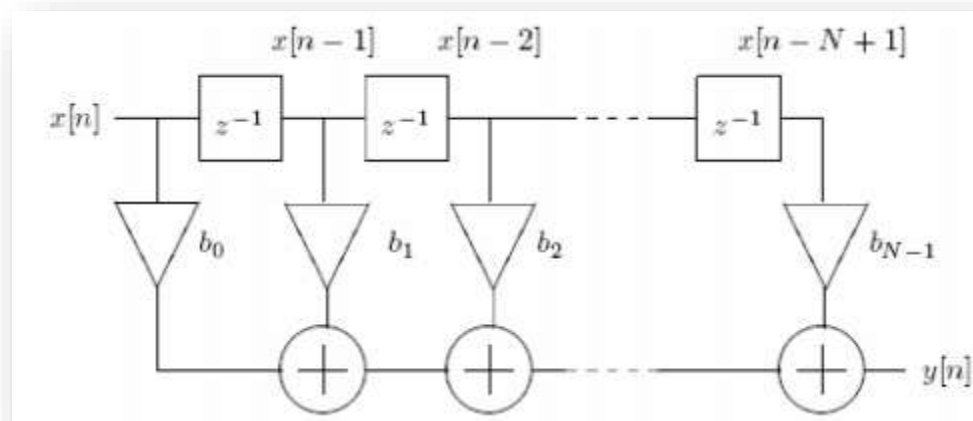
8) Structure d'un filtre numérique

➤ Le multiplieur, symbolisé par ∇ , qui multiplie un signal par un scalaire a



8) Structure d'un filtre numérique

- L'additionneur, symbolisé par $\oplus$, qui additionne les signaux à ses entrées.



8) Structure d'un filtre numérique

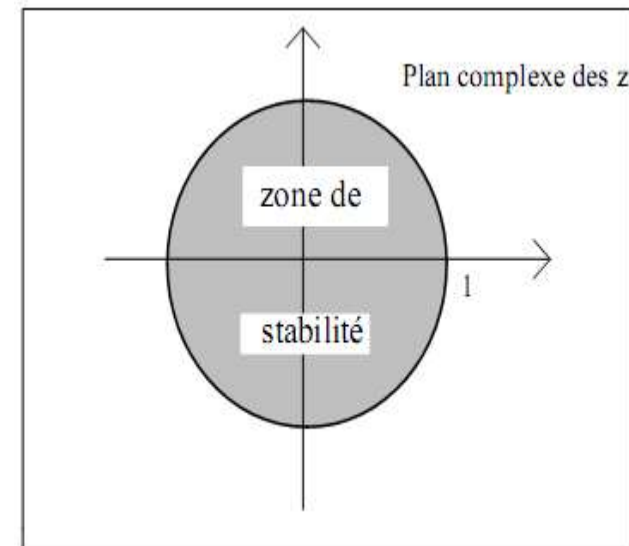
Exemple

Tracer le bloc fonctionnel correspondant à l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

9) Propriétés d'un filtre numérique : Stabilité

- a) **stabilité**: Un système sera **stable** si **tous les pôles** de sa fonction de transfert présentent un **module inférieur à 1** $\Rightarrow$ tous les pôles se trouvent à l'intérieur du **cercle** unité dans le plan complexe.
- b) **Causalité**:



Un filtre numérique est dit causal, si sa réponse impulsionnelle h_n est nulle pour $n < 0$. Sa transformée en z converge alors à l'extérieur d'un cercle.