

AHMED FIZAZI
Maître assistant chargé de cours

CAHIER

De l'

ELECTRICITE-MAGNETISME

LMD1 / PHYSIQUE-2- / ل.م.د.

(Version en Français)

COURS SIMPLIFIES
80 EXERCICES CORRIGES
(Enoncés en arabe et en français)
LEXIQUE DE TERMINOLOGIE
(français-arabe, Arabe-français)

Destiné aux étudiants de première année de
l'enseignement supérieur
LMD/1
Science de la matière et sciences technologiques

<http://sites.google.com/site/fizaziphysique>
<http://sites.google.com/site/physiquefizazi>

تصحیحات فی الکھرومغناطیسیة

ERRATA ELECTROMAGNETISME

التاریخ Date	تصحیحات Corrections
22/4/2010	عنوان صفحہ "ویب: الکھرباء الساكنة" الملف: الکھرباء الساكنة _دروس الصفحة: 34 المعادلة 54.1: نقرأ $E.2\pi R.l = \frac{\lambda.l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$ عوض $E.2\pi R.l = \frac{\lambda.l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$
22/4/2010	Titre de la page web : Electrostatique Fichier : Electrostatique_Cours Page 28 Equation 1.54 : lire $E.2\pi R.l = \frac{\lambda.l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$ au lieu de $E.2\pi R.l = \frac{\lambda.l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$
22/4/2010	عنوان صفحہ "ویب: الکھرباء الساكنة" الملف: الکھرباء الساكنة _دروس الصفحة: 38 المثال 8.1 : تصحيح $\rho = \frac{-q}{2\pi.a^3}$ عوض $\rho = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0.a^3}$
22/4/2010	Titre de la page web : Electrostatique Fichier : Electrostatique_Cours Page 32 Exemple 1.8 : lire $\rho = \frac{-q}{2\pi.a^3}$ au lieu de $\rho = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0.a^3}$
11/4/2010	عنوان صفحہ "ویب: النواقل المتوازنة" الملف: النواقل المتوازنة _دروس الصفحة: 102 الشكل 13.2 : تصحيح $+Q_1, -Q_1, \dots, +Q_n, -Q_n$ عوض $+Q, -Q, \dots, +Q, -Q$
11/4/2010	Titre de la page web : Conducteurs en équilibre Fichier : Conducteurs en équilibre_Cours Page 93 Figure 2.13 : Corriger $+Q_1, -Q_1, \dots, +Q_n, -Q_n$ au lieu de $+Q, -Q, \dots, +Q, -Q$
14/4/2010	عنوان صفحہ "ویب: النواقل المتوازنة" الملف: النواقل المتوازنة _نصوص التمارين الصفحة: 117

	التمرين 22.2 : نقرأ $U_{ED} = 0$ عوض $U_{CD} = 0$
14/4/2010	Titre de la page web : Conducteurs en équilibre Fichier : Conducteurs en équilibre_Exo_Ennoncés Page 108 Exercice 2.22 : lire $U_{ED} = 0$ au lieu de $U_{CD} = 0$

Sommaire

Avertissement.....	ii
Introduction _Principales branches de l'électricité.....	vii
Programme du module « Electricité et magnétisme ».....	vii

I. ELECTROSTATIQUE.....	1
A. NOTIONS FONDAMENTALES.....	1
1. Expériences d'électrisation.....	1
2. Charge élémentaire et quantification de la charge.....	2
3. Conducteurs et isolants.....	3
4. Explication du phénomène d'électrisation.....	4
B. LOI DE COULOMB-CAVENDISH.....	4
1. Etude quantitative et qualitative.....	4
C. LE CHAMP ELECTROSTATIQUE.....	8
1. Notion de champ électrique.....	8
2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.....	9
3. Champ électrique créé par un ensemble de charges ponctuelles.....	9
4. Champ électrique créé par une distribution continue de charge.....	10
5. Lignes ou spectre de champ.....	11
6. Applications.....	14
a. Champ électrostatique créé par un fil rectiligne infini chargé.....	14
b. Champ électrostatique créé par un disque mince chargé en surface.....	15
c. Champ électrostatique créé par un plan infini mince chargé en surface.....	17
D. POTENTIEL ELECTRIQUE.....	18
1. Circulation d'un champ de vecteurs.....	18
2. Circulation du champ électrique.....	19
3. Potentiel électrique.....	20
4. Circulation du champ électrique le long d'une courbe fermée.....	21
5. Le potentiel électrique produit par une charge ponctuelle.....	21
6. Calcul du champ $\vec{E}$ à partir de V	22
7. Le potentiel électrique produit par plusieurs charges ponctuelles distinctes.....	24
8. Le potentiel électrique produit par une distribution continue de la charge.....	24
E. LE FLUX ELECTROSTATIQUE ET LE THEOREME DE GAUSS.....	25
1. Le flux électrostatique.....	25
2. Théorème de Gauss.....	26
3. Application du théorème de Gauss.....	27
a. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.....	27
b. Champ électrostatique créé par une tige infinie chargée uniformément.....	28
c. Champ électrostatique créé par une sphère pleine uniformément chargée.....	28
d. Champ électrostatique créé par un plan infini chargé uniformément.....	29
4. Forme différentielle du théorème de Gauss.....	30
5. Notion d'angle solide.....	33
F. LE DIPOLE ELECTRIQUE.....	35
ENONCES DES EXERCICES de 1.1 à 1.25.....	38
CORRIGES DES EXERCICES de 1.1 à 1.25.....	48

II. CONDUCTEURS EN EQUILIBRE.....	82
A. DEFINITION ET PROPRIETES DES CONDUCTEURS EN	

EQUILIBRE.....	82
1. Définition.....	82
2. Propriétés des conducteurs en équilibre.....	82
3. Théorème de Coulomb.....	82
4. Pression électrostatique.....	83
5. Pouvoir des pointes.....	84
6. Capacité d'un conducteur isolé dans l'espace.....	84
7. Phénomène d'influence entre conducteurs chargés.....	85
8. Théorème des éléments correspondants.....	87
9. Capacité et coefficients d'influence.....	88
B. LES CONDENSATEURS.....	89
1. Capacité et charge d'un condensateur.....	89
2. Capacités de quelques types de condensateurs.....	90
a. condensateur sphérique.....	90
b. Condensateur cylindrique.....	91
c. Condensateur plan.....	92
3. groupement de condensateurs.....	92
a. Groupement en série.....	92
b. Groupement en parallèle.....	93
4. Energie d'un condensateur chargé.....	93
5. Energie du champ électrique.....	94
6. Densité de l'énergie électrique.....	94
7. Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance.....	95
ENONCES DES EXERCICES de 2.1 à 2.26.....	99
CORRIGÉES DES EXERCICES de 2.1 à 2.26.....	112
III. ELECTRODYNAMIQUE.....	136
A. LE COURANT ELECTRIQUE.....	136
1. Intensité du courant électrique.....	136
2. Densité du courant électrique.....	138
3. Effet Joule.....	141
4. Rappel sur l'association des conducteurs ohmiques.....	142
a. Association en série.....	142
b. Association en parallèle.....	143
c. Des équivalences utiles.....	143
d. Deux équivalences.....	143
B. ELEMENTS D'UN CIRCUIT ELECTRIQUE.....	144
1. Eléments et vocabulaire du circuit électrique.....	144
2. Nécessité d'une force électromotrice.....	145
3. Les deux types de générateurs.....	146
a. Générateurs ou source de tension.....	146
b. Générateurs ou source d'intensité.....	147
C. LES LOIS REGISSANT LES CIRCUITS ELECTRIQUES.....	147
1. Equation du circuit électrique.....	147
2. Différence de potentiel entre deux points d'un circuit.....	148
3. Groupement de générateurs.....	150
a. Générateurs de tension.....	150
b. Cas des générateurs de courant.....	151
4. Les deux lois de Kirchhoff.....	154
a. Conservation de la charge ou loi des nœuds.....	154

b. Conservation de l'énergie ou loi des mailles.....	154
5. Théorème de Thévenin.....	156
ENONCES DES EXERCICES de 3.1 à 3.20.....	160
CORRIGÉES DES EXERCICES de 3.1 à 3.20.....	169
IV. ELECTROMAGNETISME.....	187
A. LE CHAMP MAGNETIQUE.....	187
1. Définition du champ magnétique.....	187
2. Superposition de champs magnétiques.....	187
B. FORCE ELECTROMAGNETIQUE AGISSANT SUR UNE CHARGE ELECTRIQUE EN MOUVEMENT.....	188
C. FORCE ELECTROMAGNETIQUE EXERCEE SUR UN ELEMENT D'UN CONDUCTEUR RECTILIGNE.....	189
1. Loi de Laplace.....	189
2. Applications.....	190
a. Balance de Cotton.....	190
b. Effet Hall.....	191
D. LA REGLE D'AMPERE.....	192
E. LOI DE BIOT ET SAVARD.....	194
1. Enoncé de la loi.....	194
2. Application de la loi de Biot et Savard.....	194
a. Champ d'induction magnétique produit par un courant électrique infiniment long.....	194
b. Champ d'induction magnétique produit par un courant électrique circulaire..	196
c. Champ d'induction magnétique produit par un courant électrique sinusoïdal	198
F. DIPOLE MAGNETIQUE.....	200
1. Le couple électromagnétique.....	200
2. Le moment magnétique.....	201
G. INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE.....	201
1. Le flux magnétique.....	201
2. L'induction électromagnétique.....	203
ENONCES DES EXERCICES de 4.1 à 4.20.....	207
CORRIGÉES DES EXERCICES de 4.1 à 4.20.....	216
LEXIQUE DE TERMINOLOGIE FRANÇAIS-ARABE.....	240
LEXIQUE DE TERMINOLOGIE ARABE-FRANÇAIS.....	245
ANNEXES	
1. Alphabet grec.....	250
2. Gradient, divergence et Laplacien dans différentes coordonnées.....	251
3. Formules de dérivation.....	254
4. Formules d'intégration.....	256
5. Quelques équations différentielles.....	258
6. Formulaire trigonométrique.....	260
OUVRAGES.....	261

I/ ELECTROSTATIQUE

الكهرباء الساكنة

L'électrostatique est l'étude des phénomènes produits par des charges électriques à l'état de repos.

Le mot **électricité** dérive du mot grec « **elektron** » qui signifie ambre. A l'origine, c'est Thalès de Milet (625 à 545 avant Jésus Christ), né à Ionie -côte ouest de la Turquie actuelle – qui a remarqué qu'un morceau d'ambre jaune frotté préalablement avec de la laine attire des brindilles de paille.

A/ NOTIONS FONDAMENTALES (المفاهيم الأساسية) :

1/ EXPERIENCES D'ELECTRISATION :

Si on approche un peigne à de petits bouts de papier, après s'être peigné, on voit que ces bouts sont attirés par le peigne. Le même phénomène se produit si on approche d'eux un bâton de verre frotté avec de la soie ou un bâton d'ambre frotté avec de la laine.

❖ Première expérience : (Figure 1.1-a)

On suspend par un fil une boule faite de sureau ou de polystyrène par exemple. On approche de cette boule une tige de verre ou d'ambre préalablement frottée : les deux tiges, chacune de son côté, l'attirent, puis la repoussent juste après l'avoir contactée. Par contre, si on approche simultanément les deux tiges côte à côte de la boule, rien ne se passe. (Figure 1.1-b)

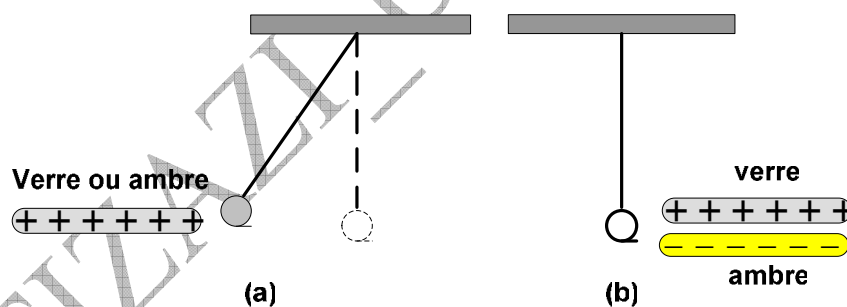


Fig 1.1 : Expérience d'électrification

❖ Deuxième expérience : (Figure 1.2)

Si les deux boules de la figure 1.2, ont été électrisées suite à leur contact avec l'une des tiges frottées, elles se repoussent. Par contre les deux boules s'attirent si chacune d'elles a touché l'une des deux tiges qui a été frottée et qu'elle est de matière différente de celle de l'autre tige.

Nous en déduisons de ces expériences que ces matériaux ont acquis une nouvelle propriété qu'on appelle « **électrisation** ». Cette propriété crée une attraction beaucoup plus intense que l'attraction universelle produite entre deux masses.

Nous en concluons que chaque particule est caractérisée par deux propriétés principales et indépendantes :

- sa masse m
- Sa charge électrique q

Des expériences simples, comme celles que nous venons de décrire, montrent l'existence de deux états d'électrisation correspondant à deux types de charges électriques qualifiées de **charge positive (+)** et **charge négative (-)**. Cette classification revient au physicien Benjamin Franklin (1706-1790). Nous rappelons la règle suivante :

Deux corps qui portent une charge électrique de même signe se repoussent, et s'attirent s'ils portent deux charges électriques de signes contraires.

D'après la figure 1.2, chaque boule s'électrise par la même charge que porte la tige frottée avec laquelle elle a été mise en contact.

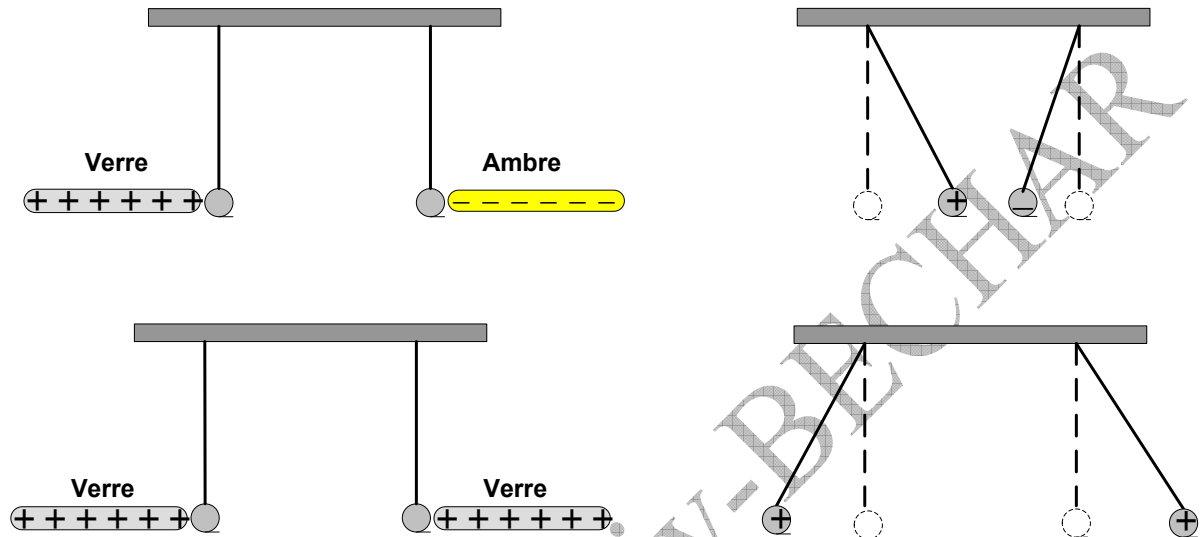


Fig1.2 : Électrisation, attraction et répulsion entre des charges

2/ CHARGE ELECTRIQUE ELEMENTAIRE ET QUANTIFICATION DE LA CHARGE ELECTRIQUE (الشحنة الأساسية و تكميم الشحنة الكهربائية)

Les propriétés électriques de la matière trouvent leur principe au niveau de l'atome.

La matière est constituée, comme on le sait, d'atomes. Chaque **atome (ذرة)** est constitué d'un **noyau (نواة)** (découvert en 1911 par Ernest Rutherford of Nelson 1871-1937), autour duquel gravite un nuage formé d'**électrons (إلكترونات)**. Ces électrons se repoussent entre eux mais restent positionnés autour du noyau. Le noyau est constitué de **protons (بروتونات)**, qui portent des charges positives, et de **neutrons (نوترونات)** qui son dépourvus de charge (découverts en 1932 par James Chadwick 1891-1935). L'ensemble des particules qui forment le noyau s'appelle **nucléons (النوكليونات)**.

Les électrons et les protons portent la même charge électrique en valeur absolue qu'on note par e . Cette charge électrique est appelée la **charge élémentaire (الشحنة الأساسية)** ou **quanta (كم)** de la charge électrique dont la valeur est:

$$e = 1,602.10^{-19} \text{ [A.s = C]} \quad (1.1)$$

La force électrique qui s'exerce entre les protons, chargés positivement, et les électrons, chargés négativement, est responsable de la cohésion des atomes et des molécules. La charge totale des atomes non ionisés (c'est-à-dire qui n'ont ni perdu ni gagné d'électrons) est nulle.

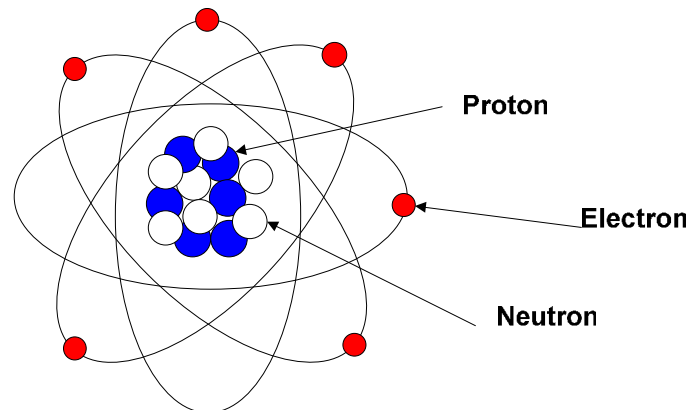


Fig1.3: structure de l'atome

Une charge électrique ne peut prendre n'importe quelle valeur. En effet chaque charge électrique est toujours un **multiple entier** de la charge élémentaire :

$$q = \pm n.e \text{ [A.s = C] , } n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

Ceci traduit le principe fondamental de la **quantification** de la charge électrique.

Dans un système fermé, la somme algébrique des charges électriques présentes est constante au cours du temps et ce, quelque soient les phénomènes qui se produisent dans ce système.

C'est là l'énoncé du principe de la conservation de la charge électrique d'un système fermé.

En réalité, l'étude poussée de la physique de haute énergie a prouvé que les protons et les neutrons sont eux-mêmes constitués d'autres particules élémentaires appelées **quarks** portant une charge électrique fractionnaire. Cependant, et jusqu'à nos jours les chercheurs n'ont pas pu isoler ces particules qui portent une partie de la charge élémentaire. Citons deux

types de quarks : $u = +\frac{2}{3}e$, $d = -\frac{1}{3}e$

Exemple 1.1 : Calculer le nombre de charges élémentaires qui constitue une charge de 1 coulomb.

Réponse : $n = \frac{1}{1,60 \cdot 10^{-19}}$ et donc $n = 625 \cdot 10^{16}$ charges élémentaires.

3/ CONDUCTEURS ET ISOLANTS (النواقل والعوازل)

N'importe quelle matière est constituée d'un grand nombre de charges électriques, cependant ces charges se compensent et s'annulent (nombre d'électrons = nombre de protons). A la température ordinaire, la charge électrique totale de la matière est nulle. Quand il se produit une électrisation, cela se traduit par un déplacement de charges d'un corps vers un autre.

Cette charge qui apparaît sur le corps, par excès ou par défaut, est responsable des effets électriques qui apparaissent sur le corps (comme la tige frottée par exemple).

Dans un atome, les électrons gravitent autour du noyau sur des couches distinctes. Les électrons des couches externes susceptibles de se libérer peuvent participer à la conductivité électrique.

Si la couche externe d'un élément chimique est proche de la saturation, elle ne peut donc céder aucun électron, mais cherche à capter un électron ou plus jusqu'à la saturation. Un tel élément est dit **isolant**. Par contre si la couche externe d'un élément chimique est loin de la saturation, alors l'élément perd facilement un électron ou plus. Un tel élément est considéré comme étant bon **conducteur**.

En conséquence, un bon conducteur est l'élément qui contient un grand nombre d'électrons libres (c'est-à-dire les électrons qui ont la liberté de se déplacer). Par contre, l'isolant est l'élément qui possède peu d'électrons libres. L'isolant idéal est celui qui ne possède aucun électron libre.

Notons que dans les liquides, les porteurs de charges sont les ions (الشوارد).

En conclusion, nous disons d'un corps qu'il est un conducteur idéal si les porteurs de charges- après l'électrisation du corps- peuvent se déplacer en toute liberté dans tout le volume occupé par la matière. Le corps est classé isolant si les porteurs de charges restent dans la même région, là où elles sont apparues.

4/ EXPLICATION DU PHENOMENE D'ELECTRISATION (تفسير ظاهرة التكهرب)

Comme nous l'avons signalé auparavant, les atomes des matériaux contiennent dans leur état naturel un nombre équivalent d'électrons et de protons. Ces matériaux sont donc électriquement neutres (non chargés), et aucun effet électrique n'apparaît. Mais si cet équilibre naturel de charges est rompu- augmentation ou diminution du nombre d'électrons pour une raison quelconque- la matière devient alors chargée électriquement.

D'une façon générale, tous les phénomènes de l'électrisation s'expliquent par un déplacement d'électrons, en négligeant la variation de la masse qui accompagne l'opération de déplacement.

Le verre frotté, comme par exemple, perd des électrons, il s'électrise donc positivement. Quant au plastique frotté il capte des électrons et s'électrise négativement.

B/ LOI DE COULOMB-CAVENDISH (قانون كولومب-كافنديش) :

C'est le physicien français Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) qui a établi en 1785 la loi qui porte son nom. A noter que selon l'histoire des sciences, la loi de Coulomb aurait été découverte en premier par le physicien anglais Henry Cavendish, mais que ces travaux restèrent longtemps non publiés. Il est plus juste donc d'appeler cette relation, la loi de Cavendish-Coulomb.

1/ ETUDES QUANTITATIVE ET QUALITATIVE :

Pour faire la mesure quantitative de la force d'attraction ou de répulsion électrique entre deux corps chargés, nous pouvons réaliser le montage de la figure 1.4. Cette figure représente deux particules portant deux charges q_1 et q_2 , de masses respectives m_1 et m_2 , séparées par une distance .

A partir de cette expérience, on dégage les quatre caractéristiques suivantes de la force électrostatique $\vec{F}_e$:

- Sa direction est la droite passant par les deux charges,
- son intensité est inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux particules,
- Elle est proportionnelle à la charge de chacune des deux particules q_1 et q_2 ,
- pour une distance donnée entre les deux particules, son intensité est indépendante du signe de chacune des deux charges.

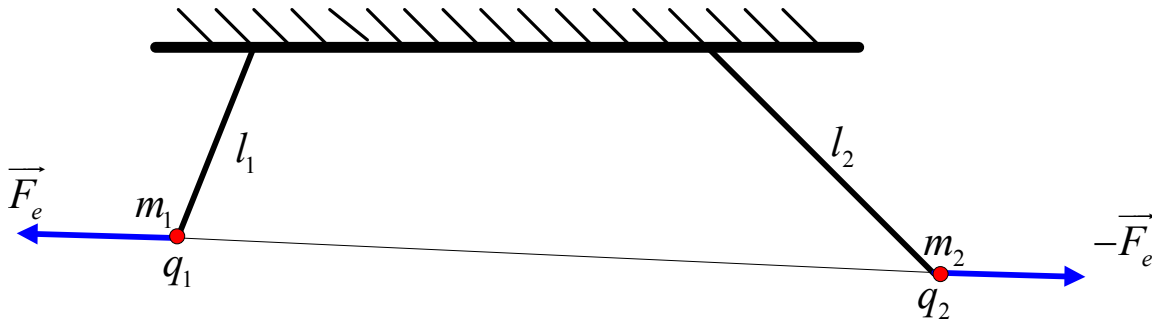


Fig 1.4 : montage pour vérifier la loi de Coulomb-Cavendish

La force électrostatique qu'exerce la charge q_1 sur la charge q_2 , et vis versa, est exprimée par la formule expérimentale sous forme :

Vectorielle :

$$\vec{F}_e = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u} \quad [\text{N}] \quad (1.3)$$

$\vec{u}$ représente le vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$

Scalaire :

$$F_e = K \cdot \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2} \quad [\text{N}] \quad (1.4)$$

Dans le système international des unités, la constante K est définie par la relation :

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \text{ où } \epsilon_0 \text{ représente la permittivité du vide (سماحية أو نفاذية الفراغ).}$$

La valeur expérimentale de K est :

$$K = 8,9875 \cdot 10^{+9} \left[\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right]$$

Pratiquement nous prenons $K \simeq 9 \cdot 10^{+9} [\text{Nm}^2 \text{C}^{-2}]$

$$\text{Donc } \epsilon_0 \text{ prend la valeur : } \epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2} \right] \quad (1.5)$$

Il existe une autre relation pour le calcul de ϵ_0 qui est $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2}$ où c représente la célérité de la lumière dans le vide ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$).

Discussion :

$q_1 \cdot q_2 > 0$: les deux charges sont de même signe $\Rightarrow$ il y a répulsion, la force $\vec{F}_e$ éloigne les deux charges.

$q_1 \cdot q_2 < 0$: les deux charges sont de signes contraires $\Rightarrow$ il y a attraction, la force $\vec{F}_e$ rapproche les deux charges.

D'après le principe de l'action et de la réaction $\vec{F}_{q_1} = -\vec{F}_{q_2}$.

L'expression de la loi de Coulomb nous rappelle celle de la force de l'attraction universelle que nous avons rencontrée dans le cours de mécanique. A l'exception de la valeur numérique de la constante K , cette loi a exactement les mêmes caractéristiques vectorielles que celles de la force d'attraction universelle (loi de Newton). C'est pour cette raison qu'il n'est pas étonnant de trouver une similitude entre les deux forces.

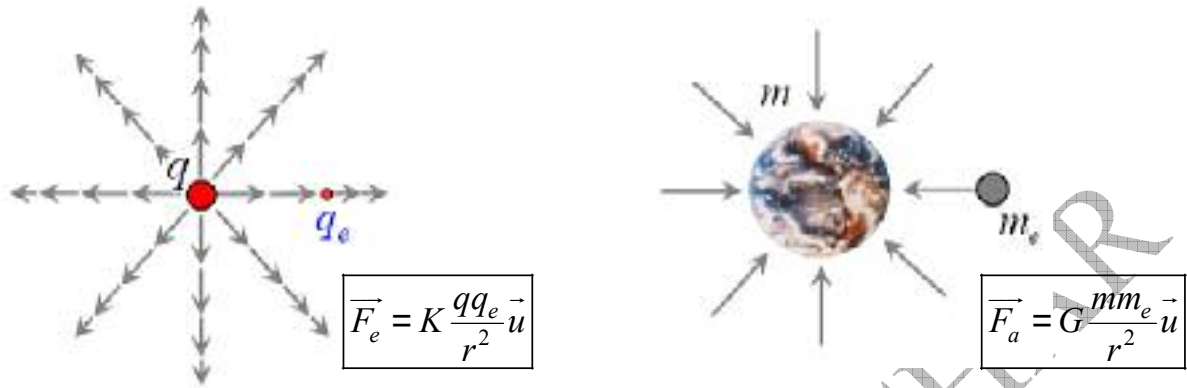


Fig 1.5 : Comparaison entre la force newtonienne et la force Coulombienne

Exemple 1.2 :

Quel est le rapport entre la force newtonienne de l'attraction universelle et la force coulombienne de répulsion entre deux électrons ?

Réponse :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K \frac{e^2}{r^2}}{G \frac{m_e^2}{r^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{F_e}{F_g} = \frac{K.e^2}{G.m_e^2}} ; \boxed{\frac{F_e}{F_g} \approx 4.10^{42}}$$

Exemple 1.3 :

Quelle est la force de répulsion coulombienne entre deux charges de $1C$ séparées par la distance de $1km$?

Réponse :

$$\boxed{F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}} ; F_e = 9.10^9 \frac{1}{(10^3)^2} ; \boxed{F_e = 9.10^3 N}$$

Remarque :

Dans le cas général, si on a n charges électriques dans le vide, le principe de superposition (مبدأ التراكب) permet de faire la somme vectorielle des forces électrostatiques. Ce principe n'est valable que dans le seul cas de charges au repos.

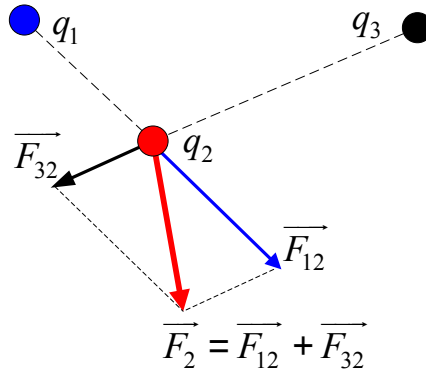


Fig 1.6 : Principe de superposition des forces

Exemple 1.4 :

A partir de la figure 1.7, calculer l'intensité de la résultante agissant sur la charge q_3 .

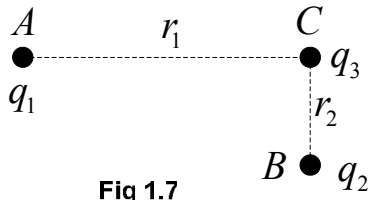


Fig 1.7

$$q_1 = -1,5mC ; q_2 = 0,5mC ; q_3 = 0,2mC$$

$$r_1 = AC = 1,2m ; r_2 = BC = 0,5m$$

Réponse :

Raisonnons à partir de la figure 1.8 :

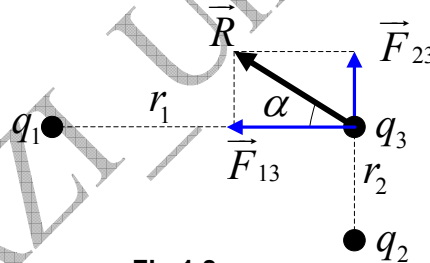


Fig 1.8

Puisque $q_1 \cdot q_3 < 0$, donc $\vec{F}_{13} < 0$ est une force d'attraction,

Et puisque $q_2 \cdot q_3 > 0$, donc $\vec{F}_{23} > 0$ est une force de répulsion.

D'où :

$$\vec{F}_{13} = -K \frac{q_1 q_3}{r_1^2} \vec{u}_1 ; F_{13} = 9 \cdot 10^9 \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \times 0,2 \cdot 10^{-3}}{(1,2)^2} \Rightarrow F_{13} = 1,875 \cdot 10^3 N$$

$$\vec{F}_{23} = K \frac{q_2 q_3}{r_2^2} \vec{u}_2 ; F_{23} = 9 \cdot 10^9 \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \times 0,2 \cdot 10^{-3}}{(0,5)^2} \Rightarrow F_{23} = 3,6 \cdot 10^3 N$$

$$R = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2} \Rightarrow \boxed{R = 4,06 \cdot 10^3 N}$$

Quant à l'angle α que forme la résultante $\vec{R}$ avec la droite AC il est égal à :

$$\tan \alpha = \frac{F_{23}}{F_{13}} ; \tan \alpha = 1,92 \Rightarrow \boxed{\alpha = 62.49^\circ}$$

C/ CHAMP ELECTROSTATIQUE (الحقل الكهروساكن):

Le fait que deux charges voisines soient soumises à deux forces d'attraction ou de répulsion, nous entraîne à considérer que toute charge électrique modifie les propriétés physiques du champ spatial qui l'entoure. Pour décrire cette modification, on dit que toute charge électrique crée dans le champ spatial qui l'entoure un champ électrique.

1/ NOTION DE CHAMP ELECTRIQUE (مفهوم الحقل الكهربائي):

Définition qualitative : On dit qu'il existe un champ électrique en un point donné de l'espace, si une force électrostatique $\vec{F}_e$ agit sur une charge électrique q_0 ponctuelle placée en ce point.

Définition quantitative : On appelle champ électrostatique $\vec{E}$, le rapport entre la force électrostatique $\vec{F}_e$ et la charge q_0 soumise à cette force $\vec{F}_e$. figure 1.9.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}} \quad (1.6)$$

Dans le système international des unités, le champ électrique est exprimé en volt par mètre (Vm^{-1}).

Puisque $\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_e}{q_0}$, cela implique que $\vec{E}(M)$ et $\vec{F}_e$ ont la même direction.

Quant au sens du champ, il dépend dans ce cas du signe de q_0 , c'est-à-dire de la charge qui est soumise à la force électrique. Fig 1.10.

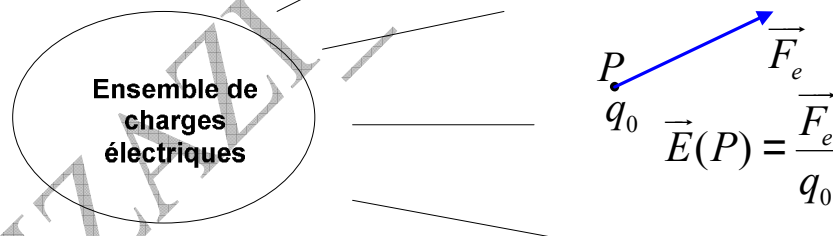


Fig 1.9 : Champ électrique en un point de l'espace

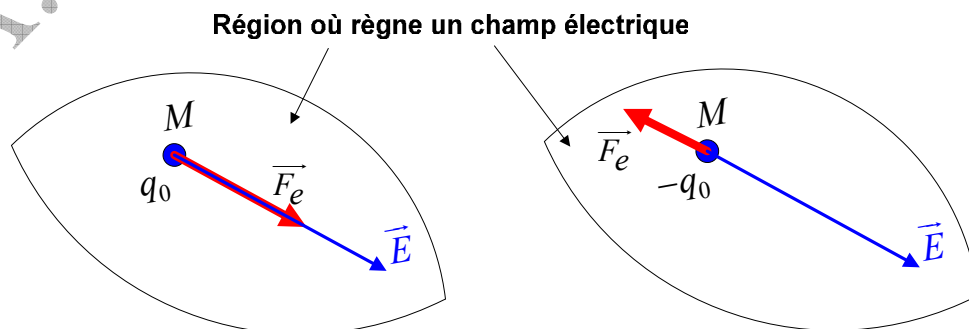


Fig 1.10 : Champ électrique produit par une charge

2/ CHAMP ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

(الحقل الكهروساكن الناتج عن شحنة نقطية) :

Définition : lorsqu'une charge q se trouve au point O , elle crée alors, en tout point M de l'espace qui l'entoure un champ vectoriel, appelé champ électrostatique exprimé par la relation :

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_e}{q_M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{u} \quad (1.7)$$

q : la charge présente au point O .

q_M : une charge teste placée au point M (elle n'a aucune influence sur le calcul du champ électrique), elle subit l'action de la force $\vec{F}_e$.

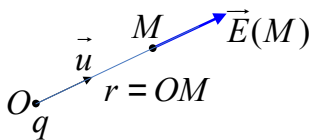


Fig 1.11 : Champ électrique créé par une charge ponctuelle

En résumé, le champ électrique produit par une charge ponctuelle est:

- radial: sa direction passe par la charge

- dirigé vers l'extérieur si $q > 0$,

- dirigé vers l'intérieur si $q < 0$,

Son intensité: $E(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2} \quad (1.8)$

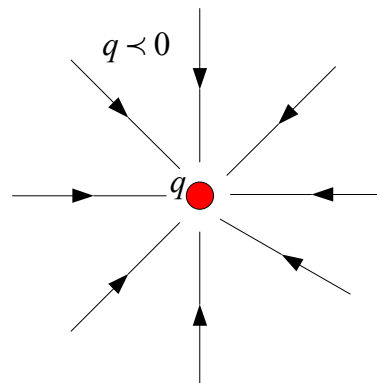
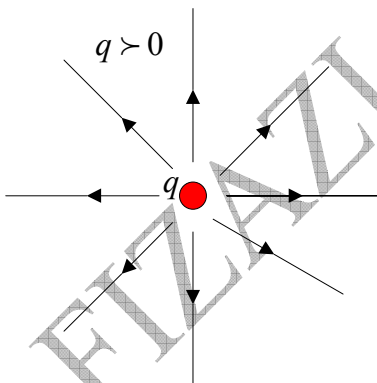


Fig 1.12 : Sens du champ électrique dans les deux cas, d'une charge positive, et d'une charge négative

3/ CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UN ENSEMBLE DE CHARGES PONCTUELLES

(الحقل الكهربائي الناتج عن عدة شحنات نقطية) :

Si maintenant, on a n particules électriques q_i , situées aux points P_i , quel serait alors le champ électrique produit par cet ensemble de charges au point M ?

Comme pour les forces, le principe de superposition est aussi valable pour les champs électriques. (Un principe ne peut pas être démontré mais il trouve sa vérification dans l'expérience).

La figure 1.13 montre la méthode géométrique à suivre pour la composition de plusieurs champs électriques. On a donc :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i} \quad (1.9)$$

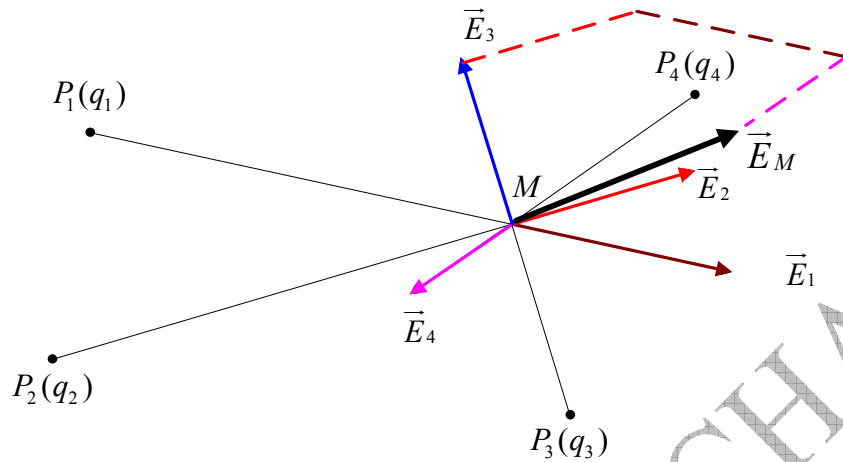


Fig 1.13 : Composition des champs en un point

4/ CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES (الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع مستمر للشحنة) :

Dans le cas d'un très grand nombre de particules, celles ci peuvent être réparties uniformément suivant une droite, sur une surface plane ou dans un volume.

Dans une telle répartition de charge, le principe de superposition reste toujours valable. On divise cette répartition en un nombre infini de très petits volumes, ou surfaces, ou segments rectilignes élémentaires chargés, puis on calcule le champ $d\vec{E}$ que chacun de ces éléments crée. On fait ensuite la somme vectorielle des champs élémentaires $d\vec{E}$. Comme on prend des éléments infiniment petits, on transforme la somme ($\sum$) en une intégrale triple ($\iiint$), double ($\iint$) ou simple ($\int$), selon que l'on considère un volume, une surface ou une longueur.

On aura donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} \quad (1.10)$$

Attention !! Ne pas croire que $E = \int dE$, car les $d\vec{E}$ sont des vecteurs non forcément parallèles entre eux. Il serait donc archifaux de faire la somme de leurs modules ($E \neq \int dE$).

Dans un système d'axes cartésiens O_{xyz} , on a :

$$d\vec{E} = dE_x \cdot \vec{i} + dE_y \cdot \vec{j} + dE_z \cdot \vec{k} \quad (1.11)$$

Par intégration on arrive à :

$$\vec{E} = \int (dE_x \cdot \vec{i} + dE_y \cdot \vec{j} + dE_z \cdot \vec{k}) = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j} + E_z \cdot \vec{k} \quad (1.12)$$

On obtient par la suite :

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad E_z = \int dE_z \quad (1.13)$$

En tous les cas, la relation qu'il faut retenir est :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M)} \quad (1.14)$$

Sachant que :

$$\boxed{d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \vec{u}} \quad (1.15)$$

Pour éclaircir encore plus ce principe on va étudier un peu plus loin trois applications.

5/ LIGNES OU SPECTRE DE CHAMP (خطوط الحقل الكهربائي (أو الطيف الكهربائي) :

❖ **Description de l'expérience :** dans un récipient contenant de l'huile, plongeons deux électrodes chargées, l'une positivement ($q_1 > 0$) et l'autre négativement ($q_2 < 0$), et saupoudrons sur la surface d'huile des grains de la grosse semoule (ou des grains de gazon naturel).

❖ **Observation :** On voit que les grains de semoule (ou du gazon) dessinent des courbes que nous appelons **lignes du champ électrique**. Figure 1.14.

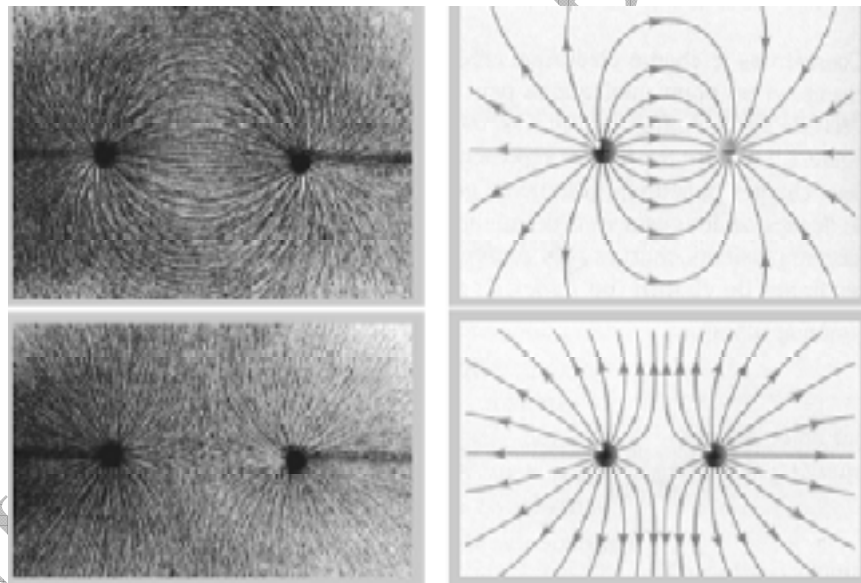


Fig 1.14 : Grains de gazon à la surface d'huile, photos et schémas

❖ **Interprétation :** Sous l'effet du champ produit par les charges q_1 et q_2 , les grains se polarisent. Ainsi chaque grain devient un dipôle électrique. Les charges sont alors soumises aux forces électriques appliquées par q_1 et q_2 . Ces forces sont responsables de l'orientation de chaque grain parallèlement aux forces. Figure 1.15.

Définition : Les lignes de champ sont des lignes orientées, tangentes en chaque point au vecteur champ $\vec{E}$ et passent par la charge q . Figure 1.16.

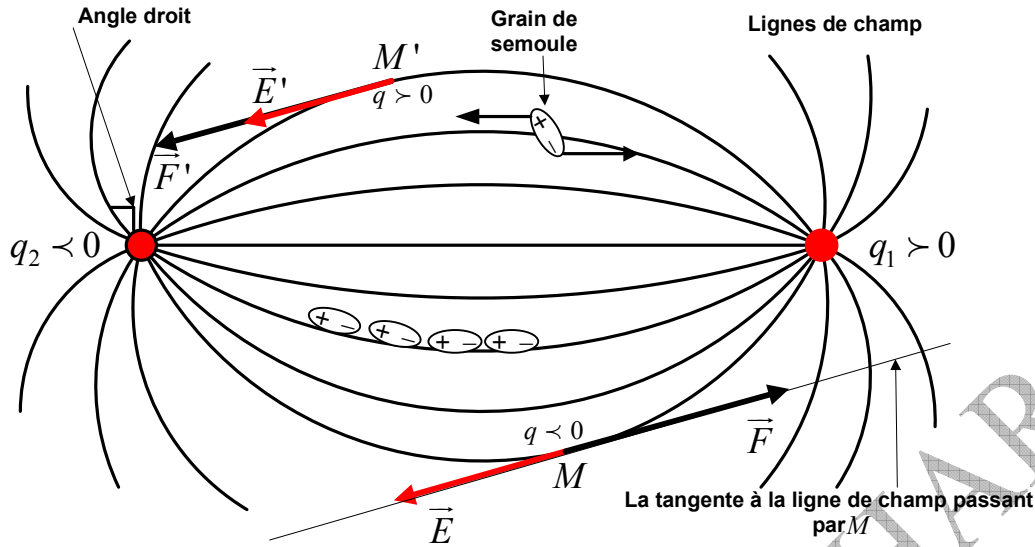


Fig 1.15 : Lignes de champ dessinées par les grains de semoule

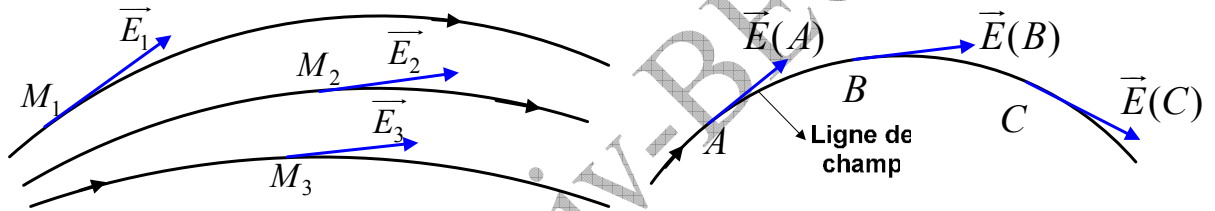


Fig 1.16 : Lignes de champ électrique

Dans le cas d'une charge ponctuelle, les lignes de champ sont des demi-droites qui se coupent au point où se trouve la charge. Si la charge est positive, le champ est dirigé vers l'extérieur, on dit qu'il est partant, il en va de même pour les lignes de champ. Le contraire est vrai pour la charge négative, les lignes de champ convergent vers la charge, le champ dans ce cas est dirigé vers la charge. Figure 1.17.

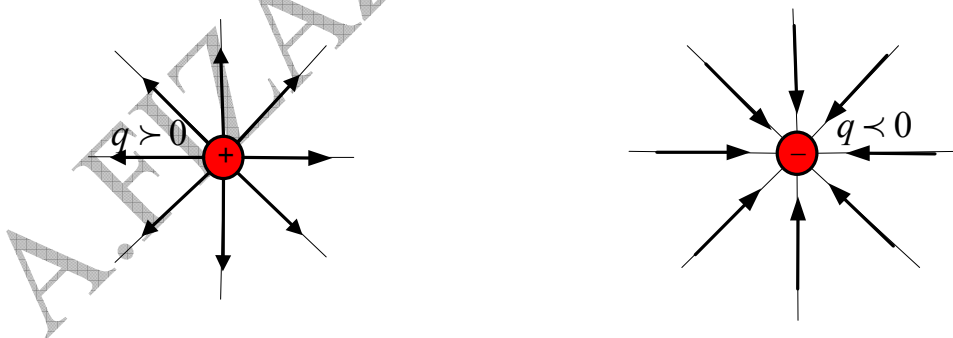


Fig 1.17 : Lignes de champ pour les deux types de charges séparées

La figure 1.18 représente les lignes de champ autour de deux charges ponctuelles voisines égales mais de signes contraires.

La figure 1.19 représente les lignes de champ autour de deux charges ponctuelles voisines égales portant la même charge.

La figure 1.20 représente les lignes d'un champ uniforme (il existe entre deux plaques parallèles rapprochées, portant des charges égales en valeur absolue, mais de signes contraires). A l'exception des bords du condensateur formé, les lignes de champ à l'intérieur du condensateur sont parallèles entre elles et perpendiculaires au deux plaques et d'égales densités.

La figure 1.21 représente les lignes de champ d'un conducteur en pointe.

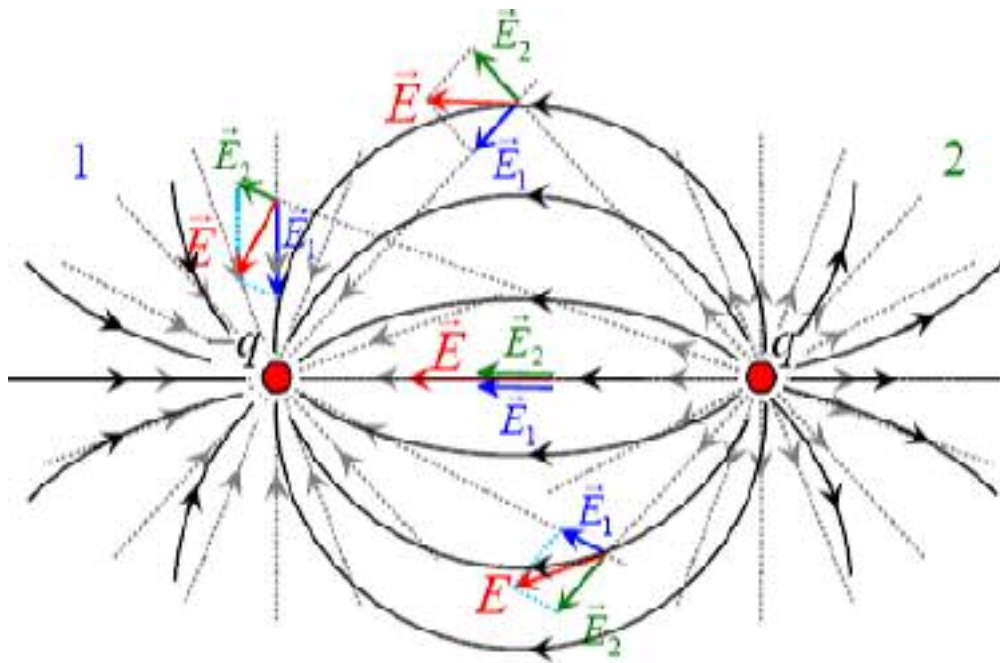


Fig 1.18 : Lignes de champ de deux charges égales et de signes contraires

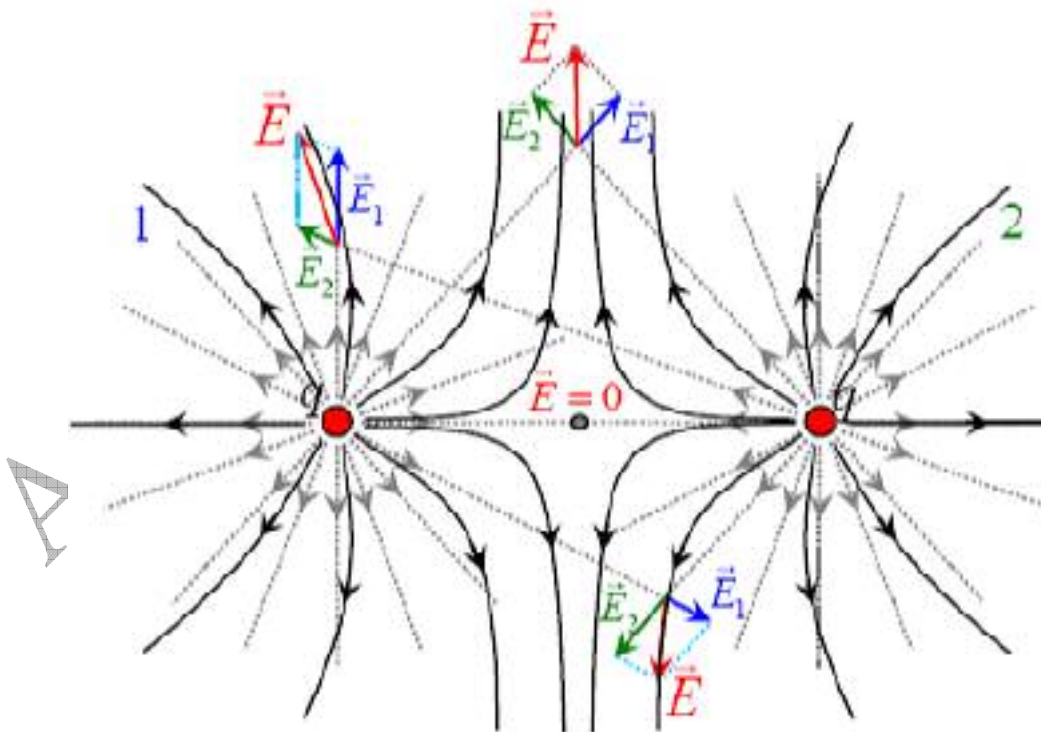


Fig 1.19 : Lignes de champ de deux charges égales

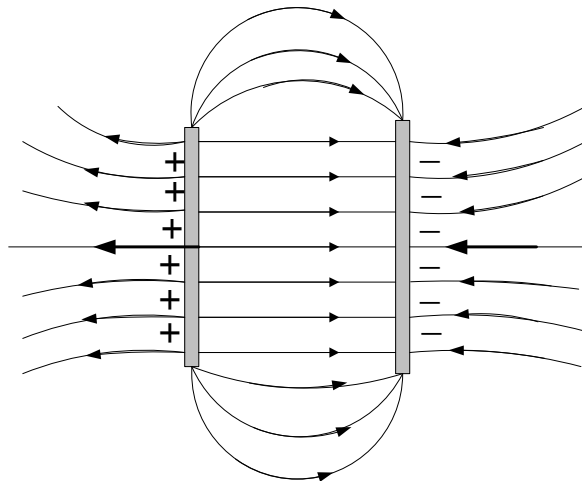


Fig 1.20 : Lignes de champ d'un champ électrique uniforme

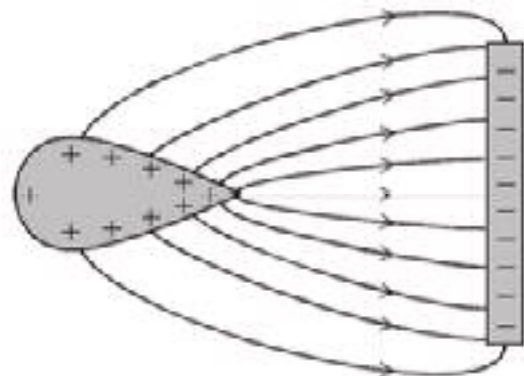


Fig 1.21 : Champ électrique d'un conducteur pointu

6/ APPLICATIONS :

a/ Première application : Le champ électrostatique produit par un fil fin de longueur infinie et portant une charge linéique positive de densité λ constante.

On se propose de calculer le champ électrique statique $\vec{E}$ produit au point P par l'ensemble de la charge que porte le fil. Figure 1.22

Solution : le petit élément que l'on doit prendre en considération est un segment rectiligne de longueur dx , portant la charge élémentaire $dq = \lambda \cdot dx$:

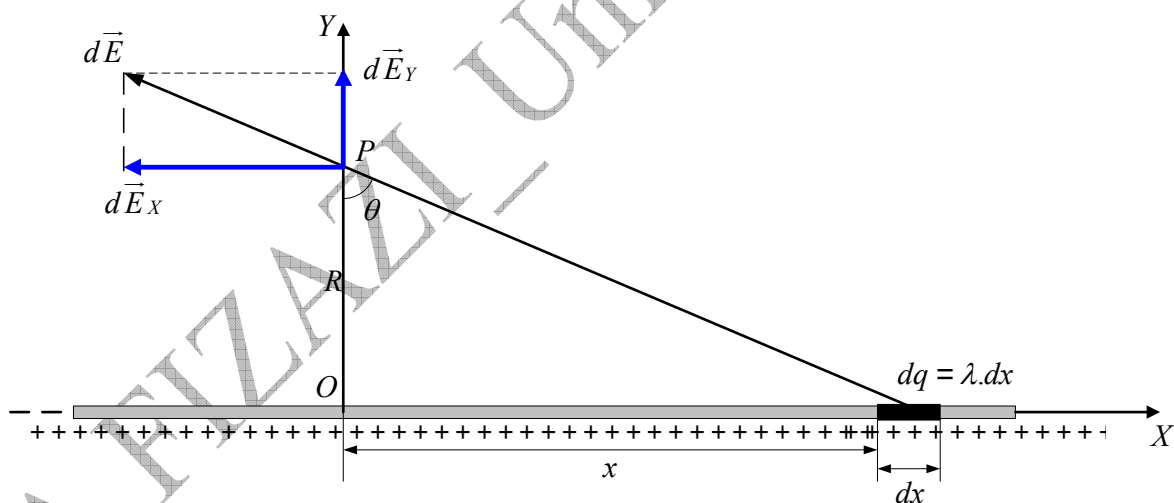


Fig 1.22 : Champ électrostatique produit par un fil chargé au point P

Le champ élémentaire $d\vec{E}$ produit par la charge dq est situé sur le prolongement du segment rectiligne de longueur dx et reliant P à dq .

En appliquant la relation 1.14 on obtient :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{r^2}$$

Sachant que : $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$

Et d'après la figure 1.22, on a :

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cdot \sin \theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \cdot \cos \theta$$

Soit :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{r^2} \cdot \sin \theta$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{r^2} \cdot \cos \theta$$

On remarque que r, θ, x sont des variables, tandis que R est constant. On en déduit géométriquement que :

$$x = R \cdot \tan \theta \Rightarrow dx = R \cdot d\theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$r = \frac{R}{\cos \theta}$$

Suite à cela, on obtient :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{r^2} \cdot \sin \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(R/\cos^2 \theta) \cdot d\theta}{R^2/\cos^2 \theta} \cdot \sin \theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{R} \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \cdot [-\cos \theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Rightarrow \boxed{E_x = 0}$$

Ce résultat ($\vec{E}_x = \vec{0}$) était prévisible vu la symétrie du problème.

Quant à la composante normale elle est calculée de la même façon :

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{r^2} \cdot \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(R/\cos^2 \theta) \cdot d\theta}{R^2/\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{R} \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \cdot [\sin \theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Rightarrow \boxed{E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R}}$$

Finalement on obtient :

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E}_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \vec{j}}$$

La même méthode est conseillée s'il s'agit d'un anneau fin. On peut aussi s'aider de la deuxième application.

b/ Deuxième application : Le champ électrostatique produit par un disque fin et portant une charge surfacique positive de densité σ constante.

Un disque de centre O et de rayon R porte une charge uniforme de densité surfacique $\sigma > 0$. Soit OX l'axe perpendiculaire au disque en son centre O .

Calculer en fonction de x le champ $\vec{E}$ en tout point de l'axe $X'X$. (On étudie les trois cas : $x > 0$; $x < 0$; $x = 0$).

Solution : Soit P un point de l'axe OX tel que $OP = x$. Calculons le champ produit par la charge surfacique en ce point. Figure 1.23.

Le petit élément que nous devons prendre en considération est la couronne d'épaisseur d de surface dS et qui porte la charge élémentaire : $dq = \sigma.dS = \sigma.2\pi r.dr$

En appliquant la relation 1.14, on peut calculer le champ élémentaire $d\vec{E}$ créée par la charge dq :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{b^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma.2\pi r.dr}{b^2}$$

Sachant que : $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_z$

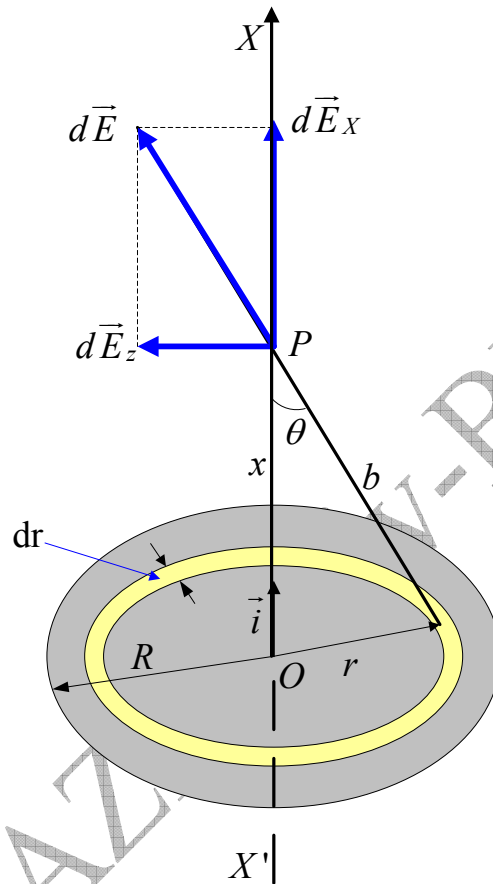


Fig 1.23 : Champ électrostatique crée par un disque chargé au point P

Pour obtenir le champ produit par tout le disque chargé, on intègre de 0 à R .

On voit que :

$$E_x = \int dE_x = \int dE.\cos\theta$$

$$E_z = \int dE_z = \int dE.\sin\theta$$

Vu la symétrie du problème on a :

$$\boxed{\vec{E}_z = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_x}$$

Laissons à l'étudiant le soin de vérifier que $\vec{E}_z = \vec{0}$, et passons au calcul de $\vec{E}_x$.

$$E_x = \frac{\sigma.2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{r.dr}{b^2} . \cos\theta$$

A partir de la figure, on a :

$$b^2 = x^2 + r^2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{b} \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

Suite à tous ces résultats on obtient :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int \frac{x.r.dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r.dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \Rightarrow E = \frac{\sigma.x}{2\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{(x^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^R$$

A la fin on a :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + R^2)}} \right]$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_z \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] \vec{i} \rightarrow (1)$$

Discussion :

$$x > 0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \vec{i} \rightarrow (2)$$

$\vec{E}$ est dirigé suivant $\vec{i}$ et s'éloigne des charges positives.

$$x < 0 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \vec{i} \rightarrow (3)$$

$\vec{E}$ est dirigé suivant $\vec{i}$ mais de sens contraire, il s'éloigne des charges positives.

Pour obtenir l'expression de $\vec{E}$ pour $x = 0$, il faut chercher la limite de l'équation (1) quand $x \rightarrow 0$ ou tout simplement remplacer x par 0 dans l'équation (2). On trouve :

$$x = 0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{i}$$

c/ Troisième application : Le champ électrostatique produit par un plan infini portant une charge surfacique positive de densité σ constante.

Ici la surface élémentaire est un anneau de rayon r d'épaisseur d et de centre O . figure 1.24.

Cet anneau produit au point P un champ électrique vertical (les composantes élémentaires horizontales s'annulent deux à deux à cause de la symétrie).

Donc : $\vec{E}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_y$.

A l'étudiant de vérifier ce résultat.

A partir de la figure on remarque que : $dE_y = dE \cdot \cos \theta$

L'anneau porte la charge élémentaire totale : $dq = dS \cdot \sigma = 2\pi r \cdot dr \cdot \sigma$

Donc le champ élémentaire produit par la boucle au point P est :

$$dE = dE_y = K \cdot \frac{dq}{b^2} \cdot \cos \theta = K \cdot \frac{2\pi r \cdot dr \cdot \sigma}{(R^2 + r^2)} \cdot \frac{R}{b}$$

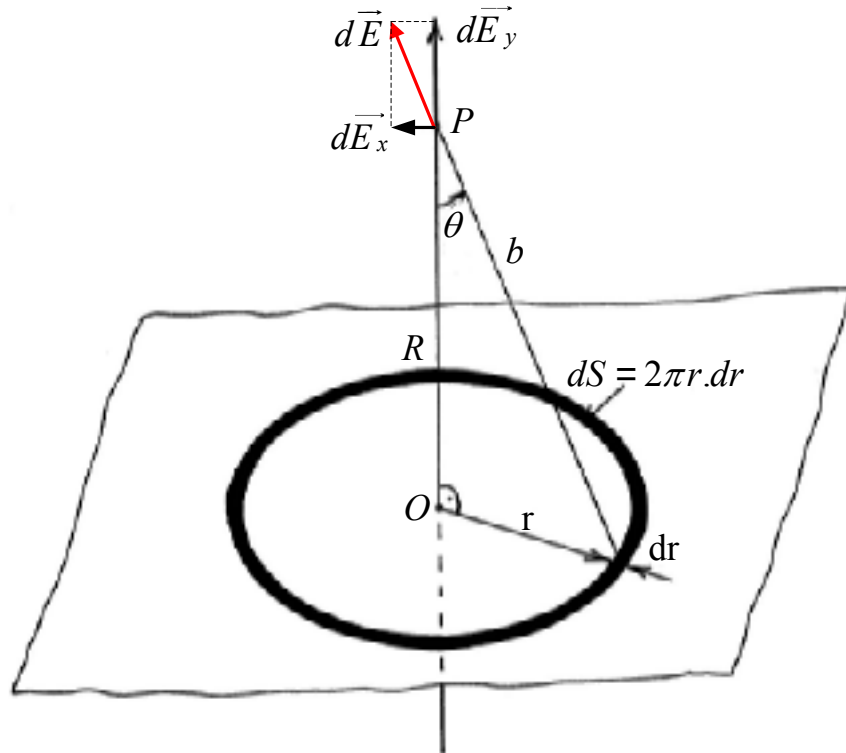


Fig 1.24: Champ d'un plan infini

Donc le champ électrique total produit par toute la surface du plan est :

$$E = \int_0^{\infty} K \cdot \frac{2\pi r \cdot dr \cdot \sigma \cdot R}{(R^2 + r^2)^{3/2}} = K \cdot 2\pi \sigma \cdot R \int_0^{\infty} \frac{r \cdot dr}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \Rightarrow E = K \cdot 2\pi \sigma \cdot R \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right]_0^{\infty}$$

A la fin :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Cela veut dire que le champ électrique est constant tout au long de l'axe Oy . Quelque soit la position du point P sur l'axe Oy , le champ électrique reste égal à lui même.

D/ POTENTIEL ELECTRIQUE (الكمون الكهربائي)

1/ CIRCULATION D'UN CHAMP DE VECTEURS (تجوّل حقل أشعة)

Supposons une particule quelconque se déplaçant de A à B en suivant la trajectoire curviligne, à l'intérieur d'un champ de vecteurs (comme par exemple le champ de pesanteur, le champ électrique, le champ magnétique, le champ de force...) et qu'on note par $\vec{V}$.

Définition 1 : On appelle **intégrale curviligne du champ de vecteurs** $\vec{V}$ du point A au point B le long de la trajectoire L l'expression :

$$\int_L^B \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (1.16)$$

$d\vec{l}$ est le vecteur déplacement élémentaire.

Remarque : Dans le cas général l'intégrale curviligne dépend du chemin suivi.

Définition 2 : Si le chemin ou la trajectoire est une courbe fermée, l'intégrale curviligne s'appelle **circulation du champ de vecteurs**, il s'écrit alors sous la forme :

$$\text{Circulation de } \vec{V} = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \vec{V} \text{ تجول} \quad (1.17)$$

Appliquons maintenant dans ce qui suit ces deux définitions au champ électrique $\vec{E}$.

2/ CIRCULATION DU CHAMP ELECTRIQUE (تجول الحقل الكهربائي)

Considérons une région de l'espace où règne un champ électrique. Toute particule chargée q_0 présente dans ce champ est soumise à une force électrique :

$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E} \quad (1.18)$$

($\vec{F}$ a le même sens que $\vec{E}$ si $q_0 > 0$)

Si cette particule n'est pas retenue, elle va se déplacer dans le sens de $\vec{F}$. Supposons un expérimentateur qui veut déplacer cette charge q_0 très lentement suivant un chemin déterminé. Pour cela, il faut d'abord appliquer sur la particule une force directement opposée à la force $\vec{F}$ pour annuler son action, puis appliquer une force supplémentaire dans le sens choisi du mouvement. A l'extrême limite, et pour obtenir le déplacement infiniment lent, nous considérons qu'il suffit d'appliquer une force sur q_0 pour compenser la force électrique : on doit donc appliquer la force $\vec{F}_d = -q_0 \cdot \vec{E}$.

Pour un déplacement élémentaire $d\vec{l}$, le travail élémentaire correspondant est :

$$dW = \vec{F}_d \cdot d\vec{l} \Rightarrow dW = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si on veut déplacer la charge q_0 suivant un chemin quelconque AB , il faut fournir un travail W_{AB} :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_d \cdot d\vec{l} \Rightarrow W_{AB} = - \int_A^B q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow W_{AB} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.19)$$

Définition : L'intégrale $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ s'appelle **circulation du champ électrique** sur tout le long de la courbe de A jusqu'à B .

Remarque : cette circulation est **conservative**, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du chemin suivi. La circulation du champ électrique suivant une courbe fermée (retour au point de départ) est nulle comme nous le verrons un peu plus loin.

Cas particulier : Si $|q_0| = 1C$, dans ce cas le travail $W = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ s'appelle la **force électromotrice** (القوة المحركة الكهربائية) dont la définition est donc :

Définition : La force électromotrice est égale au travail effectué pour déplacer la charge unité ($q = 1C$) le long de la courbe.

Précision : Le mot « force » est trompeur, car nous parlons d'énergie. C'est l'habitude qui nous a fait hériter le mot « force » au lieu d'énergie.

3/ POTENTIEL ELECTRIQUE (الكمون الكهربائي) :

Dans l'exemple schématisé sur la figure 1.25 on a :

$$\int_{C_1}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{C_2}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{C_3}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.20)$$

المسلك C_1 المسلك C_2 المسلك C_3

Cela veut dire que le travail nécessaire pour déplacer la charge du point A au point B est indépendant du chemin suivi. Lorsque la circulation du champ le long de la courbe ne dépend pas du chemin suivi, mais dépend uniquement du point de départ et du point d'arrivée, on dit dans ce cas que ce champ est conservateur. Tel est le cas du champ électrostatique.

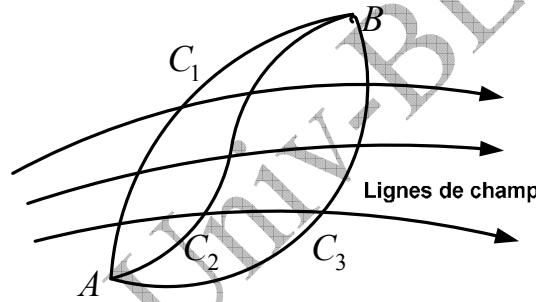


Fig 1.25 : Travail indépendant du chemin suivi par la charge

Dans l'expression 1.19, on pose :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.21)$$

V est une grandeur scalaire appelée **potentiel électrique**. on dit dans ce cas que le champ électrique $\vec{E}$ **dérive du potentiel** V .

L'énergie nécessaire pour déplacer la charge q_0 entre les points B et A est donc :

$$W_{AB} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_A^B dV = q_0 [V]_A^B = (V_B - V_A) \cdot q_0 \quad (1.22)$$

La grandeur $V_B - V_A$ est appelée **tension** ou **différence de potentiel** entre les points B et A , on la note par U_{BA} , telle que :

$$U_{BA} = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} \quad (1.23)$$

Cela nous mène à la définition de la différence de potentiel :

Définition : La différence de potentiel ($U_{BA} = V_B - V_A$) est égale au travail fourni à la charge unité (sa valeur est égale à l'unité) pour la transporter du point A au point B .

4/ CIRCULATION DU CHAMP ELECTRIQUE LE LONG D'UNE COURBE FERMEE (تجول الحقل الكهربائي على طول منحنى مغلق) :

Si la charge suit une courbe fermée, comment peut-on démontrer que la circulation de $\vec{E}$ est nulle ?

Déterminons sur la courbe fermée L deux points A et B (figure 1.26), puis calculons la circulation :

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.24)$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0 \quad (1.25)$$

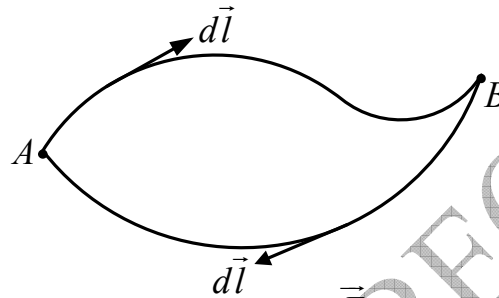


Fig 1.26 : Circulation de $\vec{E}$ suivant une courbe fermée

Conclusion : En électrostatique, la circulation du champ électrique le long de toute courbe fermée est nulle.

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.26)$$

Ce résultat est toujours vérifié, chaque fois que le champ dérive d'un potentiel.

5/ LE POTENTIEL ELECTRIQUE PRODUIT PAR UNE CHARGE PONCTUELLE q (الكمون الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية) :

On a vu que le champ $\vec{E}$ produit par une charge q est radial (il passe par la charge q),

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad (1.27)$$

Pour obtenir le potentiel V , on calcule d'abord la circulation du champ $\vec{E}$ le long d'un rayon quelconque :

On a :

$$d\vec{l} \parallel d\vec{r}$$

Et puisque :

$$d\vec{r} \parallel \vec{E}$$

Donc :

$$\left. \begin{aligned} dV &= -(\vec{E} \cdot d\vec{r}) \\ dV &= -E \cdot dr \end{aligned} \right| \Rightarrow dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} dr \quad (1.28)$$

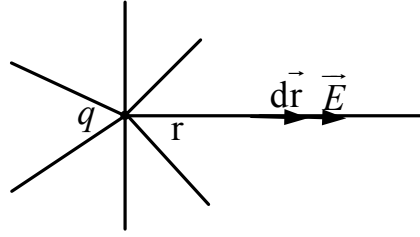


Fig 1.27: circulation du champ suivant le rayon

D'où :

$$V(r) = \int dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + C^{\text{te}} \quad (1.29)$$

En supposant $V = 0$ quand $r = \infty$, on aura $C^{\text{te}} = 0$. A la fin on obtient :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (1.30)$$

Le potentiel est constant sur des sphères de rayon r , dont leur centre est la charge q . On dit que ces sphères constituent des surfaces équipotentielles (سطوح متساوية الكمون).

On démontre que la différence de potentiel entre deux sphères de rayons respectifs r_1 et r_2 est donné par la relation :

$$V_1 - V_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \quad (1.31)$$

6/ CALCUL DU CHAMP $\vec{E}$ A PARTIR DE V :

On a vu que $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$. En considérant le repère cartésien O_{xyz} , et en supposant que le potentiel V et le champ $\vec{E}$ sont connus au point A de l'espace, on peut calculer le potentiel $V_A + dV$ en tout point relié à A par le vecteur élémentaire $d\vec{l}$. Figure 1.28.

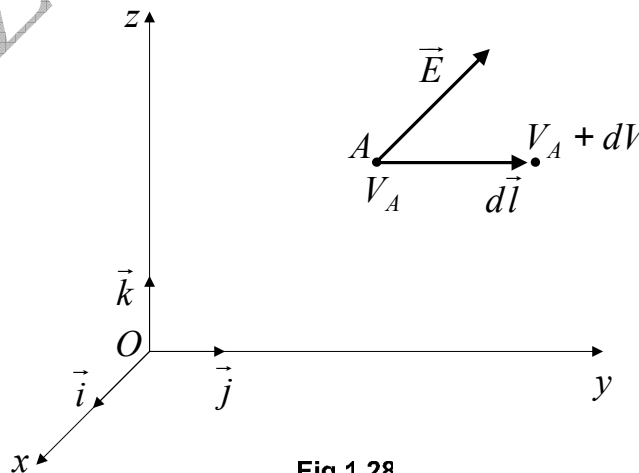


Fig 1.28

Cas particulier : On suppose qu'on s'éloigne de A dans le sens de x (y et z restant constantes). Donc $d\vec{l} = \vec{i} dx$, d'où $dV = -(\vec{E} \cdot \vec{i}) dx$, soit :

$$\boxed{dV = -E_x \cdot dx} \quad (1.32)$$

On arrive pour ce cas particulier à $E_x = -\frac{dV}{dx}$ où dV est la variation de V quand y et z restent constantes et seule x varie.

Cette condition sur les coordonnées coïncide avec la notion des **dérivées partielles**. Donc on peut écrire :

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}} \quad (1.33)$$

En répétant le même raisonnement pour y et z on trouve :

$$\boxed{E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}} \quad (1.34)$$

$$\boxed{E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}} \quad (1.35)$$

Puisque on est dans le repère O_{xyz} , on a :

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z \Rightarrow \vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

Donc :

$$\vec{E} = \left[-\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right] \Rightarrow \vec{E} = - \left[\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right] \quad (1.36)$$

On reconnaît dans cette expression l'**opérateur gradient**, donc :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} = - \left[\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right] \quad (1.37)$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}} \quad (1.38)$$

On comprend très bien maintenant l'expression « **le champ électrique $\vec{E}$ dérive du potentiel V** ».

L'expression du champ $\vec{E}$ en coordonnées cylindriques est :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} = - \left[\frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \right] \quad (1.39)$$

L'expression du champ $\vec{E}$ en coordonnées sphériques est :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} = - \left[\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \right] \quad (1.40)$$

Exemple 1.5 :

1/ En déduire le vecteur champ électrique de l'expression du potentiel suivante : $V(x, y, z) = 3x^2y + z^2$.

2/ Calculer le module du champ $\vec{E}$ au point $A(1, 2, -1)$.

Réponse :

1/ Il suffit de dériver $V(x, y, z)$ en utilisant la relation 1.37 pour trouver :

$$\vec{E} = -\left[6xy\vec{i} + 3x^2\vec{j} + 2z\vec{k}\right]$$

2/ Le module du champ au point $A(1, 2, -1)$ est :

$$\vec{E} = -12\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow E = \sqrt{12^2 + 3^2 + 2^2}$$

$$E = \sqrt{157} \Rightarrow E \approx 12,53 \text{ V/m}$$

7/ LE POTENTIEL CREE PAR PLUSIEURS CHARGES PONCTUELLES DISTINCTES :

Le principe de superposition est là aussi valable. Puisque le potentiel V est une grandeur scalaire, le potentiel $V(M)$ créé par plusieurs charges concentrées au point M est donné par l'expression algébrique :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (1.41)$$

Où r_i est la distance entre q_i et le point M . La charge q_i peut être positive ou négative, c'est pour cela qu'il faut la prendre avec son signe.

8/ LE POTENTIEL ELECTRIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE LA CHARGE :

Dans ce cas, on doit procéder à une intégration après avoir choisi une charge élémentaire correspondante, avec le même procédé que celui du champ électrique pour un pareil cas.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (1.42)$$

Conseil : Dans le cas général, il est préférable de calculer le potentiel en premier lieu, puis en déduire le champ électrique par dérivation.

Exemple 1.6 :

Un anneau, de centre O et de rayon R , porte une charge q répartie uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$.

1/ Calculer le potentiel créé au point M de l'axe Oy et situé à la distance y de O .

2/ En déduire le vecteur champ au point M .

Réponse :

Pour le point donné M , les grandeurs r, y, R sont constantes. Partant de la figure 1.29, et en posant $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ on peut écrire :

$$dV = K \frac{dq}{r} \Rightarrow \int dV = \frac{K}{r} \int dq \Rightarrow V = \frac{Kq}{r} + C^{te}$$

Sur la figure on peut voir que : $r = \sqrt{R^2 + y^2}$

Après le remplacement de K et $q = \lambda \cdot 2\pi R$ on arrive à l'expression :

$$V = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}} + C^{te}$$

Reste maintenant à déterminer le module E . Pour cela il suffit de dériver l'expression de V par rapport à y en exploitant la relation 1.34 :

$$E = -\frac{dV}{dy} \Rightarrow E = \frac{\lambda.R}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{y}{(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

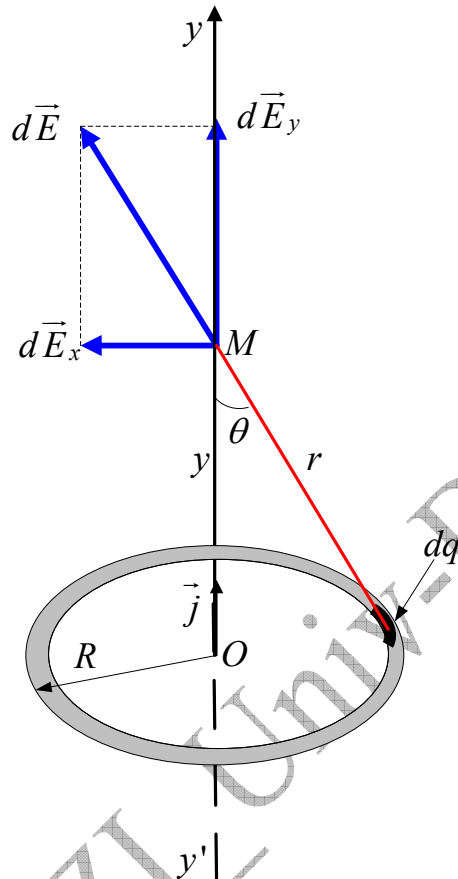


Fig 1.29 : Champ électrostatique créée par un anneau chargé au point M

Le vecteur champ électrique $\vec{E}$ s'écrit alors :

$$\vec{E} = \left[\frac{\lambda.R}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{y}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \right] \vec{j}$$

C/ FLUX ELECTROSTATIQUE ET THEOREME DE GAUSS

(التدفق الكهروساكن: نظرية غوص):

1/ Le flux électrique :

❖ **Définition** : On appelle flux du champ électrique à travers une surface la grandeur :

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.43)$$

$d\vec{S}$: Vecteur de la surface élémentaire, il est toujours normale à la surface et dirigé vers l'extérieur du volume limité par la surface.

Si θ est l'angle compris entre $\vec{E}$ et $d\vec{S}$, on aura :

$$\boxed{\Phi = \oint_S E \cdot d\vec{S} \cdot \cos \theta} \quad (1.44)$$

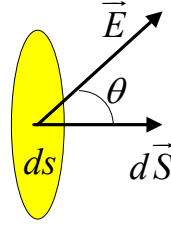


Fig 1.30 : Flux à travers une surface élémentaire

L'unité du flux électrique est le **Weber** (Wb), son équation aux dimensions est :

$$[\Phi] = L^3 \cdot T^{-3} \cdot A^{-1}$$

2/ THEOREME DE GAUSS :

Le théorème de Gauss exprime la relation entre le flux électrique à travers une surface fermée et le nombre de charges présentes à l'intérieur du volume entouré par cette surface.

Par exemple : soit q une charge ponctuelle positive, elle produit un champ électrique radial dirigé vers l'extérieur, de module $E(r) = K \cdot \frac{q}{r^2}$.

On choisit comme surface fermée une sphère dont le centre est la charge q . Figure 1.31.

Puisque nous sommes dans le cas d'une sphère, tous les vecteurs surface élémentaire $d\vec{S}$ sont radiaux, ils ont donc la même direction que $\vec{E}$, d'où $(\vec{E}, d\vec{S}) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1$.

Le flux électrique élémentaire à travers la surface élémentaire $d\vec{S}$ est :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \quad (1.45)$$

Par intégration on obtient :

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S K \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dS \quad (1.46)$$

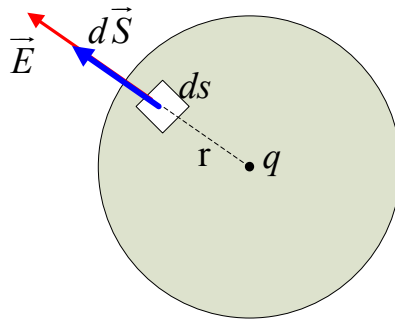


Fig 1.31 : Charge ponctuelle dans une sphère

Puisque le rayon de la sphère est constant on a :

$$\Phi = K \cdot \frac{q}{r^2} \oint_S dS \quad (1.47)$$

Rappelons-nous que la surface d'une sphère est :

$$\oint_S dS = S = 4\pi r^2 \quad (1.48)$$

Après remplacement on obtient :

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}} \quad (1.49)$$

Résultat : Le flux du champ électrique sortant de la sphère ($\forall r$) au centre de laquelle se trouve une charge ponctuelle positive ($q > 0$) est égal à $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Dans le cas où $q < 0$, le champ électrique $\vec{E}$ est dirigé vers le centre de la sphère et le flux électrique Φ est négatif car $(\vec{E}, d\vec{S}) = \pi \Rightarrow \cos \pi = -1$.

Généralisation :

Le résultat obtenu par le calcul pour une seule charge est vérifié dans le cas général.

Si on considère une surface fermée quelconque renfermant n charges $q_n + \dots + q_2 + q_1$ (quelque soient leur signes), on démontre dans ce cas que :

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}} \quad [\text{Wb}] \quad (1.50)$$

C'est là le **théorème de Gauss** :

Enoncé : Le **flux** d'un champ électrique à travers une surface fermée est égal à la **somme algébrique** des charges se trouvant à l'**intérieur** du volume limité par cette surface, divisé par la permittivité du vide ϵ_0 .

Intérêt de ce théorème : Ce théorème facilite et simplifie le calcul du champ électrique produit par une distribution simple de charges.

Dans ce qui suit, nous allons aborder quelques exemples pour préciser la méthode d'application du théorème de Gauss.

3/ APPLICATION DU THEOREME DE GAUSS :

a/ Le champ créé par une charge ponctuelle :

On considère la charge q comme centre d'une sphère de rayon r .

Donc le champ électrique $\vec{E}$ est radial et sortant, $\cos 0 = 1$:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \oint_S E \cdot dS \Rightarrow E \cdot S = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La surface de la sphère est $S = 4\pi r^2$, d'où :

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (1.51)$$

b/ Le champ électrique produit par une tige de longueur infinie uniformément chargée :

La surface de Gauss qui convient à ce cas est celle d'un cylindre de longueur l , et dont l'axe coïncide avec la tige.

Il y a trois surfaces : la surface de base S_1 , la surface de base S_2 , et la surface latérale S_L :

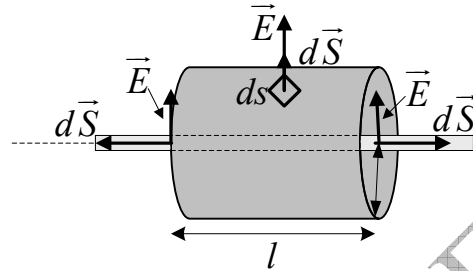


Fig 1.32 : tige chargée

Le flux à travers toutes les surfaces qui constituent le cylindre de Gauss est la somme des flux à travers chaque surface, soit $\Phi = \sum \Phi_i$:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_0 + \underbrace{\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_0 + \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.52)$$

Sur les surfaces des bases (S_1) et (S_2), le champ est perpendiculaire au vecteur $d\vec{S}$, donc il n'y a aucun flux qui traverse ces deux surfaces ($\cos \pi/2 = 0$). Mais, par contre sur la surface latérale (S_L), les vecteurs $d\vec{S}$ sont tous radiaux comme $\vec{E}$ ($\cos 0 = 1$). D'où l'on obtient :

$$\Phi = \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S_L = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (1.53)$$

Sachant que $Q_i = \lambda \cdot l$ et $S_L = 2\pi R l$, donc :

$$E \cdot 2\pi R \cdot l = \frac{\lambda \cdot l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \quad (1.54)$$

c/ Champ électrique produit par une sphère pleine chargée uniformément :

La surface de Gauss qui convient ici est une sphère de rayon r . En appliquant le théorème de Gauss on écrit :

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \oint_S E \cdot dS \Rightarrow E \cdot S = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (1.55)$$

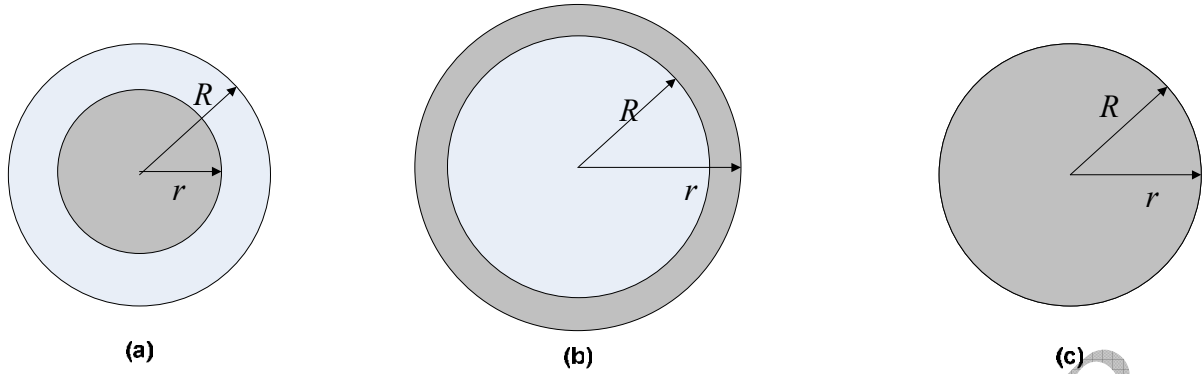


Fig 1.33 : Sphère pleine chargée

Discussion :

- ❖ $R > r$: (la figure 1.33-a), seule une partie de la charge portée par la sphère se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot V}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r} \quad (1.56)$$

E est proportionnel à la distance r .

- ❖ $R < r$: (la figure 1.33-b), toute la charge portée par la sphère se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot V}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \quad (1.57)$$

E est inversement proportionnel au carré de la distance r . La sphère se comporte comme une charge ponctuelle.

- ❖ $R = r$: (Figure 1.33-c) la surface de Gauss coïncide avec la surface de la sphère :

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{R^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R} \quad (1.58)$$

Le champ électrique sur la surface de la sphère est constant.

d/ Champ électrique produit par un plan infini chargé uniformément :

On choisit comme surface de Gauss un cylindre perpendiculaire au plan. Là aussi on a trois surfaces :

Le flux à travers la base de surface S_1 : $\Phi_1 = E \cdot S_1$,

Le flux à travers la base de surface S_2 : $\Phi_2 = E \cdot S_2$,

Le flux à travers la base latérale S_L est nul : $(d\vec{S} \perp d\vec{E})$,

Faire attention à $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$ mais $E \cdot S_1 = E \cdot S_2$, donc :

$$\Phi = 2E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

A la fin, on remarque que le champ électrique est uniforme quelque soit la distance entre le point considéré et le plan :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (1.59)$$

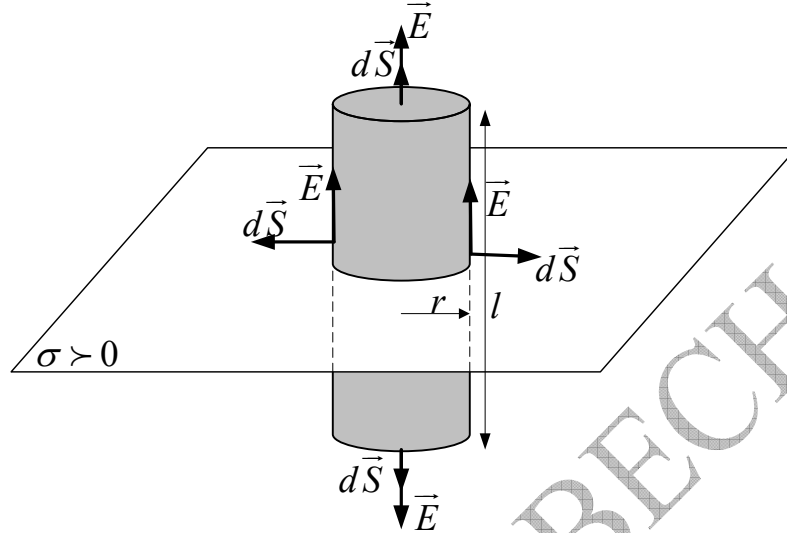


Fig 1.34 : Plan infini chargé

Conclusion : De ces exemples on remarque que les résultats sont parfaitement identiques à ceux déjà trouvés au paragraphe C, mais avec beaucoup plus de facilité, et c'est là tout l'intérêt du théorème de Gauss.

4/ FORME DIFFERENTIELLE DU THEOREME DE GAUSS

(الشكل التفاضلي لنظرية غوص) :

Les coordonnées cartésiennes du champ $\vec{E}$ sont E_x , E_y , E_z . Calculons le flux sortant du cube élémentaire de volume $dv = dx.dy.dz$. (Figure 1.35)

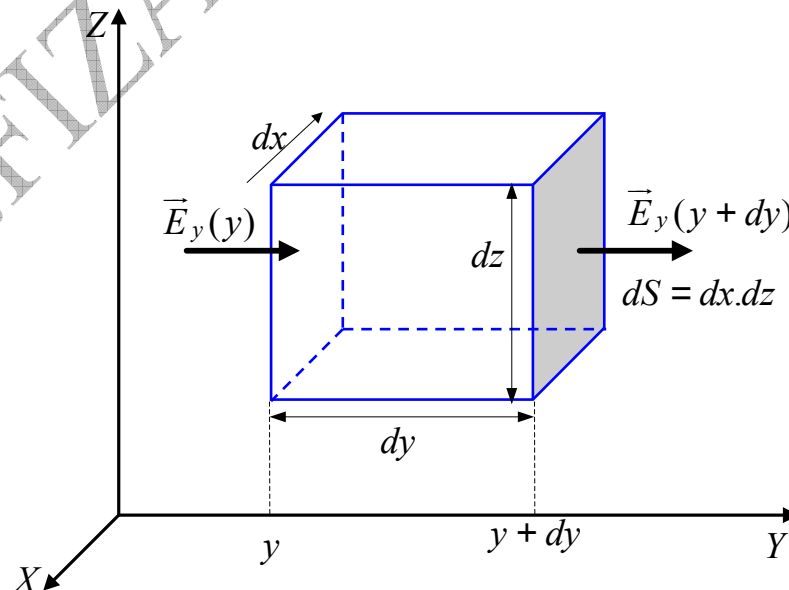


Fig 1.35 : Flux à travers un volume élémentaire

Le flux résultant de la composante E_y est:

- Nul à travers les faces : de devant, de derrière, du bas et du haut, car le vecteur champ est perpendiculaire au vecteur surface de chaque face.
- Reste à calculer le flux à travers les faces latérales d'aire $dS = dx.dz$.

Le flux entrant en y est négatif car le champ est dirigé vers l'intérieur du volume en sens contraire à celui de $\left(\vec{E}_y, \vec{dS}\right) = \pi$, il est égal à :

$$-E_y(y).dx.dz$$

Le flux sortant de $y + dy$ est positif et égal à : $+E_y(y + dy).dx.dz$

De tout cela on obtient le flux à travers les deux faces latérales :

$$\Phi_{dS_y} = \left(E_y(y + dy) - E_y(y)\right)dx.dz$$

Puisque la distance dy entre les surfaces est très petite, mathématiquement nous pouvons écrire :

$$E_y(y + dy) - E_y(y) = \Delta E_y = dE_y = \left(E_y\right)' .dy = \frac{\partial E_y}{\partial y} dy$$

Le résultat de tout cela :

$$d\Phi_{dS_y} = \left(E_y(y + dy) - E_y(y)\right)dx.dz = \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)dx.dy.dz$$

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)dx.dy.dz = \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right).dv$$

Puisque les résultats du flux sont identiques pour les quatre faces restantes, le flux total du volume élémentaire dv est égal à :

$$d\Phi_E = d\Phi_{dS_x} + d\Phi_{dS_y} + d\Phi_{dS_z}$$

$$d\Phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dx.dy.dz = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right).dv$$

Si dq est la charge du volume dv , on a d'après le théorème de Gauss :

$$d\Phi_E = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right]dv = \frac{dq}{\epsilon_0}$$

Si ρ est la densité de charge volumique, on a alors $dq = \rho.dv$, et donc :

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (1.60)$$

On reconnaît dans cette expression le gradient de $\vec{E}$:

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (1.61)$$

Cette dernière relation est l'expression du théorème de Gauss sous sa forme différentielle.

Quelle serait donc l'expression du potentiel électrique ?

On sait que : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$

$$\text{C'est-à-dire : } E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\text{Donc : } \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Finalement on arrive à :

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (1.62)$$

Cette relation porte le nom de « **équation de Poisson** », elle permet le calcul de V si on connaît la répartition de la charge ou l'inverse.

Exemple 1.7 : Dans une région de l'espace règne un champ électrique de la forme : $\vec{E} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3\vec{k}$

Trouver l'expression de la densité volumique de la charge.

Réponse : L'application de l'équation 1.61, nous donne :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] \\ \rho &= \epsilon_0 [1 + 2 + 0] \Rightarrow \boxed{\rho = 3\epsilon_0} \end{aligned}$$

Exemple 1.8 : On donne l'expression du potentiel électrique :

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} (x^2 + y^2 - z^2)$$

En déduire l'expression de la densité de la charge.

Réponse : De l'équation de Poisson on tire la densité ρ de la charge :

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} [2 + 2 - 2] = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{-q}{2\pi a^3}}$$

Quand est-il s'il n'y avait aucune charge ?

Cela veut dire que :

$$\rho = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0} \quad (1.63)$$

Cette expression est connue sous le nom de « **équation de Laplace** », elle est surtout utilisée en mécanique des fluides. Dans cette équation apparaît un opérateur appelé « **le laplacien** » qui est :

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \quad (1.64)$$

4/ NOTION DE L'ANGLE SOLIDE (مفهوم الزاوية الصلبة) :

En géométrie plane, on s'intéresse dans les figures à l'angle plan. Quand il s'agit de géométrie spatiale on parle d'angle solide. Par exemple, dans l'obscurité les rayon lumineux issus d'une source lumineuse ponctuelle sont caractérisés par deux grandeurs : la direction (qui est une droite), et l'angle maximal de propagation du faisceau lumineux autour de cette droite (un cône). Dans ce dernier cas, l'espace occupé par le faisceau lumineux s'appelle **angle solide**. Figure 1.36

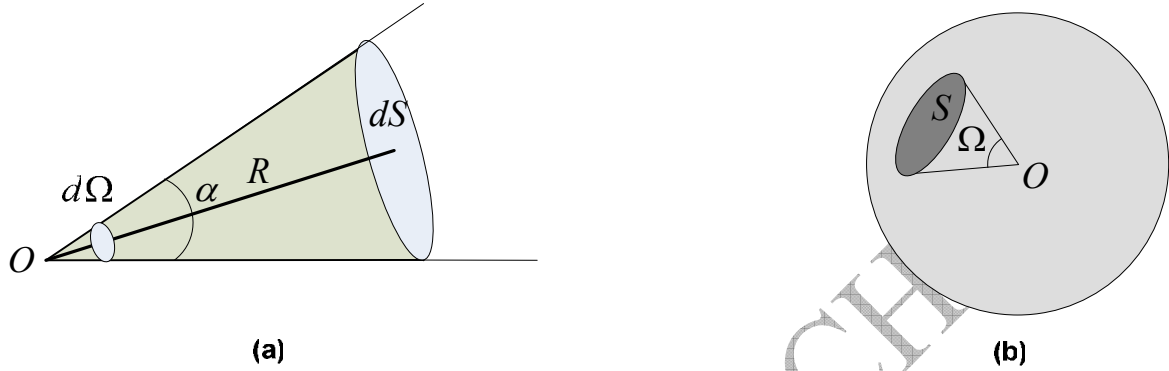


Fig 1.36 : Angle solide

Définition : L'angle solide élémentaire est l'espace contenu dans une surface conique élémentaire dS située à la distance R du sommet du cône, on le calcule par la formule :

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} \quad (1.65)$$

L'angle solide est toujours positif et indépendant de R . Son unité est le **stéradian** (sr).

Pour déterminer la valeur de l'angle solide Ω , on dessine un cône de centre O et de rayon R . La surface que coupe le cône est S (figure 1.36-b). La valeur de l'angle solide est donc :

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \quad (1.66)$$

En coordonnées sphériques, et en considérant R constante, la surface élémentaire est égale à :

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1.67)$$

Donc, l'angle solide élémentaire s'écrit :

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1.68)$$

En intégrant on obtient l'angle solide entourant un cône d'angle au sommet α :

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = 2\pi (1 - \cos \alpha) \quad (1.69)$$

$$\boxed{\Omega = 2\pi (1 - \cos \alpha)} \quad (1.70)$$

❖ Discussion :

Premier cas : $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\Omega = 2\pi sr}$, correspond à la moitié de l'espace constitué par l'angle $\alpha = \pi/2$.

Deuxième cas : $\alpha = \pi \Rightarrow \boxed{\Omega = 4\pi \text{ sr}}$, correspond à tout l'espace autour d'un point. C'est la valeur extrême pour un angle solide.

Cas général :

- Si le vecteur surface élémentaire est parallèle à la droite OP (figure 1.37-a), $\cos \theta = 1$, et par conséquent l'angle solide est égal à :

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{R^2}} \quad (1.71)$$

- Si le vecteur surface élémentaire fait l'angle θ avec la droite OP (figure 1.37-b), l'angle solide élémentaire est égal à :

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS \cdot \cos \theta}{R^2}} \quad (1.72)$$

C'est cette dernière expression qu'il faut retenir pour le calcul de l'angle solide dans le cas général.

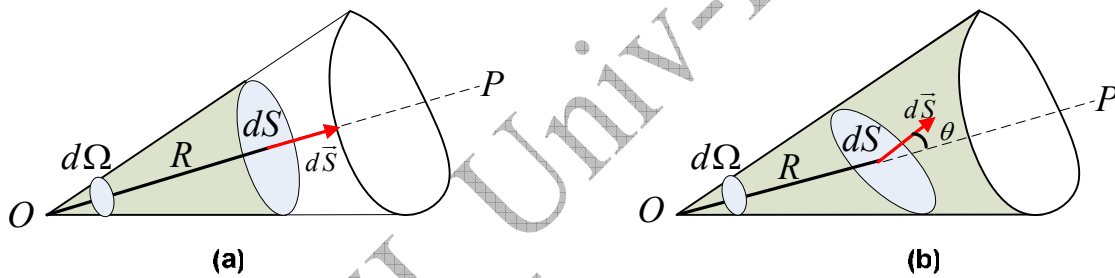


Fig 1.37 : Angle solide

❖ **La relation entre l'angle solide et le flux électrique :**

Le champ électrique produit par une charge ponctuelle q à une distance r de la charge est $E = K \frac{q}{r^2}$.

Le flux élémentaire $d\Phi$ à travers une surface élémentaire dS située à la distance r de la charge q est :

$$d\Phi = E \cdot dS = K \cdot q \frac{dS}{r^2} \quad (1.73)$$

$$\boxed{d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega} \quad (1.74)$$

Par intégration on obtient le flux total à travers toute la surface S :

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega} \quad (1.75)$$

Le flux électrique produit par une charge ponctuelle à travers une surface quelconque est égal au produit de $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ par l'angle solide Ω sous lequel on voit la surface à partir de la charge.

Si la surface entourant la charge q est fermée, l'angle solide est 4π , et le flux est égal à $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Si la surface entourant la charge q est fermée mais qu'elle n'entoure pas la charge, l'angle solide est nul, et le flux lui-même est nul.

F/ DIPOLE ELECTRIQUE (ثنائي القطب الكهربائي) :

- ❖ **Définition** : un dipôle électrique est l'ensemble de deux charges égales, de signes contraires et séparées par une très petite distance.

La figure 1.18, montre les lignes de champ du dipôle électrique.

- ❖ **Définition** : Le moment dipolaire (العزم الكهربائي) d'un dipôle est un vecteur libre $\vec{p}$, il est égal au produit de la valeur de la charge q par le vecteur déplacement $\vec{a}$ de la charge, dirigé de la charge positive vers la charge négative (figure 1.38).

$$\boxed{\vec{p} = q \cdot \vec{a}} \quad (1.76)$$

- ❖ **Potentiel électrique produit par un dipôle électrique :**

On se propose de calculer le potentiel électrique produit par les deux charges $+q$ et $-q$, au point P situé à la distance r_1 de la charge $+q$ et à la distance r_2 de la charge $-q$. La distance a est très petite devant les distances r_1 et r_2 .

Voir Figure 1.38.

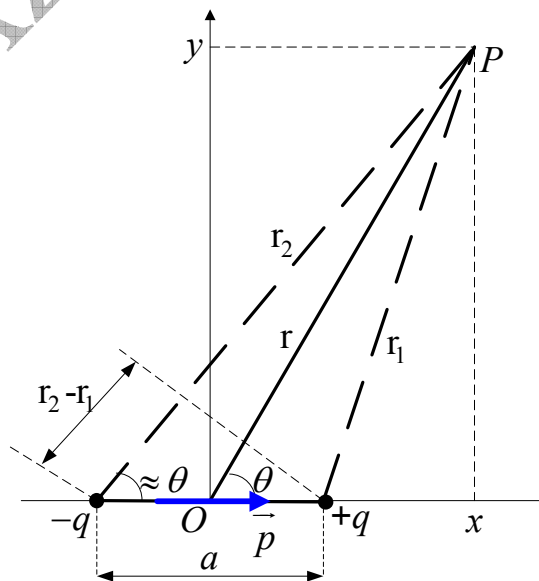


Fig 1.38 : Dipôle électrique

$$V = \sum V_i \Rightarrow V = K \left[\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right] \Rightarrow V = K.q \cdot \frac{(r_2 - r_1)}{r_2 \cdot r_1}$$

Puisque $r \gg a$, on peut considérer $r_1 \cdot r_2 \approx r^2$ et $r_2 - r_1 = a \cdot \cos \theta$, donc :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot a \cdot \cos \theta}{r^2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{p \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}} \quad (1.77)$$

❖ **Champ électrique produit par un dipôle électrique :**

On va essayer de calculer $\vec{E}$ à partir de l'équation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

➤ **En coordonnées rectangulaires :** sur la figure 1.38, on peut voir que :

$$r_1 = \left[y^2 + (x - a/2)^2 \right]^{1/2} ; \quad r_2 = \left[y^2 + (x + a/2)^2 \right]^{1/2}$$

D'où :

$$V = K.q \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

Donc :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left[\frac{1}{\left[y^2 + (x - a/2)^2 \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[y^2 + (x + a/2)^2 \right]^{1/2}} \right] \quad (1.78)$$

Il reste maintenant à effectuer les opérations de dérivation :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left[\frac{x - a/2}{\left[y^2 + (x - a/2)^2 \right]^{3/2}} - \frac{x + a/2}{\left[y^2 + (x + a/2)^2 \right]^{3/2}} \right] \quad (1.79)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left[\frac{y}{\left[y^2 + (x - a/2)^2 \right]^{3/2}} - \frac{y}{\left[y^2 + (x + a/2)^2 \right]^{3/2}} \right] \quad (1.80)$$

➤ **En coordonnées polaires :** A partir de la figure 1.39, et par la même méthode suivie précédemment, on calcule les composantes du champ électrique en coordonnées polaires.

Nous savons que $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$, et donc :

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} ; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = p \cdot \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}} \quad (1.81)$$

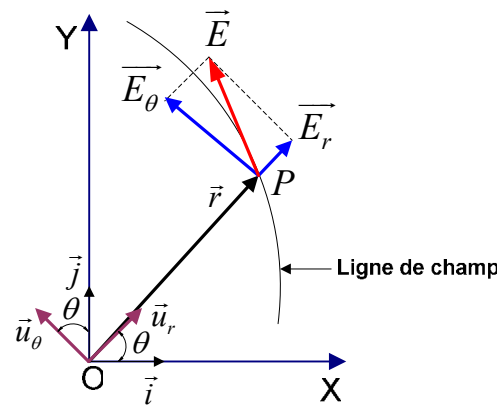


Fig 1.39 : Coordonnées polaires du champ

EXERCICES

**

تمارين

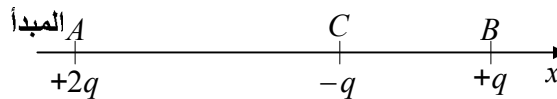
Exercice 1.1

Soit la distribution de charges (de l'ordre du microcoulomb) ci-dessous ; $AB = d = 0,2m$; Les deux charges placées en A et B sont fixes; par contre la charge placée en C est mobile sur la droite AB .

Quelle est la position d'équilibre de la charge placée en C , si elle existe ?

التمرين 1.1

ليكن توزيع الشحنات (من مرتبة الميكروكولومب) المبين أسفله؛ $AB = d = 0,2m$ ؛ الشحنتان الموضوعتان في A و B ساكنتان؛ بعكس الشحنة الموضوعة في C المتحركة على المستقيم AB . / ما هو موضع التوازن للشحنة الموضوعة في C ، إن وجد؟

**Exercice 1.2**

Aux deux extrémités d'un fil de longueur $2l$, sont attachés deux ballons sphériques gonflés avec de l'hélium (l'hélium étant plus léger que l'air), et portent la même charge $+q$. On suspend au milieu du fil une masse m . Le système abandonné à lui-même dans l'atmosphère occupe alors une position d'équilibre stable dans un même plan vertical, telle que chaque moitié du fil fait un angle α avec l'horizontale (figure ci-dessous).

En négligeant les masses du fil et des ballons, calculer la valeur de q .

Application numérique :

$$g = 10 \text{ N.kg}^{-1}, l = 1 \text{ m}, m = 5 \text{ g}, \alpha = \pi/6 \text{ rad}$$

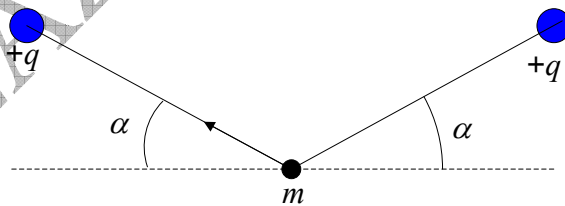
تمرين 2.1

تربط في نهايتي خيط طوله $2l$ نفختان (بالونان) كرويتان متماثلتان مملوءتان بغاز الهليوم (الهليوم أخف من للهواء)، وتحملان نفس الشحنة $+q$. تعلق في منتصف الخيط كتلة m . تترك النفختان في الهواء فتتوازنان و تستقران في مستوى شاقولي واحد بحيث يصنع كل جزء من الخيط عندئذ مع الأفق الزاوية α . (الشكل أسفله)

بإهمال كتلة الخيط و النفختين أحسب قيمة q .

تطبيق عددي:

$$g = 10 \text{ N.kg}^{-1}, l = 1 \text{ m}, m = 5 \text{ g}, \alpha = \pi/6 \text{ rad}$$

**Exercice 2.3**

Une petite boule (supposée ponctuelle) électrisée de masse m et portant une charge positive q telle que

$$\frac{q}{m} = 10^{-6} \text{ C.kg}^{-1} \text{ est placée entre deux plaques}$$

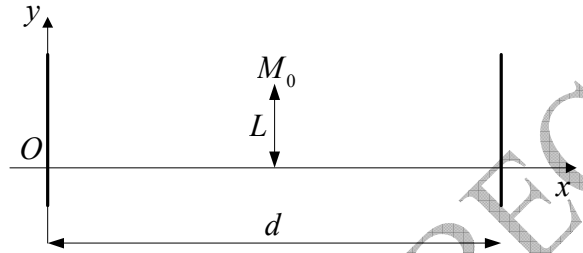
métalliques A et B verticales distantes de $d = 4 \text{ cm}$. Ces deux plaques soumises à une tension positive $U_{AB} = U$ créent un champ électrique supposé uniforme.

التمرين 3.1

كرة صغيرة (مفترضة نقطية) مشحونة كتلتها m و تحمل الشحنة الموجبة q بحيث $\frac{q}{m} = 10^{-6} \text{ C.kg}^{-1}$

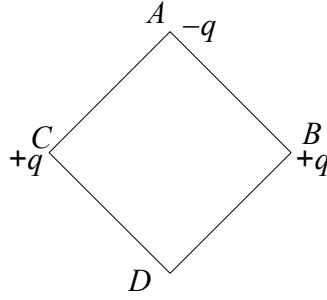
وضعت بين صفيحتين معدنيتين A و B شاقوليتين متباعدتين بـ $d = 4 \text{ cm}$. حين تخضع هاتين الصفيحتين للتوتر $U_{AB} = U$ الموجب ينشأ حقل كهربائي مفترض منتظم.

A la date $t = 0$, la boule est abandonnée sans vitesse initiale en un point M_0 de coordonnées $x_0 = \frac{d}{2}$ et $y_0 = L = 1m$. Soit $g = 10ms^{-2}$ l'intensité du champ de pesanteur. 1/ Trouver l'équation de la trajectoire de la boule. 2/ Calculer la date de passage de la boule dans le plan horizontal $y = 0$. 3/ Quelle valeur doit-on donner à U pour que la trajectoire de la boule passe par le point P de coordonnées $(d, 0)$?	في اللحظة $t = 0$، نترك الكرة بدون سرعة ابتدائية من النقطة M_0 ذات الإحداثيتين $x_0 = \frac{d}{2}$ و $y_0 = L = 1m$. ليكن $g = 10ms^{-2}$، شدة حقل الجاذبية. 1/ أوجد معادلة مسار الكرة. 2/ أحسب لحظة مرور الكرة في المستوى الأفقي $y = 0$. 3/ ما هي القيمة الواجب إعطاؤها لـ U حتى يمر مسار الكرة من النقطة ذات الإحداثيتين $(d, 0)$ ؟
---	--



Exercice 1.4 Soient n charges ponctuelles ($q < 0$) placées aux sommets A_i d'un polygone régulier de centre O, de côtés de longueur a. 1/ Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(z)$ en un point M de l'axe Oz du polygone (orthogonal en O à son plan) 2/ En déduire $\vec{E}(z)$ dans le cas : a/ d'un triangle équilatéral d'axe Oz , b/ d'un carré d'axe Oz .	التمرين 4.1 لتكن n شحنة نقطية ($q < 0$) موضوعة في القيم A_i لمتعدد الأضلاع المنتظم مركزه O، ذي أضلاع طولها a. 1/ عين الحقل الكهربائي $\vec{E}(z)$ في نقطة M من المحور Oz العمودي في O على مستوى متعدد الأضلاع. 2/ إستنتج $\vec{E}(z)$ في حالة: ا/ مثلث متساوي الأضلاع محوره Oz. ب/ مربع محوره Oz.
--	---

Exercice 1.5 Des charges ponctuelles occupent les sommets A, B et C d'un losange de côté a, comme indiqué sur la figure ci-dessous (il n'y a pas de charge en D). 1/ Calculer le champ électrique produit par les trois charges au sommet D ; représenter graphiquement ce champ. 2/ Calculer le potentiel produit en D . 3/ On place la charge $+2q$ au point D. Calculer la force électrique exercée par les autres charges sur cette charge. 4/ Calculer l'énergie potentielle de la charge $+2q$.	التمرين 5.1: وضعت شحنات نقطية على الرؤوس A, B و C لمعين ضلعه a، كما هو مبين في الشكل أسفله (في D لا توجد شحنة). 1/ أحسب الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنات الثلاثة عند النقطة D؛ مثل هذا الحقل بيانياً. 2/ أحسب الكمون (الجهد) الناتج في النقطة D. 3/ نضع الشحنة $+2q$ في النقطة D؛ أحسب القوة الكهربائية المطبقة عليها من طرف الشحن الأخرى. 4/ أحسب الطاقة الكامنة للشحنة $+2q$.
--	---

**Exercice 1.6**

On considère deux charges q et $-2q$ situées respectivement aux deux points $A(a, 0, 0)$ et $A'(4a, 0, 0)$ dans les coordonnées cartésiennes.

1/ Calculer le potentiel électrique en un point quelconque $M(x, y, z)$.

2/ Déterminer la surface équipotentielle $V = 0$.

3/ Montrer qu'en chaque point de cette surface le champ électrique passe par un point constant qu'il faudra déterminer.

التمرين 6.1

نعتبر شحنتين q و $-2q$ موضوعتين على الترتيب في النقطتين $A(a, 0, 0)$ و $A'(4a, 0, 0)$ في الإحداثيات الكارتيزية.

1/ احسب الجهد الكهربائي في نقطة ما $M(x, y, z)$.

2/ حدد السطح متساوي الكمون $V = 0$.

3/ بين أنه في كل نقطة من هذا السطح يمر الحقل الكهربائي بنقطة ثابتة و التي عليك تعيينها.

Exercice 1.7

On considère un segment AB électrisé positivement de densité linéique homogène λ de longueur $2a$ et de centre O .

1/ Démontrer que la composante $\vec{E}_y$ du champ électrostatique est nulle.

2/ Déterminer le champ électrostatique en un point M de l'axe de symétrie Ox . On pose $OM = x$.

3/ En déduire en ce point M le champ créé par un fil « infini ».

التمرين 7.1

نعتبر قطعة مستقيمة AB مكهربة إيجابا ذات كثافة طولية λ متجانسة طولها $2a$ و منتصفها O .

1/ برهن أن المركبة $\vec{E}_y$ للحقل الكهروساكن معدومة.

2/ حدد الحقل الكهروساكن في نقطة M من محور التناظر Ox . نضع $OM = x$.

3/ إستنتج في هذه النقطة M الحقل الناتج عن سلك " لا متناهي".

Exercice 1.8

Un fil de longueur L porte une densité linéaire de charge $\lambda > 0$ (figure ci-dessous).

1/ Montrer que les composantes du champ électrique au point P situé à une distance R du fil sont données par :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

Où E_x et E_y sont les composantes du champ, consécutivement parallèle et perpendiculaire au fil, et θ_1 et θ_2 les angles que font avec la perpendiculaire au fil les droites joignant le point P aux extrémités du fil.

التمرين 8.1

يحمل سلك طوله L كثافة خطية لشحنة $\lambda > 0$ (الشكل في الأسفل).

1/ برهن أن مركبتي الحقل الكهربائي في نقطة P واقعة على بعد R من السلك هما على التوالي:

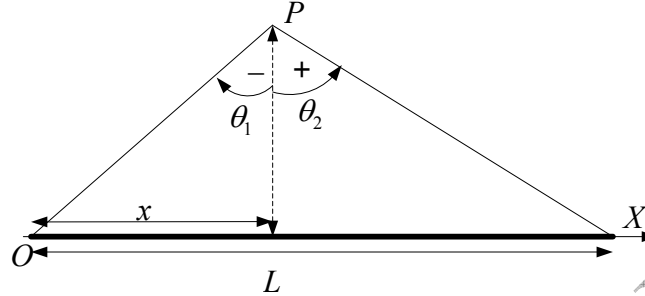
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

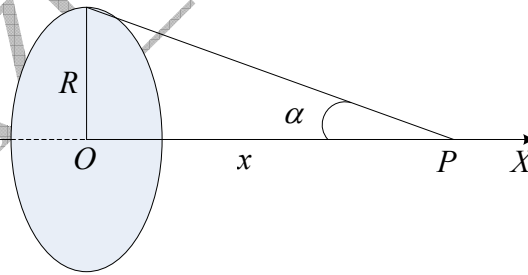
حيث E_x و E_y هما مركبتا الحقل، على التوالي الموازية و العمودية على السلك، و θ_1 و θ_2 الزاويتان اللتان يصنعهما المستقيمان الواصلان النقطة P بنهايتي السلك مع العمود للسلك.

2/ أوجد الحقل حينما تقع النقطة P على نفس البعد من

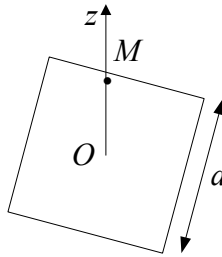
2/ Trouver le champ quand le point P est équidistant des deux extrémités du fil. 3/ En déduire le champ en un point de l'axe de symétrie d'un fil infiniment long. Les signes des angles θ_1 et θ_2 sont ceux indiqués sur la figure.	نهايتي السلك. 3/ إستنتج عبارة الحقل في نقطة من محور تناظر سلك لا متناهي الطول إشارتا الزاويتين θ_1 و θ_2 هما كما هو مبين على الشكل.
---	--



Exercice 1.9 Une charge linéaire ($\lambda > 0$) est répartie uniformément sur un fil en forme d'anneau de rayon R. (figure ci-dessous). 1/ Calculer le champ électrique produit par le fil au point P situé sur l'axe OX à une distance x du centre O. 2/ Calculer le potentiel électrique produit au même point P. 3/ Déterminer par le calcul le point pour lequel le champ électrique est maximal.	التمرين 9.1 تتوزع شحنة خطية ($\lambda > 0$) بانتظام على سلك في شكل حلقة نصف قطرها R. (الشكل في الأسفل) 1/ أحسب الحقل الكهربائي الناشئ عن السلك في النقطة P الواقعة على المحور OX و التي تبعد بـ x عن المركز O. 2/ أحسب الجهد (الكمون) الكهربائي في نفس النقطة P. 3/ عين حسابيا النقطة التي من أجلها يكون الحقل الكهربائي أعظما.
--	---



Exercice 1.10 Une plaque métallique en forme de carré de côté a et de centre O est chargée uniformément d'une densité surfacique $\sigma > 0$. Ecrire l'expression du champ électrostatique créée au point M situé sur l'axe de symétrie perpendiculaire à la plaque et telle que $OM = z = \frac{a}{2}$	التمرين 10.1 صفحة معدنية على شكل مربع ضلعها a ، مركزها O و مشحونة بانتظام بكثافة سطحية $\sigma > 0$. أكتب عبارة الحقل الكهروساكن الناتج في النقطة M الواقعة على محور التناظر Oz العمودي على الصفحة و حيث $OM = z = \frac{a}{2}$
---	---

**Exercice 1.11**

Une rondelle métallique de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 porte une charge répartie uniformément (densité surfacique de charge σ).

1/ Calculer le champ électrostatique sur l'axe de la rondelle à la distance z de son centre.

2/ Retrouver le résultat à partir du calcul du potentiel.

3/ Etudier le cas particulier $R_1 = 0$.

4/ Quel est le champ créé par un plan chargé infini ?

التمرين 11.1

تحمل حلقة معدنية ذات نصف قطر داخلي R_1 و نصف قطر خارجي R_2 شحنة موزعة بانتظام (الكثافة السطحية للشحنة σ).

1/ أحسب الحقل الكهروساكن على محور الحلقة على البعد z من مركزها.

2/ أوجد من جديد النتيجة انطلاقاً من حساب الكمون.

3/ أدرس الحالة الخاصة $R_1 = 0$.

4/ ما هو الحقل الناتج عن مستوى مشحون لامتناهي؟

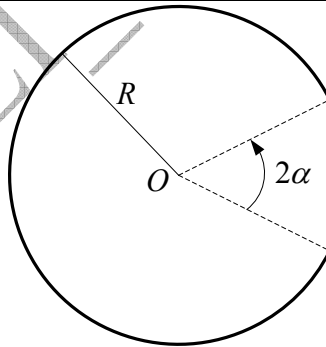
Exercice 1.12

Un anneau de centre O et de rayon R porte une densité linéique uniforme de charges λ sauf sur un arc d'angle au centre 2α . (Figure ci-dessous).

Déterminer le champ électrostatique en O .

التمرين 12.1

حلقة مركزها O و نصف قطرها R تحمل كثافة طولية منتظمة للشحنات λ ما عدى على قوس ذي زاوية في المركز 2α . (الشكل في الأسفل) عين الحقل الكهروساكن في O .

**Exercice 1.13**

On considère une portion de cône, de demi-angle au sommet α et de rayons limites R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$).

Ce système est chargé en surface avec la densité non

uniforme : $\sigma = \sigma_0 \frac{a}{r}$

a est une constante homogène à une longueur et le rayon du cône en un point de son axe de symétrie.

Déterminer le champ électrostatique au sommet O du cône.

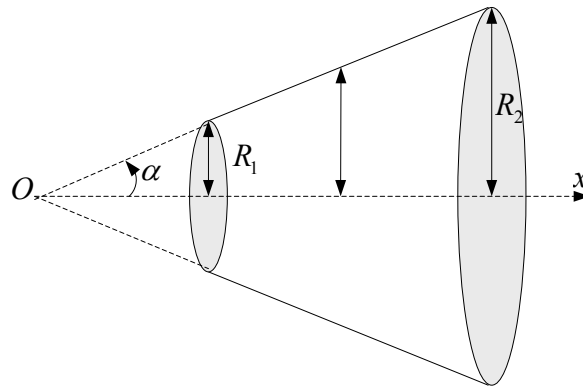
التمرين 13.1

نعتبر جزءاً من مخروط ، ذي نصف زاوية رأسية α و نصف قطر حديين R_1 و R_2 ($R_1 < R_2$). هذه الجملة مشحونة سطحياً بكثافة غير منتظمة:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{a}{r}$$

a ثابت متجانس مع طول و نصف قطر المخروط في نقطة من محور تناظره.

عين الحقل الكهروساكن في الرأس (القمة) O للمخروط.

**Exercice 1.14**

Un nombre infini d'ions de charges alternativement positives et négatives $\pm q$ sont disposés à intervalle régulier a le long d'une droite (figure ci-dessous).

Trouver l'énergie potentielle d'un ion.

Application numérique :

$$a = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad q = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ C}$$

On rappelle :

$$\ln(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} \right)$$

التمرين 14.1

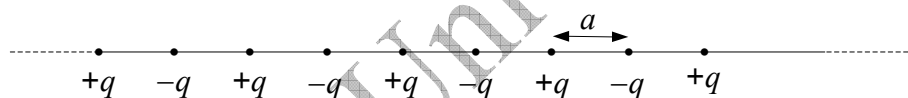
وضع عدد لا متناهي من الشوارد ذات الشحنات المتناوبة موجبة و سالبة $\pm q$ على بعد منتظم a على طول مستقيم (الشكل في الأسفل).

أوجد الطاقة الكامنة لشاردة واحدة.

تطبيق عددي:

$$q = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ C}, \quad a = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

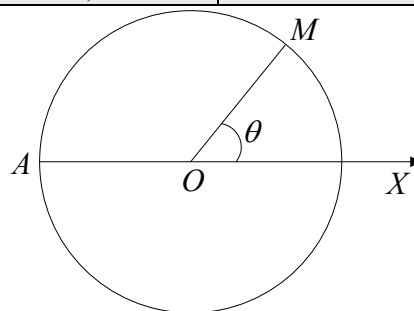
$$\ln(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} \right) \quad \text{تذكير:}$$

**Exercice 1.15**

Une sphère S de rayon R porte une charge surfacique $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ à symétrie de révolution autour d'un axe diamétral $\overrightarrow{OX}$. On demande de calculer le champ électrique aux points O et A de l'axe $\overrightarrow{OX}$. (Figure ci-dessous)

التمرين 15.1

كرة S نصف قطرها R و تحمل شحنة سطحية $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ ذات تناظر دوراني حول المحور القطري $\overrightarrow{OX}$. المطلوب حساب الحقل الكهربائي في النقطتين O و A من المحور $\overrightarrow{OX}$. (الشكل أسفله)

**Exercice 1.16**

Soit une demi sphère de centre O , de rayon R , chargée uniformément en surface avec la densité surfacique $\sigma > 0$.

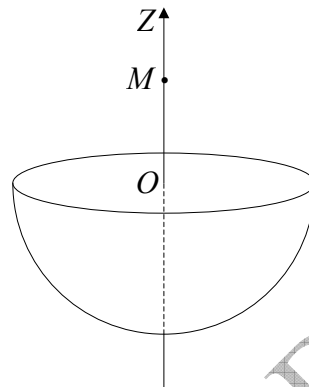
1/ Exprimer le potentiel et le champ électriques au point O . Expliquer pourquoi dans ce cas,

التمرين 16.1

لتكن نصف كرة مركزها O , نصف قطرها R , مشحونة بانتظام على السطح بكثافة سطحية $\sigma > 0$.

1/ عبر عن الكمون و الحقل الكهربائي في النقطة O . إشرح لماذا في هذه الحالة لا يمكن استنتاج

l'expression du champ ne peut pas être déduite par dérivation de l'expression du potentiel $(\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V)$. 2/ Exprimer le potentiel $V(z)$ en un point $M(z)$ de l'axe de symétrie Oz de cette demi sphère. En déduire le champ $E(z)$ et retrouver alors les expressions de 1/.	عبارة الحقل باشتقاق عبارة الكمون $(\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V)$ 2/ عبر عن الكمون $V(z)$ في نقطة $M(z)$ من محور التناظر OZ لنصف الكرة هذه. إستنتج الحقل و اوجد من جديد عبارتي 1/.
---	---

**Exercice 1.17**

1/ Trouver une expression pour le champ et le potentiel électriques d'un plan portant une densité superficielle de charge uniforme $\sigma > 0$:

- a/ en supposant qu'il est constitué d'une série de couronnes toutes concentriques de centre O ,
b/ en utilisant l'angle solide.

2/ Retrouver les mêmes résultats en appliquant le théorème de Gauss.

Qu'observez-vous ?

3/ Une charge $-q$ de masse m est placée à une distance z du plan. La charge est libérée de sa position de repos. Calculer son accélération, la vitesse avec laquelle elle tombera sur le plan et le temps qu'elle mettra pour atteindre le plan.

التمرين 17.1

1/ أوجد عبارة للحقل و للكمون الكهربائيين لمستوى يحمل كثافة سطحية لشحنة منتظمة $\sigma > 0$:

- أ/ بافتراض أنه مشكل من سلسلة من أكاليل كلها متركزة ذات مركز O ،
ب/ باستعمال الزاوية الصلبة.

2/ أوجد نفس النتائج باستعمال نظرية غوص. ماذا تلاحظ؟

3/ توضع شحنة $-q$ كتلتها m على البعد z من المستوى. تحرر الشحنة من موضع سكونها. أحسب تسارعها، السرعة التي تسقط بها على المستوى و الزمن الذي تأخذه لبلوغ المستوى.

Exercice 1.18

Une sphère, de rayon R , porte une charge volumique ρ qui est répartie uniformément dans tout le volume qu'elle occupe à l'exception d'une cavité de rayon r . Le centre de cette cavité est à la distance d du centre de cette sphère. La cavité est vide de charges.

En utilisant le théorème de Gauss et le principe de superposition, calculer le champ en tout point de la cavité. Que concluez-vous ?

التمرين 18.1

تحمل كرة، نصف قطرها R ، شحنة حجمية ρ موزعة بانتظام على كل الحجم الذي تشغله باستثناء تجويف نصف قطره r . مركز التجويف يبعد عن مركز الكرة بالمسافة d . التجويف فارغ من الشحنات. باستعمال نظرية غوص و مبدأ التراكب، أحسب الحقل في كل نقطة من التجويف. ماذا تستنتج؟

Exercice 1.19

Une sphère creuse de rayon R porte une densité de charge surfacique uniforme $\sigma > 0$.

1/ Calculer le champ électrostatique produit en un point P , situé à une distance b du centre O , à l'extérieur, à l'intérieur puis à la surface de la sphère.

2/ En appliquant le théorème de Gauss, retrouver les résultats précédents.

3/ Calculer le potentiel électrique à l'intérieur, à l'extérieur et à la surface de la sphère. Que concluez-vous ?

3/ Partant des résultats de la question 3/, retrouver le champ à l'extérieur, à l'intérieur et à la surface de la sphère.

التمرين 19.1

يشحن سطح كرة مجوفة نصف قطرها R بالكثافة السطحية المنتظمة $\sigma > 0$.

1/ أحسب الحقل الكهروساكن الناتج في النقطة P ، الواقعة على المسافة b عن المركز O ، خارج، داخل ثم على سطح الكرة.

2/ بتطبيق نظرية غوص أوجد من جديد النتائج السابقة.

3/ أحسب الكمون الكهربائي داخل، خارج و على سطح الكرة. ماذا تستنتج؟

4/ انطلاقاً من نتائج السؤال 3/ أوجد من جديد الحقل داخل، خارج و على سطح الكرة.

Exercice 1.20

Un cylindre plein de longueur infinie, de rayon R porte une densité de charge volumique $\rho > 0$.

1/ En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique à l'intérieur, à la surface et à l'extérieur du cylindre.

2/ En déduire le potentiel à l'intérieur, à la surface et à l'extérieur du cylindre, en supposant $V = 0$ sur l'axe du cylindre.

التمرين 20.1

أسطوانة مصمتة لا متناهية الطول، نصف قطرها R ، تحمل بانتظام كثافة شحنة حجمية $\rho > 0$.

1/ باستعمال نظرية غوص أحسب الحقل الكهربائي الساكن داخل، على سطح و خارج الأسطوانة.

2/ إستنتج الكمون (الجهد) الكهربائي داخل، على سطح و خارج الأسطوانة، بافتراض $V = 0$ على محور الأسطوانة.

Exercice 1.21

On considère deux sphères, s_1 pleine et s_2 creuse, concentriques au point O , de rayons R_1 et R_2 tel que $(R_1 < R_2)$. La première porte une charge volumique de densité $\rho > 0$ et la deuxième une charge surfacique de densité $\sigma > 0$.

1/ En appliquant le théorème de Gauss calculer le champ électrostatique dans les régions: $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$. On note par le rayon de la surface de Gauss.

2/ En déduire le potentiel électrique dans les mêmes régions à une constante près.

3/ Représenter les fonctions $E(r)$ et $V(r)$.

التمرين 21.1

نعتبر كرتين، s_1 مصمتة و s_2 مجوفة، متمركزتين في النقطة O ، نصف قطريهما R_1 و R_2 بحيث $(R_1 < R_2)$. تحمل الأولى شحنة حجمية كثافتها $\rho > 0$ و تحمل الثانية شحنة سطحية كثافتها $\sigma > 0$.

1/ بتطبيق نظرية غوص أحسب الحقل الكهربائي الساكن الناتج في المناطق: $r < R_1$ ، $R_1 < r < R_2$ و $r > R_2$. تمثل نصف قطر سطح غوص.

2/ إستنتج الكمون الكهربائي في نفس المناطق بثابت تقريبي.

3/ أرسم الدالتين $E(r)$ و $V(r)$.

Exercice 1.22

On considère deux cylindres coaxiaux infiniment longs, de rayons R_1 et R_2 , $(R_1 < R_2)$, portant des charges respectives $+\lambda$ et $-\lambda$ par unité de longueur.

1/ Montrer, en utilisant le théorème de Gauss, que le champ électrique est :

a/ nul si $r < R_1$ ou si $r > R_2$ sachant que est le rayon de la surface de Gauss (cylindre),

b/ inversement proportionnel à pour $R_1 < r < R_2$.

التمرين 22.1

نعتبر أسطوانتين متمحورتين لا متناهيتي الطول، نصف قطريهما R_1 و R_2 ، $(R_1 < R_2)$ ، و تحملان على التوالي الشحنتين $+\lambda$ و $-\lambda$ لوحدة الطول.

1/ بين باستخدام نظرية غوص أن:

أ/ الحقل الكهربائي معدوم إذا كان $r < R_1$ أو $r > R_2$ علماً أن هو نصف قطر سطح غوص (أسطوانة)،

ب/ الحقل الكهربائي يتناسب عكساً مع من أجل

2/ En déduire le potentiel dans tout l'espace. Où sont rapprochées les surfaces équipotentielles le plus?	$R_1 < r < R_2$ 2/ إستنتج الكمون الكهربائي في كل الفضاء. أين تكون السطوح متساوية الكمون أكثر تقارباً؟
---	--

Exercice 1.23

Soit le potentiel à symétrie sphérique suivant :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(k + \frac{1}{r} \right) \exp(-2kr) \rightarrow (1)$$

où r désigne la distance entre l'origine O et un point M , où k désigne une constante et où e désigne la charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$. Ce potentiel est créé par une distribution de charges inconnue et que l'on cherche à caractériser.

1/ Quelle est la dimension de la constante k ? Quelle est son unité dans le système international ?

2/ Calculer l'expression du champ électrique créé par la distribution de charges. On rappelle que le vecteur gradient en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

3/ En appliquant le théorème de Gauss à la sphère S de centre O et de rayon r , montrer que la charge $q(r)$ contenue dans cette sphère s'écrit :

$$q(r) = e(1 + 2kr + 2k^2 r^2) \exp(-2kr) \rightarrow (2)$$

4/ Montrer que la distribution étudiée contient une charge ponctuelle e placée en O .

5/ Calculer la $\lim_{r \rightarrow \infty} q(r)$ et en déduire qu'en outre la

charge ponctuelle placée en O , il existe dans tout l'espace une densité volumique de charge non nulle. Expliquez pourquoi le potentiel donné par l'équation (1) peut être utilisé pour modéliser un atome d'hydrogène.

6/ A partir de la relation (2), montrer que la densité volumique de charge $\rho(r)$ s'écrit :

$$\rho(r) = \frac{-e}{\pi} k^3 \exp(-2kr)$$

التمرين 23.1:

ليكن الكمون ذي التناظر الكروي التالي:

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(k + \frac{1}{r} \right) \exp(-2kr) \rightarrow (1)$$

حيث k ترمز إلى المسافة بين المركز O ونقطة M , حيث k ترمز إلى ثابت و e ترمز إلى الشحنة العنصرية: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$. هذا الكمون ناتج عن توزيع للشحنات مجهول و الذي نبحث عن تمييزه.

1/ ما هو بعد الثابت k ؟ ما هي وحدته في الجملة الدولية؟

2/ أحسب عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن هذا التوزيع للشحنات. نذكر أن شعاع التدرج بالإحداثيات الكروية يكتب:

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

3/ بتطبيق نظرية غوص على الكرة S ذات المركز O و نصف القطر r , بين أن الشحنة $q(r)$ المتواجدة داخل هذه الكرة تكتب:

$$q(r) = e(1 + 2kr + 2k^2 r^2) \exp(-2kr) \rightarrow (2)$$

4/ بين أن التوزيع المدروس يحتوي شحنة نقطية e موضوعة في O .

5/ أحسب نهاية $\lim_{r \rightarrow \infty} q(r)$ و استنتج أنه بالإضافة إلى

الشحنة النقطية الموضوعة في O , يوجد في كل الفضاء كثافة حجمية للشحنة غير معدومة. اشرح لماذا الكمون المعطى بالمعادلة (1) يمكن استعماله لنموذج ذرة هيدروجين.

6/ انطلاقاً من العلاقة (2), بين أن الكثافة الحجمية للشحنة $\rho(r)$ تكتب:

$$\rho(r) = \frac{-e}{\pi} k^3 \exp(-2kr)$$

Exercice 1.24

On considère une distribution de charges à symétrie sphérique de centre O . Le potentiel en un point M de

l'espace est: $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/a}}{r}$ avec $OM = r$ et

a une constante positive.

1/ Déterminer le champ électrostatique en ce

التمرين 24.1

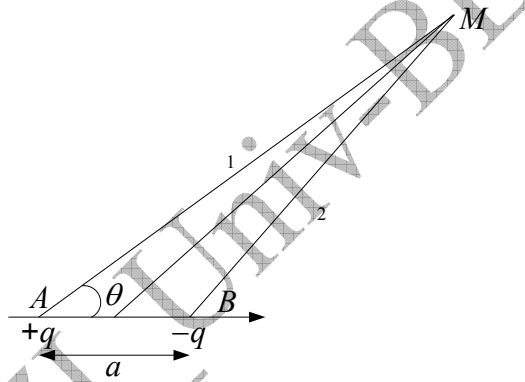
نعتبر توزيعاً ذي تناظر كروي مركزه O . الكمون في نقطة M من الفضاء هو:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/a}}{r} \text{ مع } OM = r \text{ و } a \text{ ثابت}$$

موجب.

point M . 2/ Calculer le flux du champ à travers une sphère de centre O et de rayon . Faire tendre successivement vers O, puis vers l'infini. Conclure. 3/ Déterminer la densité volumique de charge ρ . 4/ Etudier la fonction $z(r) = 4\pi r^2 \rho(r)$. Quelle est la signification de cette fonction?	1/ عين الحقل الكهروساكن في هذه النقطة M . 2/ أحسب التدفق عبر كرة مركزها O و نصف قطرها . قم بتمديد على التوالي نحو O، ثم نحو اللانهائي. ماذا تستخلص؟ 3/ حدد الكثافة الحجمية للشحنة ρ . 4/ أدرس الدالة $z(r) = 4\pi r^2 \rho(r)$. ما هو مدلول هذه الدالة؟
---	--

Exercice 1.25 Soit un dipôle D, son moment étant $\vec{p}$ et a la distance entre ses deux charges $-q$ et $+q$. (Figure ci-dessous) 1/ Calculer le champ et le potentiel électriques produits par le dipôle D au point M en fonction de p, θ et , sachant que $a \ll r$. 2/ Trouver l'équation des surfaces équipotentielles ainsi que l'équation des lignes de champ.	التمرين 25.1 ليكن ثنائي قطب D، عزمه $\vec{p}$ و a المسافة الفاصلة بين شحنتيه $-q$ و $+q$. (الشكل أسفله) 1/ أحسب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن ثنائي القطب D عند النقطة M بدلالة p, θ و علما أن $a \ll r$. 2/ أوجد معادلة سطوح تساوي الكمون.
---	--



Corrigés des exercices 1.1 à 1.25 :**حلول التمارين من 1.1 إلى 25.1****Exercice 1.1**

Les deux charges placées en A et C sont de signes contraires, donc, elles s'attirent. Si on pose $AC = x$, alors la force d'attraction est égale à :

$$F_{AC} = 9.10^9 \frac{|2q||-q|}{x^2} \Rightarrow F_{AC} = 9.10^9 \frac{2q^2}{x^2}$$

Les deux charges placées en B et C sont de signes contraires, donc, elles s'attirent aussi. Puisque $BC = d - x$, la force d'attraction est égale à :

$$F_{BC} = 9.10^9 \frac{|q||-q|}{(d-x)^2} \Rightarrow F_{BC} = 9.10^9 \frac{q^2}{(d-x)^2}$$

La charge placée en C , est donc soumise à deux forces électriques qui ne peuvent s'équilibrer que si elles sont directement opposées. Cela ne peut se réaliser que si C est situé entre A et B . D'où :

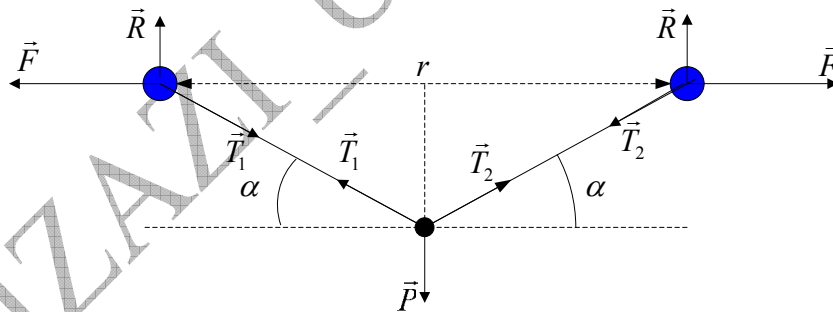
$$F_{AC} = F_{BC} \Rightarrow 9.10^9 \frac{2q^2}{x^2} = 9.10^9 \frac{q^2}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}$$

$$\frac{2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2} \Rightarrow x^2 - 0,8x + 0,08 = 0 \Rightarrow \boxed{x = AC = 0,117m}$$

$$d = 0,2$$

Exercice 1.2

La base de la solution de cet exercice est la figure géométrique ci-dessous :



Le système est en équilibre : $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$, avec $\vec{F}$ la force électrostatique de répulsion.

Au centre de la masse m on peut écrire : $\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$, avec $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}|$

On projette sur l'axe vertical : $2.T.\sin \alpha - P = 0 \Rightarrow T = \frac{P}{2 \sin \alpha} \rightarrow (1)$

Au centre de l'un des ballons : $\vec{T}_1 + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$; avec $\vec{R}$ la poussée d'Archimède.

Par projection sur l'axe horizontal : $F - T \cos \alpha = 0 \Rightarrow F = T \cos \alpha \rightarrow (2)$

De (1) et (2), on obtient l'expression de la force $\vec{F}$ qui est :

$$F = \frac{P \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sin \alpha} \Rightarrow \boxed{F = \frac{P}{2} \cot \alpha}$$

D'après la loi de Coulomb :

$$F = k \frac{q^2}{r^2} \Rightarrow k \frac{q^2}{r^2} = \frac{P}{2} \cot \alpha \Rightarrow q^2 = \frac{P}{2} \cdot \frac{r^2}{k} \cot \alpha \Rightarrow \boxed{q = r \sqrt{\frac{P \cot \alpha}{2k}}}$$

Or est inconnue, c'est pour cela qu'on doit la déterminer géométriquement :

$$\boxed{r = 2l \cos \alpha}$$

La dernière étape reste l'application numérique :

$$\begin{array}{l} P = mg = 5.10^{-2} N \\ \cot \pi/6 = 1,732 \\ r = 1,732 \end{array} \Rightarrow \boxed{q = 3,8.10^{-6} C = 3,8 \mu C}$$

Exercice 1.3

1/ La boule chargée est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$. Puisque la tension U_{AB} est positive, le champ électrostatique $\vec{E}$ est orienté vers B, c'est-à-dire vers le plus petit potentiel.

On applique la relation fondamentale de la dynamique à la boule pour déduire l'expression de l'accélération instantanée acquise :

$$\begin{array}{c} \vec{j} \uparrow \\ O \rightarrow \vec{i} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vec{F} = q\vec{E} \\ \vec{P} = m\vec{g} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} + q\vec{E} = m\vec{a} \\ \vec{a} = \vec{g} + \frac{q}{m} \vec{E} \end{array}$$

Ecrivons l'expression de l'accélération dans la base $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{array}{l} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ \vec{g} = -g \vec{j} \\ \vec{E} = E \vec{i} \end{array} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m} E \vec{i} - g \vec{j}$$

La vitesse initiale est nulle. La vitesse instantanée est la fonction primitive de l'accélération. Partant des composantes de la vitesse linéaire, on arrive aux deux équations horaires du mouvement de la boule, sans oublier la position initiale du mobile :

$$\left(t = 0, x_0 = \frac{1}{2}d, y_0 = L = 1m \right)$$

$$a_x = \frac{q}{m} E \Rightarrow v_x = \frac{q}{m} E t \Rightarrow x = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E t^2 + \frac{1}{2} d \rightarrow (1)$$

$$a_y = -g \Rightarrow v_y = -gt \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g t^2 + 1 \rightarrow (2)$$

Par élimination du temps entre les équations horaires on obtient l'équation de la trajectoire de la boule :

$$t^2 = \frac{2m}{qE} \left(x - \frac{1}{2}d \right) \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \left[\frac{2m}{qE} \left(x - \frac{1}{2}d \right) \right] + 1$$

$$\boxed{y = -\frac{mg}{qE} x + \frac{mg}{qE} \frac{d}{2} + 1} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{10^7}{E} x + \frac{2.10^5}{E} + 1}$$

La trajectoire de la boule est rectiligne.

2/ On remplace dans l'équation horaire (2), l'ordonnée par zéro afin d'obtenir l'instant du passage de la boule par le plan $y = 0$:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0,447s}$$

3/ Pour calculer la tension, on doit calculer d'abord le champ électrique au point $(d, 0)$. On remplace dans l'équation de la trajectoire les deux coordonnées par leurs valeurs respectives :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{10^7}{E}x + \frac{2 \cdot 10^5}{E} + 1 \\ x &= d = 0,04m \\ y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{E = 2 \cdot 10^5 Vm^{-1}}$$

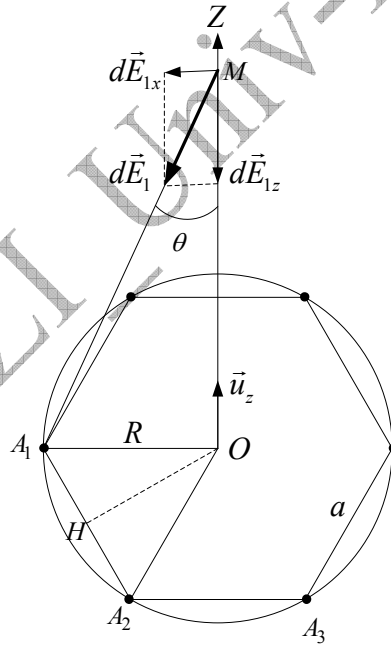
La tension est donc : $\boxed{U = Ed}$, $\boxed{U = 8 \cdot 10^3 V}$

Exercice 1.4

La distribution de la charge n'est pas continue. Le champ électrostatique est porté par l'axe à cause de la symétrie du polygone par rapport à l'axe Oz : $E_z = E \cos \theta$.

Soit R le rayon du cercle dans lequel est inscrit le polygone.

Calcul du champ produit au point M par la charge q placée au point A_1 .



$$\begin{aligned} E_{1z} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(A_1M)^2} \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{OM}{A_1M} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \end{aligned} \Rightarrow E_{1z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Chaque côté est vu depuis le centre sous l'angle $\frac{2\pi}{n}$. En exploitant la figure, on a :

$$\left. \begin{aligned} A_1 H &= \frac{a}{2} = R \sin \widehat{A_1 O H} \\ \widehat{A_1 O H} &= \frac{2\pi}{n} / 2 \Rightarrow \widehat{A_1 O H} = \frac{\pi}{n} \end{aligned} \right| \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

Le champ électrique résultant est égal à la somme des champs produits par chacune des charges ponctuelles $\vec{E} = \vec{E}_z = \sum_1^n \vec{E}_{iz}$:

Donc :

$$\vec{E}_z = n \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{\left(\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}} + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

2/ Dans le cas d'un triangle équilatéral on a $n = 3$, d'où le champ électrostatique :

$$\vec{E}_z = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{\left(\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{3}} + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z \Rightarrow E_z = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{\left(\frac{a^2}{3} + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Dans le cas d'un carré on a $n = 4$, d'où le champ électrostatique :

$$\vec{E}_z = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \frac{z}{\left(\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{4}} + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z \Rightarrow E_z = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \frac{z}{\left(\frac{a^2}{2} + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 1.5

1/ Représentation et calcul du champ électrique résultant au point D :

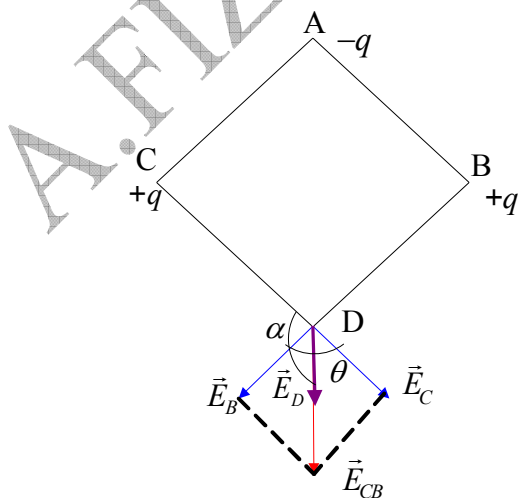


Figure pour la question 1

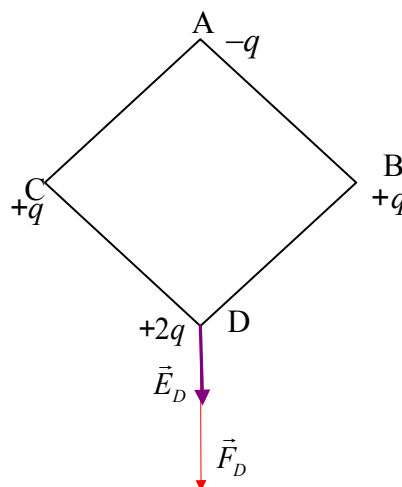


Figure pour la question 3

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_D &= \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C \\ \vec{E}_{CB} &= \vec{E}_C + \vec{E}_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}_D = \vec{E}_{CB} + \vec{E}_A$$

$$E_C = E_B = k \frac{q}{a^2} ; (AD = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a) \Rightarrow E_A = k \frac{q}{2a^2}$$

$$E_{CB} = \sqrt{E_C^2 + E_B^2 + 2E_B E_C \cos \pi/2} \Rightarrow E_{CB} = E_C \sqrt{2} \Rightarrow E_{CB} = \sqrt{2} \frac{kq}{a^2}$$

$$\alpha = \pi \Rightarrow E_D = \sqrt{E_{CB}^2 + E_A^2 - 2E_A E_{CB} \cos \pi} \Leftrightarrow E_D = E_{CB} - E_A$$

$$E_D = \frac{kq}{a^2} \cdot \sqrt{2} - \frac{kq}{2a^2} \Rightarrow E_D = \frac{kq}{a^2} \cdot \left[\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right] \Rightarrow E_D = 0,914 \cdot \frac{kq}{a^2} (V.m^{-1})$$

2/ Calcul du potentiel résultant au point D :

$$V_D = V_A + V_C + V_B ; V_D = -\frac{kq}{\sqrt{2}a} + \frac{kq}{a} + \frac{kq}{a} \Rightarrow V_D = \frac{kq}{a} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow V_D = 1,29 \frac{kq}{a}$$

3/ Calcul de la force appliquée à la charge $(+2q)$ au point D :

$$\vec{F}_D = 2q \cdot \vec{E}_D \Rightarrow F_D = 2q \cdot E_D$$

$$F_D = 2q \cdot \left[\frac{kq}{a^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \Rightarrow F_D = \frac{kq^2}{a^2} (2\sqrt{2} - 1) \Rightarrow F_D \approx 1,83 \cdot \frac{kq^2}{a^2} (N)$$

4/ Calcul de l'énergie potentielle de la charge $+2q$:

$$E_p = Q \cdot V, E_p = 2q \cdot V, E_p = 2q \cdot \frac{kq}{a} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \begin{aligned} E_p &= 2 \cdot \frac{kq^2}{a} (4 - \sqrt{2}) \\ E_p &\approx 2,59 \frac{kq^2}{a} \end{aligned} (J)$$

Exercice 1.6

1/ Pour calculer le potentiel électrique, on utilise l'expression scalaire : $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d}$

Une fois que les deux points sont placés sur la figure ci-dessous, on calcule les distances d et d' séparant le point M des deux charges :

$$d' = \sqrt{(x-4a)^2 + y^2 + z^2}, \quad d = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$$

Le potentiel produit au point $M(x, y, z)$ est donc :

$$V_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{2}{d'} \right)$$

$$V_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-4a)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

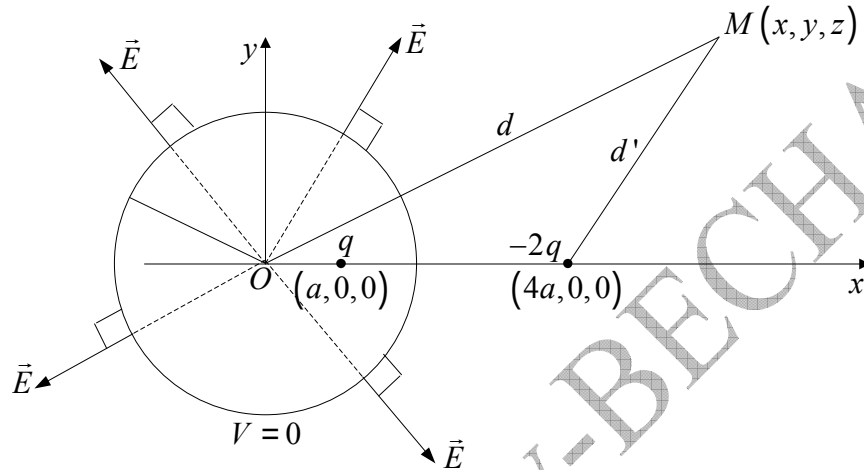
2/ Surface équipotentielle :

$$V(x, y, z) = 0 \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{2}{d'} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-4a)^2 + y^2 + z^2}} = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2}$$

On voit que la surface équipotentielle $V = 0$ est le centre d'une sphère de rayon $r = 2a$.

3/ Le champ électrostatique est perpendiculaire à la surface équipotentielle. Quelque soit le point par lequel passe le champ, ce dernier est perpendiculaire à la surface de la sphère et passe par conséquent par le centre de cette sphère.



Exercice 1.7

1/ Soit le champ élémentaire $d\vec{E}$ créé au point M , par une longueur élémentaire dy du segment rectiligne. M est situé à la distance de dy .

$$d\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} \quad \Rightarrow \quad d\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2} \vec{u}$$

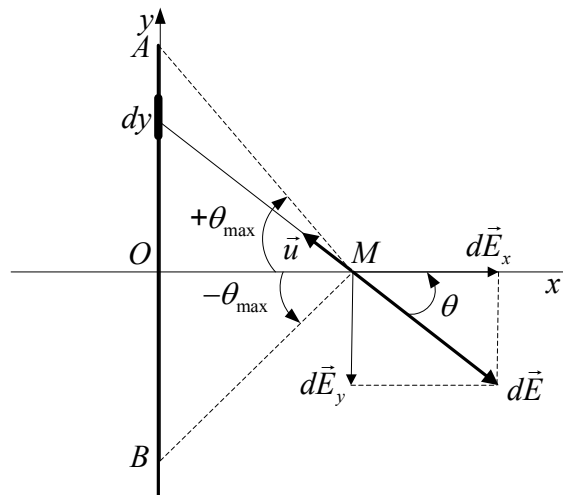
$$dq = \lambda dy$$

Le champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}(M)$ a deux composantes :

$$d\vec{E}(M) = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

$$d\vec{E}(M) = dE_x \vec{u}_x + dE_y \vec{u}_y$$

$$dE_x = dE \cdot \cos \theta, \quad dE_y = dE \cdot \sin \theta$$



Démontrons que $E_y = 0$:

$$\begin{aligned}
 dE_y &= dE \cdot \sin \theta \\
 dE_y &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2} \sin \theta \\
 r^2 &= \frac{x^2}{\cos^2 \theta} \\
 y &= x \tan \theta \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \sin \theta d\theta$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} [\cos \theta]_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \Rightarrow E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \underbrace{\left[\cos(+\theta_{\max}) - \cos(-\theta_{\max}) \right]}_{\cos \theta_{\max}}$$

$$\boxed{E_y = 0}$$

2/ Puisque c'est ainsi, le champ résultant est égal à sa composante horizontale (voir figure ci-dessus). Exprimons r^2 et dy en fonction de x et $\cos \theta$:

$$\begin{aligned}
 dE_x &= dE \cdot \cos \theta \\
 dE_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2} \cos \theta \\
 r^2 &= \frac{x^2}{\cos^2 \theta} \\
 y &= x \tan \theta \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \cos \theta d\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} [\sin \theta]_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \left[\sin(+\theta_{\max}) - \underbrace{\sin(-\theta_{\max})}_{-\sin \theta_{\max}} \right]$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} 2 \sin(+\theta_{\max}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \vec{u}_x}$$

$$\sin(+\theta_{\max}) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

3/ Dans le cas d'un fil infiniment long, on a $a \rightarrow \infty$, ce qui nous conduit à $\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \rightarrow 1$.

d'où :

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \vec{u}_x}$$

Exercice 1.8

1/ Commençons par chercher la résultante des deux champs élémentaires créés au point P par une longueur élémentaire de la portion x et par une longueur élémentaire de la portion $L - x$. Voir figure ci-dessous.

Pour la partie x : $d\vec{E}_1 = d\vec{E}_{1x} + d\vec{E}_{1y}$

Pour la partie $L-x$: $d\vec{E}_2 = d\vec{E}_{2x} + d\vec{E}_{2y}$

Les deux composantes du champ élémentaire $d\vec{E}$ résultant de la composition de $d\vec{E}_1$ et de $d\vec{E}_2$ sont :

$$d\vec{E}_x = d\vec{E}_{1x} - d\vec{E}_{2x} \Rightarrow dE_x = dE_{1x} - dE_{2x}$$

$$d\vec{E}_y = d\vec{E}_{1y} + d\vec{E}_{2y} \Rightarrow dE_y = dE_{1y} + dE_{2y}$$

Pour calculer E_x on doit calculer d'abord E_{1x} et E_{2x} :

Calcul de E_{1x} :

$$\left. \begin{aligned} dE_{1x} &= dE_1 \sin \alpha \\ dE_{1x} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r_1^2} \sin \alpha \\ dq &= \lambda dx \end{aligned} \right| \Rightarrow dE_{1x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r_1^2} \sin \alpha$$

Exprimons dx et r_1 en fonction de l'angle α pour trouver :

$$\left. \begin{aligned} x &= R \tan \alpha \Rightarrow dx = R \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \\ r_1 &= \frac{R}{\cos \alpha} \end{aligned} \right| \Rightarrow dE_{1x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}}{\left(\frac{R}{\cos \alpha}\right)^2} \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin \alpha d\alpha$$

En intégrant on obtient E_{1x} :

$$E_{1x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_0^{\theta_1} \sin \alpha d\alpha \Rightarrow E_{1x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} [-\cos \alpha]_0^{\theta_1}$$

$$\boxed{E_{1x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (-\cos \theta_1 + 1)}$$

De la même façon, on calcule E_{2x} :

$$\left. \begin{aligned} dE_{2x} &= -dE_2 \sin \beta \\ dE_{2x} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r_2^2} \sin \beta \\ dq &= \lambda dx \end{aligned} \right| \Rightarrow dE_{2x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r_2^2} \sin \beta$$

Exprimons dx et r_2 en fonction de l'angle β pour trouver :

$$\left. \begin{aligned} x &= R \tan \beta \Rightarrow dx = R \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} \\ r_2 &= \frac{R}{\cos \beta} \end{aligned} \right| \Rightarrow dE_{2x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R \frac{d\beta}{\cos^2 \beta}}{\left(\frac{R}{\cos \beta}\right)^2} \sin \beta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin \beta d\beta$$

En intégrant on obtient E_{2x} :

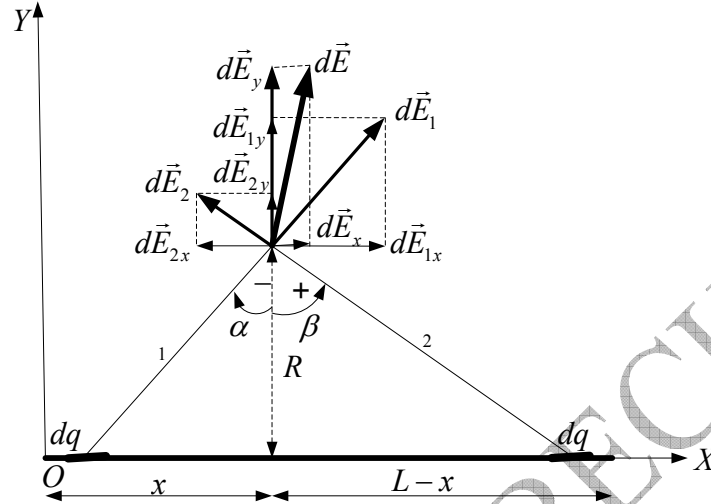
$$E_{2x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_0^{\theta_2} \sin \beta d\beta \Rightarrow E_{2x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} [-\cos \beta]_0^{\theta_2}$$

$$\boxed{E_{2x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (-\cos \theta_2 + 1)}$$

La composante parallèle au fil est donc :

$$E_x = E_{1x} - E_{2x} \Rightarrow E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (-\cos\theta_1 + 1) - \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (-\cos\theta_2 + 1) \right]$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$



Pour calculer E_y , on doit calculer E_{1y} et E_{2y} :

Calcul de E_{1y} :

$$\begin{aligned} dE_{1y} &= dE_1 \cos\alpha \\ dE_{1y} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r_1^2} \cos\alpha \Rightarrow dE_{1y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r_1^2} \cos\alpha \\ dq &= \lambda dx \end{aligned}$$

Exprimons dx et r_1 en fonction de l'angle α :

$$\begin{aligned} x &= R \tan\alpha \Rightarrow dx = R \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} \\ r_1 &= \frac{R}{\cos\alpha} \end{aligned} \Rightarrow dE_{1y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}}{\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2} \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \cos\alpha d\alpha$$

Intégrons pour obtenir E_{1y} :

$$E_{1y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_0^{-\theta_1} \cos\alpha d\alpha \Rightarrow E_{1y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} [\sin\alpha]_0^{-\theta_1}$$

$$E_{1y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (-\sin\theta_1)$$

Idem pour E_{2y} :

$$\begin{aligned} dE_{2y} &= dE_2 \cos\beta \\ dE_{2y} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r_2^2} \cos\beta \Rightarrow dE_{2y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r_2^2} \cos\beta \\ dq &= \lambda dx \end{aligned}$$

Exprimons dx et r_2 en fonction de l'angle β , pour arriver à :

$$\left. \begin{aligned} x = R \tan \beta \Rightarrow dx &= R \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} \\ r_2 &= \frac{R}{\cos \beta} \end{aligned} \right| \Rightarrow dE_{2y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R \frac{d\beta}{\cos^2 \beta}}{\left(\frac{R}{\cos \beta}\right)^2} \cos \beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \cos \beta d\beta$$

En intégrant on obtient E_{2y} :

$$E_{2y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_0^{\theta_2} \cos \beta d\beta \Rightarrow E_{2y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} [\sin \beta]_0^{\theta_2}$$

$$\boxed{E_{2y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (\sin \theta_2)}$$

La composante perpendiculaire au fil est :

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} \Rightarrow E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (-\sin \theta_1) + \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (\sin \theta_2) \right]$$

$$\boxed{E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)}$$

Finalement le champ résultant de tout le fil chargé au point P est :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} [(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{u}_x + (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \vec{u}_y]}$$

2/ Lorsque le point P est à égale distance des extrémités du fil on a $\theta_1 = -\theta_2$. On pose $\theta_2 = \theta$, le champ résultant est donc :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \left[\underbrace{(\cos \theta - \cos(-\theta))}_0 \vec{u}_x + \underbrace{(\sin \theta - \sin(-\theta))}_{2\sin \theta} \vec{u}_y \right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin \theta \vec{u}_y} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin \theta}$$

Pour un fil infiniment long, on a $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ soit $\sin \theta \rightarrow 1$, et par conséquent :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \vec{u}_y} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}}$$

Exercice 1.9

Le champ électrique élémentaire $d\vec{E}$ produit au point P par la charge élémentaire dq du fil est :

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \Rightarrow d\vec{E} = dE_x \cdot \vec{i} + dE_y \cdot \vec{j}$$

A cause de la symétrie on a :

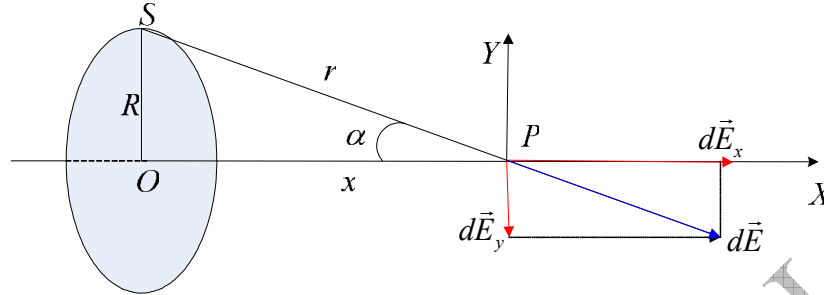
$$\vec{E}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_x$$

D'où

$$dE = k \frac{dq}{r^2}$$

$$dE_x = dE \cdot \cos \alpha \Rightarrow dE_x = k \frac{dq}{r^2} \cdot \cos \alpha \Rightarrow dE_x = k \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \cos \alpha$$

$$dq = \lambda dl$$



Dans le triangle rectangle \$POS\$, on a :

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{k \lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dl ;$$

Et donc :

$$E_x = \frac{k \lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow E_x = \frac{k \lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda x R}{2 \cdot \epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i} \Leftrightarrow E = \frac{\lambda x R}{2 \cdot \epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} (V \cdot m^{-1})$$

2/ Calcul du potentiel électrique :

$$dV = k \frac{dq}{r} , dV = k \frac{\lambda dl}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \Rightarrow V = k \frac{\lambda}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow V = \frac{\lambda R}{2 \epsilon_0 \sqrt{(x^2 + R^2)}} (V)$$

3/ Détermination du point où le champ électrique est maximal : Pour que le champ soit maximal, il faut que sa dérivée par rapport à \$x\$ soit nulle : \$\left. \frac{dE_x}{dx} \right|_M = 0\$. Commençons donc par calculer cette dérivée :

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\lambda R}{2 \epsilon_0} \left[\frac{(x^2 + R^2)^{3/2} - \frac{3}{2} (2x) (x^2 + R^2)^{1/2} - x}{(x^2 + R^2)^3} \right] = \frac{\lambda R}{2 \epsilon_0} \left[\frac{(x^2 + R^2)^{1/2} \times (x^2 + R^2 - 3x^2)}{(x^2 + R^2)^3} \right]$$

L'expression finale de cette dérivée est :

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\lambda R}{2 \epsilon_0} \left[\frac{R^2 - 2x^2}{(x^2 + R^2)^{5/2}} \right]$$

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \Rightarrow R^2 - 2x_{\max}^2 = 0 \Rightarrow x_{\max} = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Exercice1.10

Le champ électrostatique élémentaire produit par la charge élémentaire concentrée autour du point P est égal à :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}_P$$

En raison de la symétrie, le champ résultant est porté par l'axe OZ :

$$dE_z = dE \cdot \cos \theta \Rightarrow E(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r^2} \cdot \cos \theta$$

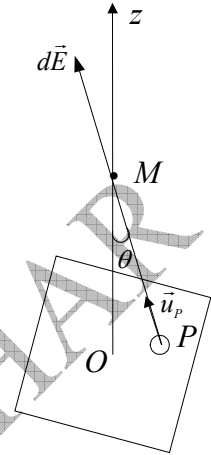
On reconnaît dans cette expression l'angle solide élémentaire $d\Omega = \frac{dS \cdot \cos \theta}{r^2}$, sous lequel, et à partir du point M , on voit la surface élémentaire dS autour du point P :

$$E(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Omega(M)$$

Le point M est situé à la distance $\frac{a}{2}$, c'est-à-dire au centre d'un cube dont la plaque constitue l'une de ses faces.

Quand on regarde du point M à tout l'espace du cube (6 faces), l'angle solide vaut $\Omega = 4\pi$, donc à une face correspond l'angle solide : $\Omega(M) = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$. Finalement le champ électrostatique produit par la plaque au point M vaut :

$$E(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{3} \Rightarrow E(M) = \frac{1}{6\epsilon_0}$$

**Exercice1.11**

1/ Considérons sur le disque une surface élémentaire située à une distance du centre O . Cet élément de surface s'écrit dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ des coordonnées cylindriques :

$d^2S = dr \cdot r d\theta$ et porte la charge $d^2q = \sigma d^2S$ en produisant un champ $d^2\vec{E}$ tel que $d^2\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2q}{l^2}$.

Toutes les surfaces élémentaires situées à la distance de O produisent des champs électriques élémentaires qui font le même angle avec l'axe OZ . Nous pouvons dès lors intégrer le résultat précédent en faisant varier θ entre 0 et 2π :

$$dE_z = \int_0^{2\pi} d^2E \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \alpha \cdot dr}{l^2} d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r \cos \alpha \cdot dr}{l^2}$$

Il nous reste à intégrer entre R_1 et R_2 en faisant attention à ce que $l^2 = r^2 + z^2$ et $\cos \alpha = \frac{z}{l}$:

$$E = \int_{R_1}^{R_2} dE_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

On pose $u = (r^2 + z^2)$. D'où $du = 2r dr$, avec $u_1 = (R_1^2 + z^2)$ et $u_2 = (R_2^2 + z^2)$.

On obtient :

$$E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{2u^{3/2}} \Rightarrow E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[-2\sqrt{u} \right]_{u_1}^{u_2}$$

Finalement on arrive à :

$$E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right)$$

2/ Le potentiel produit par la surface élémentaire d^2S est $d^2V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d^2q}{l}$. Après intégration de l'angle θ , on obtient $dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{rdr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$. Comme précédemment, on pose $u = (r^2 + z^2)$, on obtient donc $dV = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \frac{du}{\sqrt{u}}$.

Tout cela nous amène à :

$$V = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{u}} \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{u} \right]_{u_1}^{u_2}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1} \right] \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2} \right]$$

On sait que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$

Le gradient en coordonnées cylindrique s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}V} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z :$$

En appliquant cette expression au résultat précédent du champ, on se rend compte que le champ électrostatique n'a qu'une seule composante suivant l'axe OZ , car les dérivées partielles par rapport à ρ et θ sont toutes les deux nulles.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right) \Rightarrow E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right)$$

3/ Quant $R_1 = 0$, on trouve le champ électrostatique produit sur l'axe du disque uniformément chargé :

$$E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right) \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_2^2}{z^2}}} \right)$$

4/ Pour un plan infini $R_2 \rightarrow \infty$. On aura :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_2^2}{z^2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{R_2^2}{z^2}}} = \frac{z}{R} \rightarrow 0 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Le champ devient indépendant de z , c'est-à-dire de la distance au plan. En tout point extérieur au plan chargé, le champ vaut $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

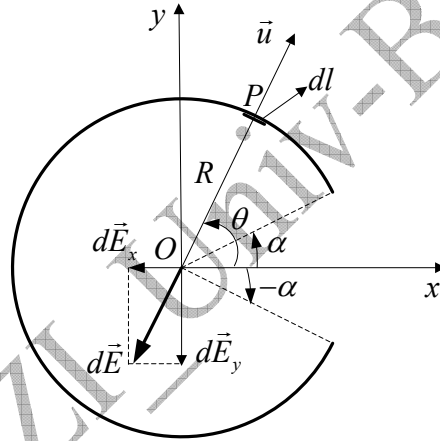
Exercice1.12

Soit le champ élémentaire $d\vec{E}$ produit par la longueur élémentaire dl , de la circonférence chargée de l'anneau, concentrée autour du point P : (Le signe moins résulte des sens opposés du champ élémentaire $d\vec{E}(O)$ et du vecteur unitaire $\vec{u}$ tels que indiqués sur la figure ci-dessous).

$$\begin{aligned} d\vec{E}(O) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \vec{u}_r \\ dq &= \lambda dl \\ dl &= R d\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad d\vec{E}(O) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{R} \vec{u}$$

Le champ élémentaire $d\vec{E}(O)$ a deux composantes $d\vec{E}(O) = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$, cependant, et pour raison de symétrie de la répartition des charges, la composante $d\vec{E}_x$ est la seule qui participe au champ total au point O . D'où :

$$dE_x = dE \cdot \cos \theta \Rightarrow dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \cos \theta \cdot d\theta$$



Pour obtenir le champ total produit par toute la charge au point O , on intègre de $\theta = \alpha$ à $\theta = 2\pi - \alpha$:

$$dE_x = dE \cdot \cos \theta \Rightarrow E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} [\sin \theta]_{\alpha}^{2\pi - \alpha}$$

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} [\sin(2\pi - \alpha) - \sin \alpha]$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin \alpha \Leftrightarrow \vec{E} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin \alpha \cdot \vec{u}_y$$

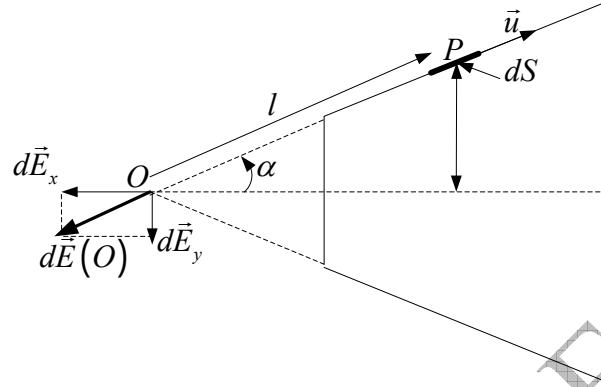
Exercice1.13

Les plans passant par l'axe Ox sont des plans de symétrie de la répartition des charges. Le champ électrostatique doit appartenir successivement à l'ensemble des plans, donc à leur intersection : le champ résultant $\vec{E}(O)$ a pour direction l'axe Ox .

Considérons une surface élémentaire dS située sur le corps du cône et concentrée autour du point P . C'est ce qui est indiqué sur la figure ci-dessous.

La surface élémentaire produit au point O un champ élémentaire :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(O) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{l^2} \vec{u} \\ dq &= \sigma dS \\ dS &= r d\theta dl \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad d\vec{E}(O) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r d\theta dl}{l^2} \vec{u}$$



Le champ élémentaire $d\vec{E}(O)$ a deux composantes : $d\vec{E}(O) = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$.

Cependant, et pour raison de symétrie de la répartition des charges, la composante $d\vec{E}_x$ est la seule qui participe au champ total au point O . D'où :

$$dE_x = dE(O) \cdot \cos \theta \Rightarrow dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r d\theta dl}{l^2} \cos \alpha \rightarrow (1)$$

On exprime $\sin \alpha$ en fonction de l et r , puis on déduit dl :

$$\sin \alpha = \frac{r}{l} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{l^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \\ dl = \frac{1}{\sin \alpha} dr \end{cases}$$

On remplace dans l'équation (1) :

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma r d\theta \frac{1}{\sin \alpha} dr \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \cos \alpha$$

$$dE_x = -\frac{\sigma_0 a}{4\pi\epsilon_0} \cos \alpha \sin \alpha \cdot \frac{dr}{r^2} d\theta$$

Pour obtenir le champ total produit par toute la charge au point O , on doit calculer une intégrale double :

$$E_x = -\frac{\sigma_0 a}{4\pi\epsilon_0} \cos \alpha \sin \alpha \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\theta$$

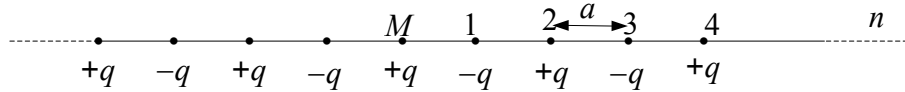
$$E_x = -\frac{\sigma_0 a}{4\pi\epsilon_0} \cos \alpha \sin \alpha \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} [\theta]_0^{2\pi}$$

$$E(O) = E_x = \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} \underbrace{\cos \alpha \sin \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]$$

$$E(O) = \frac{\sigma_0 a}{4\epsilon_0} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \Leftrightarrow \vec{E}(O) = \frac{\sigma_0 a}{4\epsilon_0} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \vec{u}_x$$

Exercice 1.14

Tous les ions sont situés sur la même droite. Soit M un point de symétrie. (Voir figure)



Etudions d'abord la moitié droite de la droite : l'énergie potentielle de la charge située au point M vaut :

$$E_{P_M} = q_M \cdot V_M$$

Le potentiel électrique V_M produit au point M par les ions de la moitié droite est :

$$\begin{aligned} V_M &= \sum V_i = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} \\ V_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{a} < 0 \\ V_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{2a} > 0 \\ V_3 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{3a} < 0 \\ &\dots\dots\dots \\ |q_1| &= |q_2| = |q_3| = \dots = |q| \end{aligned} \quad \Rightarrow V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots\dots\dots + \frac{1}{n} \right)$$

Donc l'énergie potentielle de la charge située au point M (en considérant les deux moitiés ensembles) est :

$$\begin{aligned} E_{P_M} &= 2q_M \cdot V_M \\ |q_M| &= q \end{aligned} \quad \Rightarrow E_{P_M} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots\dots\dots + \frac{1}{n} \right)$$

Ce qui équivaut à :

$$E_{P_M} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots\dots\dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$\text{Sachant que : } \ln(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots \frac{x^n}{n} \right),$$

$$\text{Donc : } \ln(1+1) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots\dots \frac{1}{n} \right)$$

D'où :

$$E_{P_M} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \ln 2 \Rightarrow \boxed{E_{P_M} = -3,2 \cdot 10^{-26} \text{ J}}$$

Exercice 1.15

Le champ électrostatique au point O : (voir figure ci-dessous)

La couronne sphérique élémentaire a pour épaisseur $Rd\theta$, pour circonférence $2\pi R \sin \theta$ et porte la charge élémentaire $dq = \sigma dS = 2\pi R^2 \sigma_0 \sin \theta \cos \theta d\theta$. A cause de la symétrie, le champ $\vec{E}_x$ participe seul dans le champ $\vec{E}$.

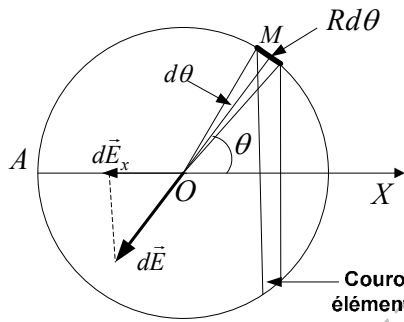
D'après la figure on a :

$$dE_x(O) = -dE(O) \cos \theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \cos \theta$$

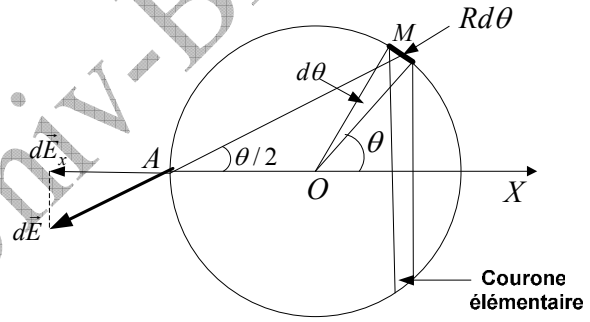
$$dE_x(O) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R^2 \sigma_0 \sin \theta \cos \theta d\theta}{R^2}$$

$$E_x(O) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \underbrace{\sin \theta \cos^2 \theta}_{\cos^2 \theta \cdot d(\cos \theta)} d\theta \Rightarrow E_x(O) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi$$

$$\boxed{E(O) = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(O) = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{u}_x}$$



Champ au point O



Champ au point A

Le champ électrostatique au point A : (voir figure ci-dessus)

La même couronne élémentaire d'épaisseur $Rd\theta$ et de circonférence $2\pi R \sin \theta$ porte la charge élémentaire $dq = \sigma dS = 2\pi R^2 \sigma_0 \sin \theta \cos \theta d\theta$. La différence entre ce cas et le cas précédent est la distance entre le point M et le point A . D'après la figure :

$$\begin{aligned} (OM)^2 &= (OA)^2 + (AM)^2 + 2(OA)(AM) \cos \frac{\theta}{2} \\ R^2 &= R^2 + r^2 + 2rR \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow (OA) = r = 2R \cos \frac{\theta}{2}$$

Pour raison de symétrie, le champ $\vec{E}_x$ participe seul dans le champ $\vec{E}$.

$$dE_x(A) = -dE(A) \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$dE_x(A) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R^2 \sigma_0 \sin \theta \cos \theta d\theta}{\left(2R \cos \frac{\theta}{2}\right)^2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} d\theta$$

On procède à la transformation trigonométrique : $\sin \theta = \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$, puis on remplace pour obtenir :

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0} \int_0^\pi \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \cos \theta d\theta = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0} \int_0^\pi 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta d\theta$$

On procède à une autre transformation trigonométrique : $2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta = \sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}$, puis par remplacement on obtient :

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0} \int_0^\pi \left(\sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta$$

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0} \left[-\frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0} \left[+\frac{2}{3} - 2 \right]$$

$$\boxed{E_x(A) = \frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(A) = \vec{E}_x(A) = \frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0} \vec{u}_x}$$

Exercice 1.16

1/ Le potentiel élémentaire dV produit au centre O par une charge ponctuelle dq est :
 $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{R}$ (chaque dq , et quelque soit sa position sur la surface de la demie-sphère est située à la distance R du centre O).

La surface de la demie sphère étant $S = \frac{4\pi R^2}{2}$, elle porte la charge totale :
 $q = \sigma S \Rightarrow q = 2\sigma\pi R^2$. Donc le potentiel au point O produit par chaque charge est :

$$\left. \begin{aligned} V(O) &= \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{R} \\ V(O) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \\ q &= 2\sigma\pi R^2 \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{V(O) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}}$$

Pour calculer le champ au centre de la demie sphère, on divise la demie sphère en couronnes élémentaires. Chaque couronne a une circonférence 2π , où $r = R \sin \theta$, d'épaisseur $R d\theta$ et sa surface $dS = 2\pi R^2 d\theta$. Chaque couronne élémentaire porte donc une charge élémentaire $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma R^2 \sin \theta d\theta$. (Voir figure ci-dessous)

Le champ élémentaire dE produit au centre O par la charge élémentaire portée par la couronne est : $d\vec{E} = dE_z + d\vec{E}_x$.

Pour raison de symétrie, le champ produit est porté par l'axe Oz , et par conséquent :

$$\left. \begin{aligned} d\vec{E}_x &= dE \cdot \sin \theta \cdot \vec{u}_x = 0 \\ d\vec{E}_z &= dE \cdot \cos \theta \cdot \vec{u}_z \end{aligned} \right| \Rightarrow d\vec{E} = d\vec{E}_z$$

De tout cela on en déduit :

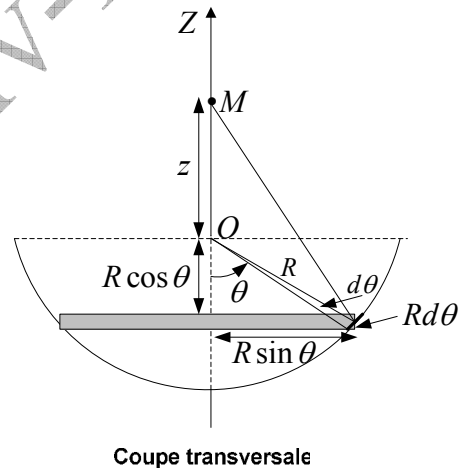
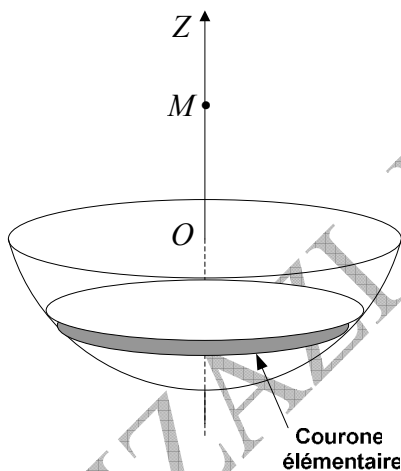
$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{R^2} \cos \theta$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{R^2} \cos \theta \Rightarrow dE_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

On procède à une transformation trigonométrique : $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$, puis on remplace et on intègre pour obtenir finalement le champ électrostatique $E(O)$ produit par toute la charge surfacique au centre de la demie sphère :

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta \Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]$$

$$\boxed{E_z = E(O) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_z = \vec{E}(O) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \vec{u}_z}$$



On n'a calculé que le potentiel $V(O)$ en un point déterminé et non la fonction $V(z)$ du potentiel sur tout le long de l'axe Oz . C'est pour cette raison qu'on ne peut pas utiliser la formule $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ pour calculer le champ.

2/ En suivant les mêmes étapes que pour la question précédente, avec la seule différence que dans ce cas toutes les charges élémentaires dq ne sont pas situées à la même distance du point M , situé lui même sur l'axe Oz .

$$\left. \begin{aligned} dV &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r} \\ dS &= 2\pi R^2 d\theta \\ r^2 &= (z + R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2 \end{aligned} \right| \Rightarrow dV = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{\sin \theta d\theta}{(z^2 + R^2 + 2Rz \cos \theta)^{1/2}}$$

Pour intégrer cette expression on pose $u = z^2 + R^2 + 2Rz \cos \theta$, dont la différentielle est $du = -2Rz \sin \theta d\theta$, et nous savons que $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u}$. D'où :

$$V(M) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{(-2zR)} \int_{u(\theta=0)}^{u(\theta=\pi/2)} \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$V(M) = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} \left[\sqrt{u} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \Rightarrow V(M) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} \left[z + R - \sqrt{z^2 + R^2} \right]$$

Pour obtenir le champ électrique il suffit de dériver la fonction du potentiel par rapport à z :

$$\vec{E}(z) = -\frac{dV(z)}{dz} \vec{u}_z \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{R}{z^2} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z^2} \right)$$

$$E(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{R - \sqrt{z^2 + R^2}}{z^2} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

Quand $z = 0$, $V(0)$ et $E(0)$ prennent des formes indéterminées. C'est pour cela qu'on doit chercher leurs limites quand $z \rightarrow 0$.

Ecrivons le potentiel sous la forme :

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{R}{z} - \frac{(z^2 + R^2)^{1/2}}{z} \right] = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{R}{z} - \frac{R}{z} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{1/2} \right]$$

Calculons la limite du potentiel quand $z \rightarrow 0$:

$$V(0) = \lim_{z \rightarrow 0} V(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{R}{z} - \frac{R}{z} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z^2}{R^2} \right) \right] \Rightarrow V(0) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

Pour le champ on suit le même raisonnement :

$$E(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{R}{z^2} - R \frac{\left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{1/2}}{z^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{z^2}{R^2} + R^2}} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(-\frac{R}{z^2} \left(\frac{z^2}{2R^2} \right) + \frac{1}{R} \right)$$

$$E(0) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

Ainsi, nous avons retrouvé les valeurs du potentiel et du champ qui sont parfaitement équivalentes aux résultats de la question 1/.

Exercice 1.17

Soit un axe de symétrie Oz (perpendiculaire au plan infini), et un point M de l'axe Oz infiniment proche du plan.

Le champ résultant est porté par l'axe Oz et ce pour la raison de symétrie.

1/ a/ On divise le plan en une série de couronnes, de rayon et d'épaisseur d , comme indiqué sur la figure-a :

Chaque couronne située à la distance R du point M porte la charge élémentaire $dq = 2\pi r dr \cdot \sigma$.

Le potentiel électrique élémentaire produit par la couronne est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{R}$$

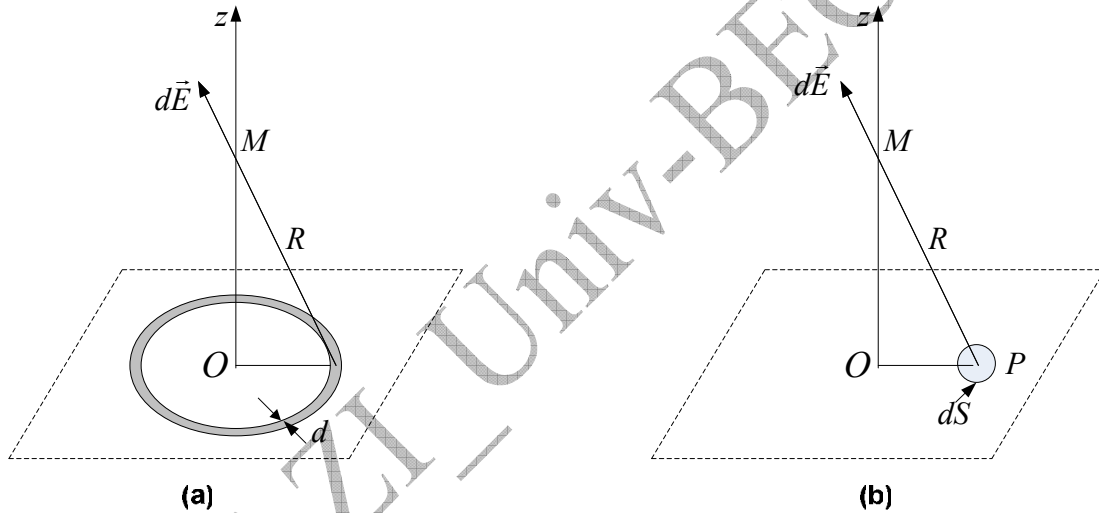
En prenant $V = 0$ quand $r \rightarrow \infty$, le potentiel total produit par tout le plan est :

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Rightarrow V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^\infty$$

$$V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

Il suffit maintenant de dériver l'expression trouvée du potentiel pour obtenir le champ électrique :

$$E = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



b/ Pour diversifier, on calcule cette fois le champ électrique puis on en déduit le potentiel électrique.

Soit $d\vec{E}$ le champ élémentaire produit par la charge $dq = \sigma dS$ que porte une surface élémentaire dS entourant le point P du plan (figure-b) :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(PM)^2} \vec{u}_P$$

$$\vec{E}(M) = \int dE \cdot \cos \theta \cdot \vec{u}_z$$

$$dq = \sigma \cdot dS$$

$$PM = r$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dS \cdot \cos \theta}{r^2} \vec{u}_z$$

On reconnaît l'angle solide élémentaire $d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$ sous lequel on voit, du point M , la surface élémentaire dS autour du point P . Puisque le plan est infini, on le voit sous un angle solide $\Omega_M = 2\pi$. d'où :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z} \Leftrightarrow \boxed{E(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

On obtient l'expression du potentiel à partir de l'expression du champ électrique en intégrant :

$$dV = -Edz \Rightarrow V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^z dz \Rightarrow \boxed{V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z}$$

2/ **En utilisant le théorème de Gauss** : sur la figure-c, on choisit un cylindre comme surface de Gauss.

Le flux à travers la surface latérale est nul car $\vec{E} \perp d\vec{S}$, mais le flux à travers chacune des surfaces des bases S_1 et S_2 est égal à : $\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2} = ES$. La charge enfermée dans le cylindre est $Q_{\text{int}} = \sigma S$. D'après le théorème de Gauss le champ électrique produit par le plan infini est donc :

$$\Phi = 2ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

D'après les résultats obtenus, on remarque que le champ électrique produit par un plan infini est constant dans tout l'espace entourant ce plan ; cependant le potentiel électrique est proportionnel à la distance entre le plan et le point situé sur l'axe de ce même plan.

3/ Au cours de sa chute la charge est soumise à deux forces verticales : son poids $\vec{P}$ et la force électrostatique $\vec{F}_e$. On applique la relation fondamentale de la dynamique pour calculer l'accélération de la charge :

$$\begin{array}{l} \vec{P} + \vec{F}_e = m\vec{a} \\ F_e = qE = q \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ P = mg \end{array} \Rightarrow \boxed{a = g + \frac{q}{2m} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

L'accélération est constante et la trajectoire est rectiligne, donc le mouvement est rectiligne uniformément varié.

La vitesse de la charge à son arrivée sur le plan est :

$$v = \sqrt{2az} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2 \left(g + \frac{q}{2m} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right) z}}$$

La durée de la chute est :

$$\begin{array}{l} z = \frac{1}{2} at^2 \\ t = \sqrt{\frac{2z}{a}} \end{array} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2z}{g + \frac{q}{2m} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}}}$$

Exercice1.18

On peut modéliser la cavité sphérique de rayon r creusée dans la sphère de rayon R comme étant la superposition d'une sphère chargée de rayon r , de centre O_2 et de densité $-\rho$, et d'une sphère de rayon R de centre O_1 et de densité volumique $+\rho$. (Voir figure ci-dessous).

On applique le principe de superposition en un point de la cavité (voir figure ci-dessous) :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

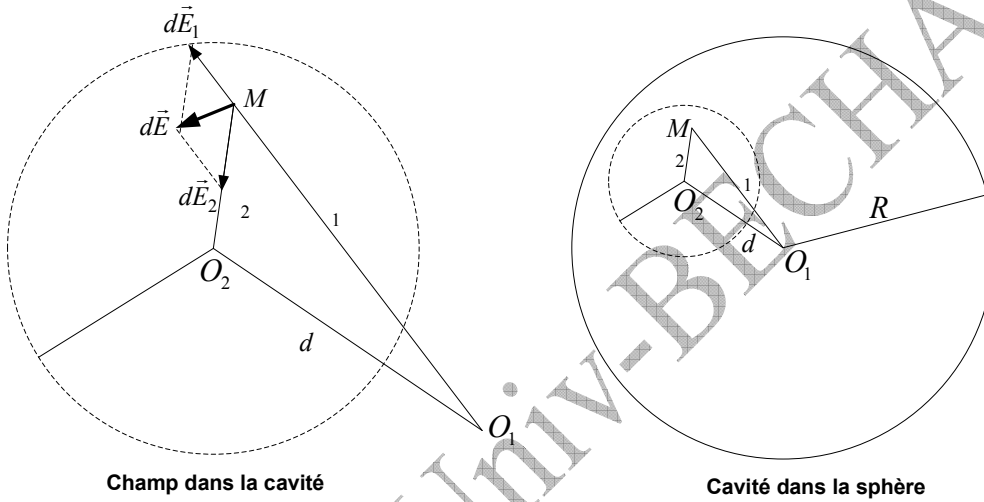
$\vec{E}_1(M)$: champ résultant de ρ

$\vec{E}_2(M)$: champ résultant de $-\rho$

La symétrie et l'invariance de chaque source confirment que le champ est radial :

$$\vec{E}_1(M) = E_1 \vec{u}_1, \quad \vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{O_1 M}}{r_1}$$

$$\vec{E}_2(M) = E_2 \vec{u}_2, \quad \vec{u}_2 = \frac{\overrightarrow{O_2 M}}{r_2}$$



On utilise le théorème de Gauss : Pour chaque distribution de charge, on prend une sphère de rayon r_i , de centre O_i et de surface fermée S_i passant par le point M .

$$\oiint \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho V_i}{\epsilon_0}$$

$$\oiint E_1 dS_1 = E_1 \cdot 4\pi r_1^2 = \rho \frac{4}{3\epsilon_0} \pi r_1^3 \Rightarrow E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1$$

$$\oiint E_2 dS_2 = E_2 \cdot 4\pi r_2^2 = -\rho \frac{4}{3\epsilon_0} \pi r_2^3 \Rightarrow E_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2$$

Ecrivons les deux expressions vectorielles des deux champs produits :

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1 \vec{u}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1 \frac{\overrightarrow{O_1 M}}{r_1} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 M} \rightarrow (1)$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2 \vec{u}_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2 \frac{\overrightarrow{O_2 M}}{r_2} \Rightarrow \vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_2 M} \rightarrow (2)$$

On additionnant les deux champs, on obtient le champ résultant au point M appartenant à la cavité :

$$(1) + (2) \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\underbrace{\vec{O_1M} - \vec{O_2M}}_{\vec{O_1O_2}} \right)$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O_1O_2}} \Leftrightarrow \boxed{E(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} d = C^{te}}$$

Le champ électrostatique résultant dans la cavité est uniforme.

Exercice 1.19

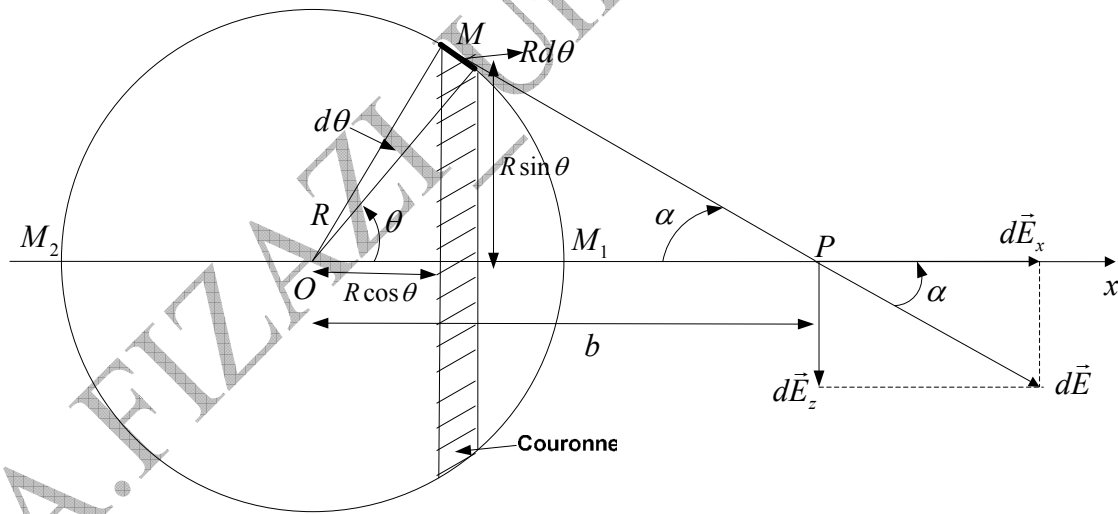
Pour calculer le champ à l'extérieur de la sphère, on divise la sphère en couronnes élémentaires. La circonférence de chaque couronne est $2\pi\rho$, où $\rho = R \sin \theta$ (ρ étant le rayon de la couronne), d'épaisseur $Rd\theta$ et de surface $dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$. Chaque couronne porte donc une charge élémentaire $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma R^2 \sin \theta d\theta$.

Le champ élémentaire dE produit par la charge élémentaire que porte la couronne est $d\vec{E} = dE_z + d\vec{E}_x$.

En raison de la symétrie, le champ produit est porté par l'axe OX , et par conséquent :

$$\left. \begin{aligned} d\vec{E}_z &= -dE \cdot \sin \alpha \cdot \vec{u}_z = \vec{0} \\ d\vec{E}_x &= dE \cdot \cos \alpha \cdot \vec{u}_x \end{aligned} \right| \Rightarrow d\vec{E} = d\vec{E}_x \Leftrightarrow dE_x = dE \cos \alpha$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \alpha \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma R^2 \sin \theta d\theta}{r^2} \cos \alpha \rightarrow (1)$$



Pour éliminer θ et α de l'expression de dE_x , on remplace $\cos \theta$ et $\sin \theta d\theta$:

$$R^2 = b^2 + r^2 - 2br \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + r^2 - R^2}{2br}$$

$$r^2 = R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{R^2 + b^2 - r^2}{2Rb} \rightarrow (2)$$

En dérivant les deux membres de l'équation (2), on obtient : $\sin \theta d\theta = \frac{r dr}{Rb}$

En remplaçant dans l'équation (1), et en organisant les résultats on obtient l'expression du champ élémentaire :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta}{r^2} \cos\alpha \Rightarrow dE_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2}{r^2} \frac{r dr}{Rb} \left(\frac{b^2 + r^2 - R^2}{2br} \right)$$

$$dE_x = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\sigma R}{b^2} \left(\frac{b^2 + r^2 - R^2}{r^2} \right) dr = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R}{b^2} \left(\frac{b^2 - R^2}{r^2} + 1 \right) dr$$

$$\boxed{dE_x = \frac{\sigma R}{4b^2\epsilon_0} \frac{b^2 - R^2}{r^2} dr + \frac{\sigma R}{4b^2\epsilon_0} dr}$$

Intégrons à présent :

$$E_x = \frac{\sigma R}{4b^2\epsilon_0} \left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{b^2 - R^2}{r^2} dr + \int_{r_1}^{r_2} dr \right] \Rightarrow \boxed{E_x = \frac{\sigma R}{4b^2\epsilon_0} \left(-\frac{b^2 - R^2}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} + r \Big|_{r_1}^{r_2} \right)}$$

Il reste à déterminer les limites de r_1 et de r_2 : en se référant à la figure ci-dessus, on suit les positions du point M appartenant à la couronne élémentaire considérée. Plusieurs cas se présentent alors :

A l'extérieur de la sphère : Lorsque M est confondu avec M_1 on a : $r_1 = PM_1 = b - R$, et lorsqu'il est confondu avec M_2 , on a : $r_2 = PM_2 = b + R$

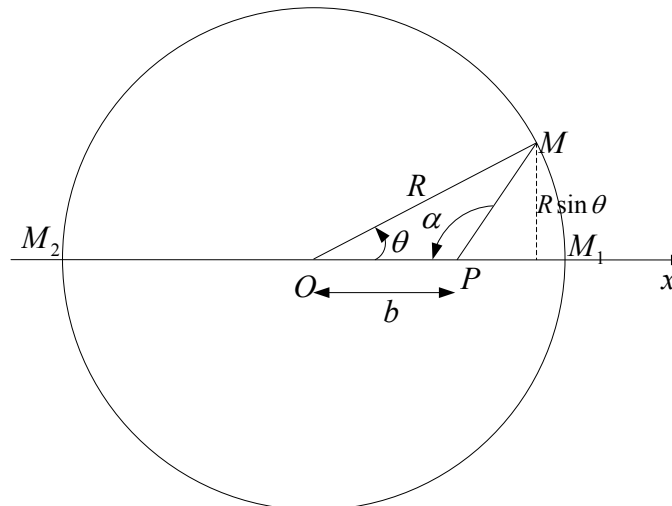
Le champ résultant est donc :

$$E = E_x = \frac{\sigma R}{4b^2\epsilon_0} \left(-\frac{b^2 - R^2}{r} \Big|_{b-R}^{b+R} + r \Big|_{b-R}^{b+R} \right)$$

$$E = \frac{\sigma R}{4b^2\epsilon_0} \left\{ \left[(b+R) - (b-R) \right] - \left[\left(\frac{b^2 - R^2}{b+R} \right) - \left(\frac{b^2 - R^2}{b-R} \right) \right] \right\}$$

$$E = \frac{\sigma R}{4b^2\epsilon_0} (2R + 2R) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{b^2}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{b^2} \vec{u}_x}$$

A l'intérieur de la sphère : Voir figure suivante :



Quand M est confondu avec M_1 on a : $r_1 = PM_1 = R - b$, et quand il est confondu avec M_2 on a : $r_2 = PM_2 = b + R$

Le champ résultant est donc :

$$E = E_x = \frac{\sigma R}{4b^2 \epsilon_0} \left(-\frac{b^2 - R^2}{r} \Big|_{R-b}^{b+R} + r \Big|_{R-b}^{b+R} \right)$$

$$E = \frac{\sigma R}{4b^2 \epsilon_0} \left\{ \left[(b+R) - (R-b) \right] - \left[\left(\frac{b^2 - R^2}{b+R} \right) - \left(\frac{b^2 - R^2}{R-b} \right) \right] \right\}$$

$$E = \frac{\sigma R}{4b^2 \epsilon_0} (2b - 2b) \Rightarrow \boxed{E = 0}$$

A la surface de la sphère : On a trouvé qu'à l'extérieur de la sphère le champ vaut $E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 b^2}$. A la surface le champ prend une valeur particulière :

$$b = R \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x}$$

2/ **On applique le théorème de Gauss :** La surface de Gauss convenable ici est une sphère de rayon b ($b > R$) :

$$\Phi = E \cdot S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$S = 4\pi b^2 \Rightarrow E = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi b^2 \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 b^2}}$$

$$Q_{\text{int}} = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4\pi R^2$$

Discussion :

A l'extérieur de la sphère : $b > R : E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 b^2}$

A l'intérieur de la sphère : $Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow E = 0$

A la surface de la sphère : $b = R \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

3/ Calcul du potentiel électrique : par le même raisonnement on peut écrire :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta}{r} \Rightarrow dV = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2}{r} \frac{r dr}{Rb}$$

A l'extérieur de la sphère :

$$dV = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\sigma R}{b} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R}{b} dr \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R}{b} \int_{b-R}^{b+R} dr$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R}{b} r \Big|_{b-R}^{b+R} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 b}}$$

A la surface de la sphère :

$$b=R \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} R}$$

A l'intérieur de la sphère :

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{R}{b} r \Big|_{R-b}^{b+R} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R}$$

On remarque que le potentiel est constant à l'intérieur de la sphère, c'est ce qui explique que le potentiel est constant à l'intérieur et à la surface de la sphère ; on dit alors que la sphère constitue un **volume équipotentiel**.

4/ Dédution du champ à partir du potentiel :

A l'extérieur de la sphère : On considère b variable ($b > R$) :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{b} \\ E &= -\frac{dV}{db} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{b^2}}$$

A la surface de la sphère : Dans l'expression précédente on pose $b = R$:

$$b=R \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

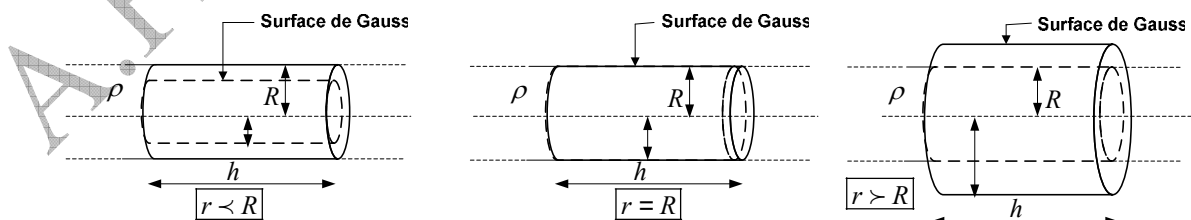
A l'intérieur de la sphère : ($b < R$) le potentiel est constant, sa dérivée est donc nulle :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R = Cte \\ E &= -\frac{dV}{db} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{E = 0}$$

Exercice1.20

Le champ électrostatique dans le cylindre : la surface de Gauss convenable à ce cas est un cylindre de hauteur h , de rayon $r < R$ et qui renferme la charge $Q_{\text{int}} = \rho V = \rho \pi r^2 h$. D'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\rho \pi r^2 h}{2\pi r h \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r \vec{u}_r}$$



Le champ électrostatique à la surface du cylindre : la surface de Gauss convenable ici est un cylindre de hauteur h , de rayon $r = R$ et renfermant la charge $Q_{\text{int}} = \rho V = \rho \pi R^2 h = \rho \pi r^2 h$. D'après le théorème de Gauss on a :

$$\Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\rho \pi R^2 h}{2\pi R h \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_s = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_s = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R \vec{u}_r}$$

Remarque : On peut obtenir l'expression du champ à la surface du cylindre en remplaçant R soit dans l'expression précédente que nous avons trouvée pour le champ à l'intérieur du cylindre, soit dans l'expression qui va suivre du champ à l'extérieur du cylindre.

Champ électrostatique à l'extérieur du cylindre : Nous choisissons comme surface de Gauss pour ce cas, un cylindre de hauteur h , de rayon $r > R$, renfermant une charge $Q_{\text{int}} = \rho V = \rho \pi R^2 h$. Appliquons le théorème de Gauss :

$$\Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 2\pi r h} = \frac{\rho \pi R^2 h}{2\pi r h \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_e = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_e = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} \vec{u}_r}$$

2/ Pour en déduire le potentiel électrique, on fait appel à la formule $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$. Puisque le champ est radial, on peut écrire :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr$$

Pour obtenir les expressions de E_e et E_i , on doit intégrer :

$$V_i = -\int \frac{\rho}{2\epsilon_0} r dr \Rightarrow V_i = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + C_1$$

$$V_e = -\int \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} dr \Rightarrow V_e = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 \ln r + C_2$$

On obtient les constantes d'intégration en se référant à la condition de l'annulation du potentiel en $r = 0$ et sa continuité en $r = R$.

Potentiel à l'intérieur du cylindre : ($R > r > 0$)

$$\left. \begin{array}{l} V_i = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + C_1 \\ r = 0, V = 0 : C_1 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{V_i = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2}$$

Potentiel à la surface du cylindre : si on remplace r par R dans l'expression de V_i , on obtient le potentiel à la surface du cylindre :

$$\left. \begin{array}{l} V_i = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 \\ r = R \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{V_s = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} R^2}$$

Potentiel à l'extérieur du cylindre : ($R < r$)

$$V_e = -\int \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} dr \Rightarrow V_e = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 \ln r + C_2$$

$$\left. \begin{array}{l} V_e = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 \ln r + C_2 \\ r = R, V = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} R^2 \end{array} \right| \Rightarrow C_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 \ln R - \frac{\rho}{4\epsilon_0} R^2$$

$$\boxed{V_e = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 \ln \frac{R}{r} - \frac{\rho}{4\epsilon_0} R^2}$$

Exercice 1.21

La surface de Gauss qui convient à ce cas est celle d'une sphère de rayon r et de surface $S = 4\pi r^2$. Si une charge Q_{int} se trouve à l'intérieur de cette sphère, le champ électrique créé à l'intérieur vaut, d'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \epsilon_0}}$$

Dans les trois cas le champ est radial :

Le champ électrostatique dans la sphère interne ($r < R_1$) : la charge intérieure est la charge contenue dans la surface de Gauss qui est une sphère de rayon $r < R_1$ (cette charge représente une partie seulement de la charge de la sphère interne). On a donc :

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \epsilon_0} \\ Q_{\text{int}} &= \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned} \right| \Rightarrow E = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi r^2 \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{u}_r}$$

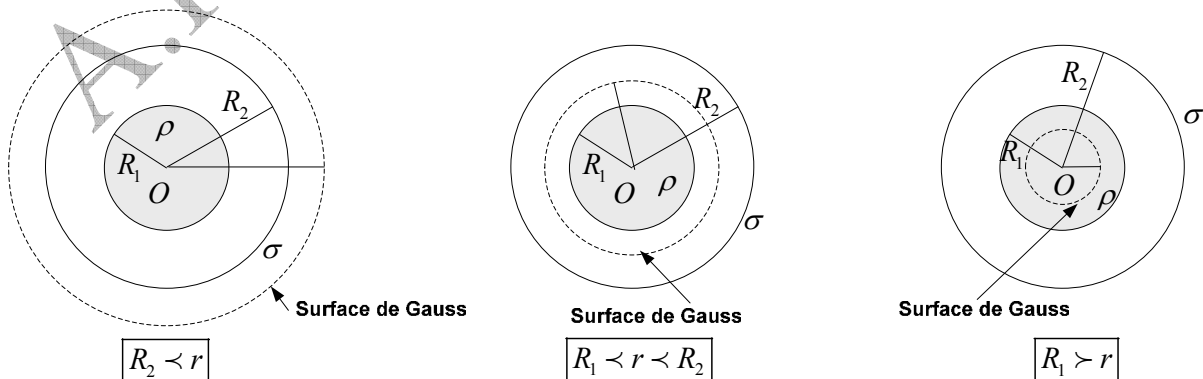
Le champ électrostatique régnant entre les deux sphères ($R_1 < r < R_2$) : la charge dans la surface de Gauss est toute la charge de la sphère interne :

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \epsilon_0} \\ Q_{\text{int}} &= \rho V_1 = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3 \end{aligned} \right| \Rightarrow E = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\pi r^2 \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2} \vec{u}_r}$$

Le champ électrostatique à l'extérieur des deux sphères ($r > R_2$) : la charge dans la surface de Gauss est la charge des deux sphères ensemble :

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \epsilon_0} \\ Q_{\text{int}} &= \rho V_1 + \sigma S_2 = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3 + \sigma 4\pi R_2^2 \end{aligned} \right| \Rightarrow E = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R_1^3 + \sigma 4\pi R_2^2}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R_2^2}{r^2}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R_2^2}{r^2} \vec{u}_r}$$



Le potentiel électrostatique dans les différentes régions citées précédemment : On en déduit le potentiel à partir de la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$. Puisque le champ est radial on peut écrire :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr$$

Dans la région ($r < R_1$) :

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \\ V &= -\int E dr \end{aligned} \right| \Rightarrow V = -\int \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr \Rightarrow \boxed{V = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + C_1}$$

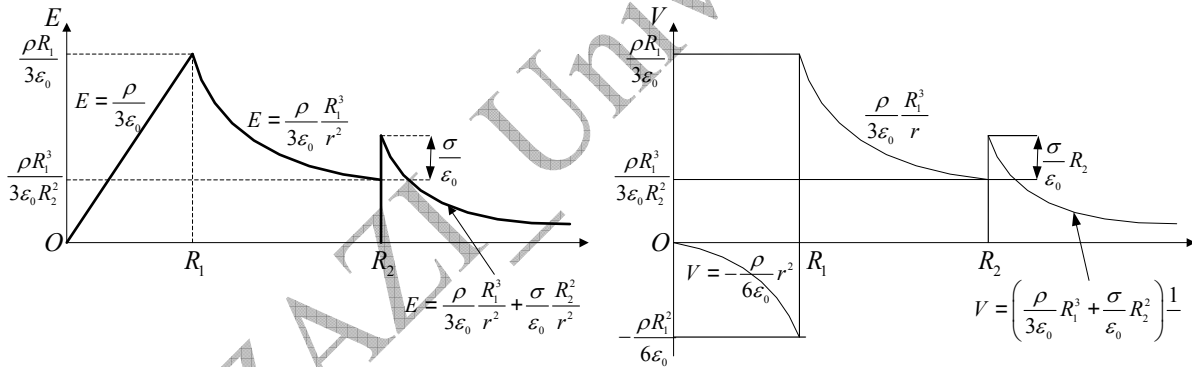
Dans la région ($R_1 < r < R_2$) :

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2} \Rightarrow V = -\int \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2} dr \Rightarrow \boxed{V = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r} + C_2}$$

Dans la région ($r > R_2$) :

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R_2^2}{r^2} \Rightarrow V = -\int \left(\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R_2^2}{r^2} \right) dr \Rightarrow \boxed{V = \left(\frac{\rho}{3\epsilon_0} R_1^3 + \frac{\sigma}{\epsilon_0} R_2^2 \right) \frac{1}{r} + C_3}$$

3/ On a représenté sur les figures ci-dessous les fonctions $E(r)$ et $V(r)$. Pour simplifier la représentation de $V(r)$ on a pris $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.



Exercice 1.22

1/ Le théorème de Gauss est : $\Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 S} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \epsilon_0}}$

a/ Quand $r < R_1$, cela veut dire que la charge à l'intérieur de la surface de Gauss est nulle, et par conséquent le champ est nul.

Quand $r > R_2$, la somme des charges intérieures est nulle aussi : $Q_{\text{int}} = -\lambda l + \lambda l = 0$, ce qui implique que le champ est nul (l est la longueur du cylindre de Gauss).

b/ Quand $R_1 < r < R_2$, la charge dans la surface de Gauss est la charge que porte le cylindre interne, soit $Q_{\text{int}} = +\lambda l$. Le champ électrique est donc :

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\lambda l}{\epsilon_0 S} \\ S &= \pi r^2 l \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \frac{1}{r}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r} \rightarrow (1)$$

2/ Pour en déduire le potentiel électrique on fait appel à la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$. Le champ étant radial, on peut écrire :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr$$

- Pour $r < R_1$ et $r > R_2$, le champ est nul, donc le potentiel dans ces deux régions est constant :

$$E = 0 \Leftrightarrow V = C^{te}$$

- Pour $R_1 < r < R_2$, on intègre l'expression (1) correspondante du champ :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} dr \Rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

Les surfaces équipotentiellles sont d'autant plus rapprochées que le champ est intense, c'est à dire quand λ est petit. Ceci nous amène à déduire que les surfaces équipotentiellles sont rapprochées au voisinage du cylindre intérieur.

Exercice1.23

1/ D'après ce qui est consigné entre les parenthèses, k et $\frac{1}{r}$ ont même dimension. On sait que la dimension de $\frac{1}{r}$ est une longueur (L). Donc la dimension de k est l'inverse de la longueur : $\left[\frac{1}{r}\right] = [k] = L^{-1}$, quant à son unité dans le système international c'est m^{-1} .

2/ En raison de la symétrie sphérique le champ est radial :

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow E(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(2k^2 + \frac{2k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \exp(-2kr) \vec{u}$$

3/ D'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = ES = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{int} = ES$$

$$q(r) = e \left(2k^2 r^2 + 2kr + 1 \right) \exp(-2kr) \rightarrow (1)$$

4/ Pour $r = 0$, la charge est égale à e . Cela prouve que la distribution contient une charge ponctuelle e située au centre O .

5/ $\lim_{r \rightarrow \infty} q(r) = 0$: ceci veut dire que la charge totale de la distribution est nulle : et puisque au centre il existe une charge ponctuelle positive e , il doit obligatoirement exister une charge négative $-e$ répartie dans tout l'espace autour du centre O , telle que la somme des deux charges soit nulle.

6/ Pour cette question, on divise l'espace en sphères élémentaires de volume $dv = 4\pi r^2 dr$, et portant la charge élémentaire $dq = \rho(r) dv$. D'où :

$$dq = \rho(r) 4\pi r^2 dr \rightarrow (2)$$

L'intégration de l'expression (1) donne :

$$dq = -4ek^3 r^2 \exp(-2kr) \rightarrow (3)$$

Par identification des expressions (2) et (3) on obtient l'expression de la densité :

$$\rho(r) = \frac{-e}{\pi} k^3 \exp(-2kr)$$

Exercice 1.24

1/ **Le champ électrostatique** : Par raison de symétrie, le champ est radial. On peut donc utiliser la formule $E = -\frac{dV}{dr}$:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a} \Leftrightarrow \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a} \vec{u}_r$$

2/ **Le flux du champ** : puisque la composante du champ est radiale et constante sur une sphère de rayon r , le flux est donc :

$$\Phi = \iint \vec{E} d\vec{S} \Rightarrow \Phi = ES \Rightarrow \Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$$

La recherche des limites nous conduit aux résultats :

Quand r tend vers 0 : $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$

Quand r tend vers ∞ : $\Phi = 0$

Conclusion : d'après le théorème de Gauss, l'expression de la charge interne de la sphère de rayon r est : $Q(r) = \epsilon_0 \Phi$. On en déduit de cela que la charge totale de la distribution est nulle et qu'au centre O il existe une charge ponctuelle positive q .

3/ **La densité volumique de la charge** :

La charge élémentaire dq enfermée entre deux sphères de rayons r et d est $dq = \rho(r) dV = 4\pi r^2 dr \cdot \rho(r)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \frac{\epsilon_0}{4\pi r^2} \frac{d\Phi}{dr} \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{r}{a^2} e^{-r/a} \end{aligned} \Rightarrow \rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{1}{r} e^{-r/a}$$

Cette densité est négative et la charge totale est $-q$.

4/ **L'étude de la fonction** : elle commence par le calcul de la dérivée, puis déterminer le point où la dérivée s'annule. Ainsi on peut déterminer l'extremum de la fonction :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(r)}{dr} &= \frac{q}{4\pi a^2} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) \\ \frac{d\rho(r)}{dr} &= 0 \Leftrightarrow \boxed{r = a} \end{aligned}$$

La fonction $\rho(r)$ passe par une valeur maximale en $r = a$. Pour saisir le sens de cette fonction on cherche sa dimension puis son unité :

$$[\rho(r)] = \frac{[q]}{[r]} = \frac{C}{L} \rightarrow C.m^{-1}$$

La fonction étudiée est donc la densité linéaire (ici radiale) des charges.

Information utile : En réalité, la distribution étudiée est celle de l'atome d'hydrogène. La charge positive ($+q$) du proton se trouve au centre de l'atome. Ce proton constitue le noyau de l'atome autour duquel gravitent l'unique électron qui porte une charge négative ($-q$). Quant à a , elle représente le rayon de Bohr qui est la distance entre le noyau et la région où il y a une forte probabilité de la présence de l'électron.

Exercice 1.25

1/ Le potentiel électrique produit au point M :

$$V_M = V_A + V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} a \ll r \Rightarrow r_1 \approx r_2 \approx r \\ r_2 - r_1 = a \cos \theta \\ p = qa \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{V_M = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}}$$

Dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, le champ possède deux composantes $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$. A partir de la formule $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$, on peut déterminer ces deux composantes polaires :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow E_r = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

Donc le champ est :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{1/2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (3 \cos^2 \theta + 1)^{1/2}}$$

2/ **Equation des surfaces équipotentiellles** : a partir de l'équation du potentiel trouvée précédemment, on en déduit l'équation de ces surfaces :

$$V = C^{te} = V_0 \Rightarrow r^2 = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 V_0} \cos \theta \Rightarrow \boxed{r^2 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 V_0} \cos \theta}$$

A chaque valeur de V_0 correspond une surface équipotentielle située à la distance de O .

Equation des lignes de champ :

La ligne du champ $\vec{E}$ est définie comme étant colinéaire à $\vec{dl}$, donc $\vec{E} = \lambda \vec{dl}$, ($\lambda = C^{te}$). On connaît les composantes de $\vec{E}$ et les composantes de $\vec{dl}$. A partir de la relation entre les deux vecteurs on peut trouver l'équation des lignes de champ :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = \lambda \vec{dl} \\ \vec{E} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \end{pmatrix}, \vec{dl} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{dr}{E_r} = r \frac{d\theta}{E_\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta} d\theta} \rightarrow (1)$$

En intégrant l'équation (1), on obtient à une constante près, le résultat suivant :

$$\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta} d\theta \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}} d\theta$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} d\theta \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 d(\sin \theta)}{\sin \theta}$$

$$\int \frac{dr}{r} = 2 \int \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta} \Rightarrow \ln r = 2 \ln (\sin \theta) + K$$
$$\ln r - \ln (\sin^2 \theta) = K \Rightarrow \ln \frac{r}{\sin^2 \theta} = K \Rightarrow \frac{r}{\sin^2 \theta} = K$$

De tout cela, on conclut que l'équation de la trajectoire est :

$$\boxed{r = K \sin^2 \theta}$$

A chaque valeur de K correspond une ligne de champ située à la distance de O tel que $r = K \sin^2 \theta$.

Les lignes de champs sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentiellles.

II / CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

النواقل المتوازنة

A/ DEFINITION ET PROPRIETES DES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE (تعريف النواقل المتزنة و خصائصها):

Rappelons d'abord, qu'un conducteur électrique est tout corps dans lequel les porteurs de charges peuvent se déplacer librement.

1/ Définition : Un conducteur est dit en équilibre électrostatique si les charges qu'il renferment sont en état de repos.

2/ Propriétés des conducteurs en équilibre :

- Puisque les charges à l'intérieur du conducteur en équilibre sont au repos, elles ne sont donc soumises à aucune force, cela veut dire que le **champ électrostatique dans le conducteur en équilibre est nul**.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$$

- **Le vecteur champ électrostatique est perpendiculaire à la surface du conducteur en équilibre :** ceci s'explique par le fait que les lignes de champ sont, d'une part, tangentes au vecteur champ, et d'autre part perpendiculaires au plan.
- **Le conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel :** On a déjà vu que la différence de potentiel entre deux points M et M' est définie par la relation $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$, et puisque $\vec{E} = \vec{0}$, cela implique que le potentiel est constant en tout point intérieur au conducteur en équilibre. En conséquence, la surface externe du conducteur est une surface équipotentielle, ce qui prouve que le champ est perpendiculaire à la surface du conducteur.
- **La charge dans le conducteur en équilibre est nulle, elle se concentre sur la surface du conducteur :** En effet, et puisque le nombre de protons est égal au nombre d'électrons, la charge totale à l'intérieur du conducteur est nulle. Toutes les charges libres se répartissent sur une surface qui occupe une épaisseur constituée de quelques couches d'atomes (ici, le mot surface ne doit pas être compris au sens géométrique). Les charges électriques en mouvement s'accumulent sur la surface jusqu'à ce que le champ qu'elles produisent devienne égal au champ électrique extérieur appliqué à cette surface, ce qui conduit à un état d'équilibre.

3/ Théorème de Coulomb (نظرية كولومب) :

Au voisinage d'un conducteur en équilibre, le champ est perpendiculaire à la surface du conducteur et son intensité vaut $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, σ étant la densité surfacique du conducteur.

Cette expression donne la valeur du champ électrique en un point proche de la surface et à l'extérieur du conducteur, alors que le champ à l'intérieur est nul. Sur la surface le champ prend une valeur moyenne E_{moy} .

Le résultat de ce qui vient d'être dit est qu'à la traversée de la surface du conducteur, le champ électrique varie comme indiqué sur la figure 2.1

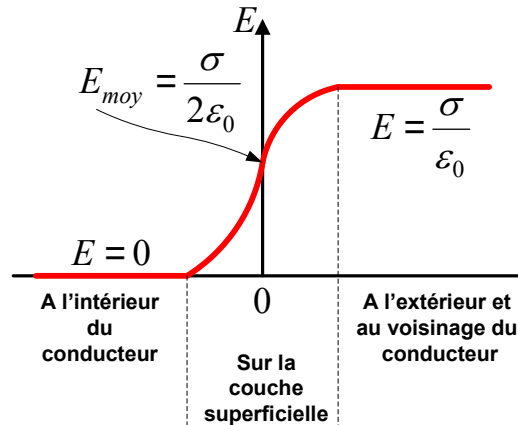


Fig 2.1 : Variation du champ électrique à la traversée de la surface du conducteur

En peut résumer les propriétés du conducteur en équilibre par la figure 2.2.

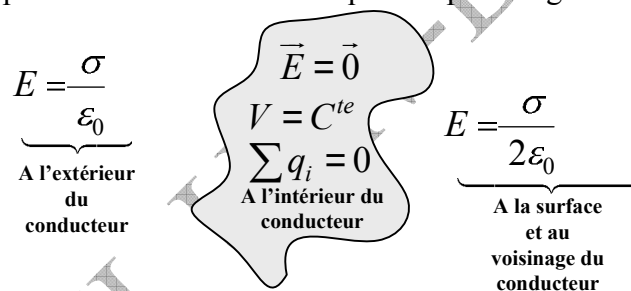


Fig 2.2 : Propriétés du conducteur en équilibre

4/ Pression électrostatique (الضغط الكهروساكن) :

- **Définition** : la pression électrostatique est la force électrique appliquée sur l'unité de surface.

(Cette force résulte de la répulsion entre les charges sur la surface et les autres charges).

$$p_e = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (2.1)$$

Raisonnement : L'expression de la force élémentaire $d\vec{f}$ appliquée sur la surface élémentaire extérieure $d\vec{S}_{ext}$ d'un conducteur qui porte sur sa surface une charge élémentaire $dq = \sigma \cdot dS_{ext}$ est :

$$d\vec{f} = dq \cdot \vec{E}_{moy} = \sigma \cdot d\vec{S}_{ext} \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

D'où :

$$d\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot d\vec{S}_{ext} \Rightarrow \frac{d\vec{f}}{d\vec{S}_{ext}} = p_e = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Au vu de l'expression de la pression électrostatique, on en déduit que c'est une grandeur scalaire, et qu'elle est toujours positive. Cette pression peut être considérée aussi comme étant la force capable d'arracher les charges au conducteur.

L'unité de la pression électrostatique : Le pascal (Pa).

5/ Pouvoir des pointes (قدرة السطوح الحادة) :

Les charges ont tendance à s'accumuler sur les surfaces en pointe (c'est à dire celles dont le rayon de courbure est petit). Nous allons expliquer ceci dans l'exemple suivant :

La figure 2.3 représente deux conducteurs de forme sphérique, chacun avec ses caractéristiques, reliés par un fil.

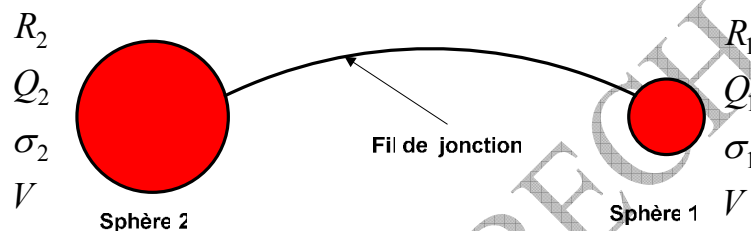


Fig 2.3 : Pouvoir des pointes

Les sphères sont au même potentiel V :

$$V = K \frac{Q_1}{R_1} = K \frac{Q_2}{R_2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_1 \cdot 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_2 \cdot 4\pi R_2^2}{R_2} \Rightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

Puisque $R_2 > R_1$, donc $\sigma_1 > \sigma_2$: cela est la preuve que les charges ont tendance à s'accumuler sur les surfaces pointues. On trouve leurs applications dans :

Par mesure de sécurité, des paratonnerres sont fixés sur les immeubles, ou sur tout autre type de construction, et qui sont reliés à la terre par l'intermédiaire de fils conducteurs. Leur rôle est d'attirer des charges accumulées dans l'air et les décharger dans la terre. Si les conditions pour l'éclatement d'un tonnerre sont réunies autour de la construction, les charges préfèrent se diriger vers la pointe du paratonnerre d'où elles sont conduites vers le sol. Les hautes constructions sont ainsi protégées contre les tonnerres.

Il en est de même pour les bords métalliques pointus attachés aux ailes d'avions qui permettent la décharge continue de l'air des charges électriques.

6/ Capacité propre d'un conducteur isolé (السعة الذاتية لنواقل منفرد في الفضاء) :

➤ Définition : la capacité électrique d'un conducteur isolé est le rapport entre sa charge et son potentiel :

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.2)$$

Par exemple : La capacité d'un conducteur sphérique placé dans le vide, dont le potentiel est $V = K \frac{Q}{R}$, est égale à :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0.R$$

Si l'isolant entourant le conducteur sphérique est autre que le vide, alors là, sa capacité est $C = 4\pi\epsilon.R$, où ϵ est la permittivité de l'isolant.

Généralisation : On peut généraliser la notion de capacité à un ensemble de conducteurs. Dans le cas de deux conducteurs portant deux charges $+Q$ et $-Q$, dont la différence de potentiel entre elles est $U = V_1 - V_2$ (figure 2.4), la capacité du système est :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U}$$

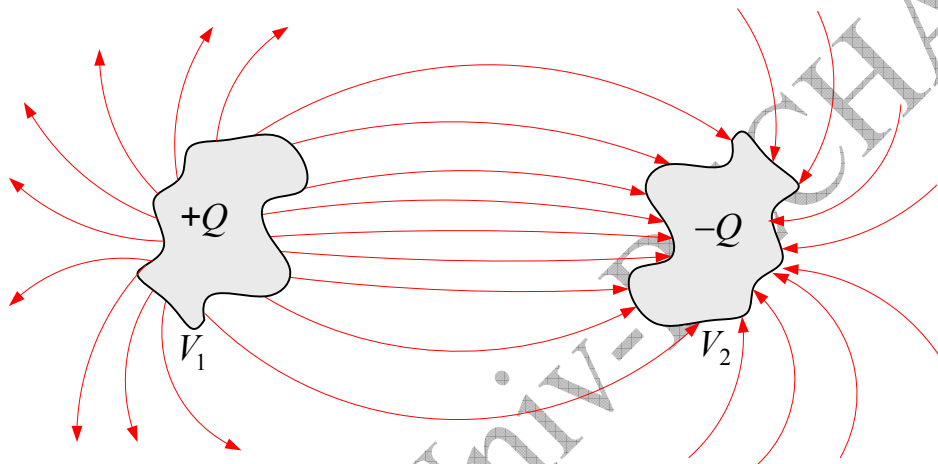


Fig 2.2 : Capacité de deux conducteurs

L'unité de la capacité : c'est le coulomb/volt ($C.V^{-1}$), et qu'on appelle le farad (F) en mémoire à Michael Faraday (1791-1867).

Ordre de grandeurs de la capacité de quelques corps :

Pour la terre, en considérant que le rayon est $R = 6400km$, sa capacité vaut $C = 70\mu F$.

Pour une sphère de rayon $r = 10cm$, de potentiel $V = 1000V$ par rapport à la terre, sa capacité est $C = 10pF$.

7/ Phénomène d'influence entre conducteurs chargés (ظاهرة التأثير بين النواقل المشحونة) :

Que se passe-t-il quand on place un conducteur électriquement en équilibre dans un champ électrostatique uniforme ?

Puisque les charges sont libres de se mouvoir, on va assister à un déplacement de charges positives dans le sens de $\vec{E}$, et un déplacement de charges négatives dans le sens contraire. Il se produit alors une polarisation du conducteur (apparition d'un pôle positif et d'un pôle négatif). Il en découle de cette émigration une répartition surfacique non uniforme, mais la charge totale du conducteur demeure nulle.

➤ Influence partielle (التأثير الجزئي) :

On place la charge $+q$ au voisinage du conducteur (D) non chargé. Figure 2.5

La charge $+q$ produit, en tout point de l'espace qui l'entoure, et particulièrement dans (D) , un champ électrique $\vec{E}$ qui oblige les électrons libres à se déplacer vers la face N ; cette région se charge donc négativement. Les électrons en quittant la face P créent un déséquilibre de charges dans cette région qui se charge positivement.

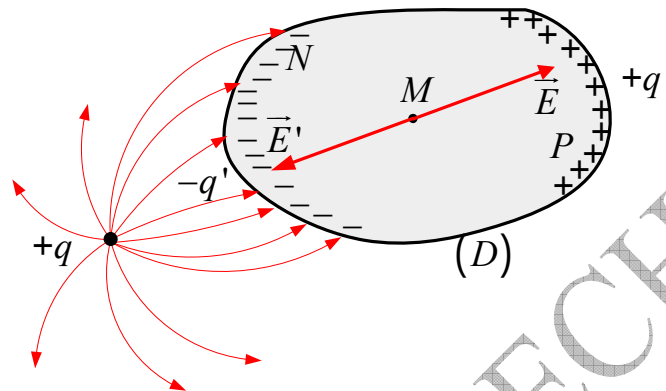


Fig 2.5 : Influence d'une charge sur un conducteur en équilibre

Les charges N et P produisent à leur tour au point M un champ $\vec{E}'$ de sens contraire à celui du champ $\vec{E}$. Le déplacement des électrons s'arrête quand $\vec{E} + \vec{E}' = \vec{0}$, le conducteur (D) acquiert donc toutes les propriétés d'un conducteur en équilibre tel que :

- Au point M : $\vec{E}_{(+q)} + \vec{E}_{(+q')} + \vec{E}_{(-q')} = \vec{0}$, le champ est nul dans le conducteur,
- Sa surface est équipotentielle,
- Les charges sont accumulées sur la surface et réparties de façon singulière. Dans ce cas, Il s'est produit une électrisation par influence. La charge totale du conducteur (D) reste nulle. Tout ce qui s'est passé est la séparation des charges égales et de signes opposés $-q'$ et $+q'$.

$|q| > |q'|$: cela veut dire que toutes les lignes de champ partant de la charge ponctuelle q n'atteignent pas le conducteur (D) , c'est ce qui caractérise l'influence partielle. Figure 2.5

➤ Influence totale (التأثير الكلي) :

Deux conducteurs C_1 et C_2 sont en influence totale si le corps influencé entoure complètement le corps influent. Figure 2.6

En supposant C_1 chargé positivement, cela implique que la surface interne S_2 du conducteur C_2 se charge négativement. Dans ce cas toutes les lignes de champ issues de C_1 rejoignent la surface S_2 du conducteur C_2 , donc $|Q_1| = |Q_2|$.

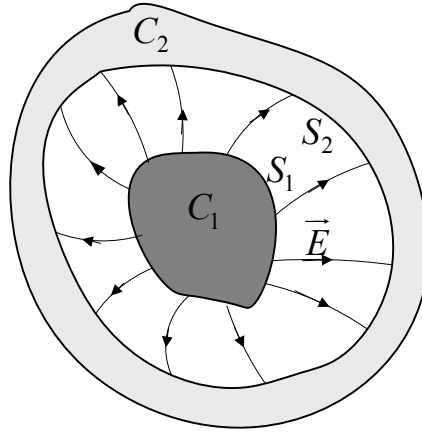


Fig 2.6 : Influence totale

8/ Théorème des éléments correspondants (نظرية العناصر المتناسبة) :

Soient les deux conducteurs voisins (A_1) et (A_2) en équilibre et portant les densités surfaciques σ_1 et σ_2 . Figure 2.7

Si les deux conducteurs ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient les conducteurs (A_1) et (A_2) .

Soit (C_1) un petit contour situé sur la surface de (A_1) , de telle façon que toutes les lignes de champ issues de (A_1) , et reposant sur (C_1) , arrivent à (A_2) et dessinent sur sa surface un contour fermé (C_2) . Figure 2.7

L'ensemble de ces lignes de champ constitue ce que l'on appelle **tube de flux** (أنبوب التدفق).

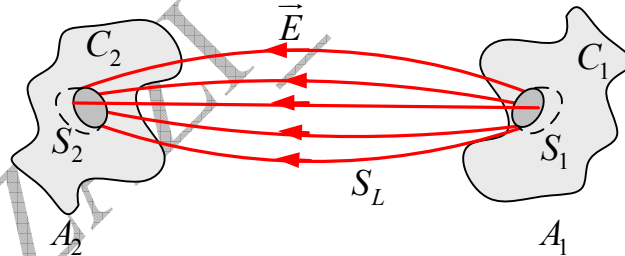


Fig 2.7 : Deux éléments correspondants

Le flux électrostatique, à travers la surface latérale S_L que dessine ce tube, est nul à cause de la perpendicularité du vecteur surface avec le vecteur champ.

Soit la surface constituée de S_L , S_1 et S_2 . En appliquant le théorème de Gauss, et puisque les deux conducteurs sont en état d'équilibre, on a :

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \underbrace{\Phi_{S_L}}_0 + \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0$$

Si Q_1 est la charge que porte S_1 , et Q_2 la charge que porte S_2 on aura :

$$\frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{Q_1 = -Q_2} \quad (2.3)$$

D'où le théorème :

- **Enoncé du théorème des éléments correspondants** : deux éléments correspondants portent deux charges égales mais de sens contraires.

9/ Capacités et coefficients d'influence (سعات و معاملات التأثير) :

Soient n conducteurs en équilibre et Q_i la charge totale. Figure 2.8

Premier cas : Le conducteur A_1 est au potentiel V_1 , le reste des conducteurs sont reliés à la terre (leurs potentiels sont donc nuls).

Le conducteur A_1 porte la charge : $q_{11} = C_{11} \cdot V_1$

Le conducteur A_1 influe sur le reste des conducteurs $A_n, \dots, A_3, A_2$ qui vont se charger par influence et porter les charges respectives :

$$q_{21} = C_{21} \cdot V_1$$

$$q_{31} = C_{31} \cdot V_1$$

.....

$$q_{j1} = C_{j1} \cdot V_1$$

.....

$$q_{n1} = C_{n1} \cdot V_1$$

La charge de tout les conducteurs réunis est égale à la charge du conducteur A_1 plus(+) les charges du reste des conducteurs qu'ils ont acquises par influence.

$$Q_1 = C_{11} \cdot V_1 + C_{21} \cdot V_1 + C_{31} \cdot V_1 + \dots + C_{j1} \cdot V_1 + \dots + C_{n1} \cdot V_1$$

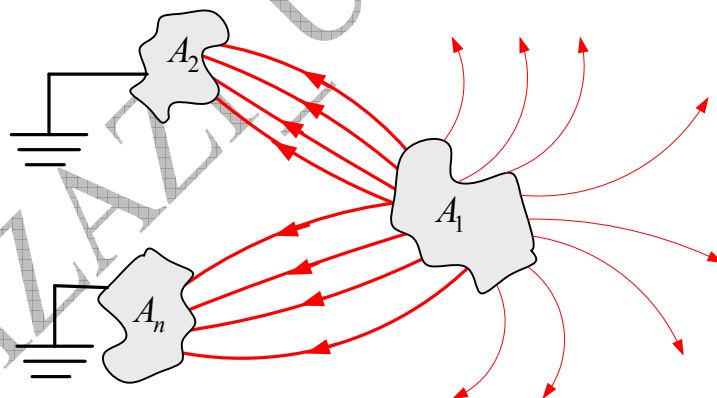


Fig 2.8 : Influence de plusieurs conducteurs par la charge A_1

Deuxième cas : Le même raisonnement pour le conducteur A_2 nous conduit aux équations :

$$q_{12} = C_{12} \cdot V_2 \quad q_{22} = C_{22} \cdot V_2 \quad q_{32} = C_{32} \cdot V_2 \quad \dots \quad q_{j2} = C_{j2} \cdot V_2$$

$$Q_2 = C_{12} \cdot V_2 + C_{22} \cdot V_2 + C_{32} \cdot V_2 + \dots + C_{j2} \cdot V_2 + \dots + C_{n2} \cdot V_2$$

En répétant cette opération pour chaque conducteur, nous pouvons calculer la charge de n'importe quel conducteur i quel qu'il soit :

$$Q_i = C_{1i} \cdot V_i + C_{2i} \cdot V_i + C_{3i} \cdot V_i + \dots + C_{ji} \cdot V_i + \dots + C_{ni} \cdot V_i$$

On peut écrire ces expressions sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1j} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & \dots & C_{2j} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nj} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix}$$

➤ **Définition :**

- Les termes C_{ij} sont appelés **coefficients d'influence**.

On lit : le coefficient d'influence de j sur le conducteur i .

- Les termes C_{ii} sont appelés **capacités d'influence**.

On lit : la capacité du conducteur i en présence d'un autre conducteur. A ne pas confondre avec la capacité d'un condensateur isolé C .

➤ **Propriétés des capacités et coefficients d'influence :**

- Les coefficients d'influence sont toujours négatifs $C_{ij} < 0$
- Les capacités d'influence sont toujours positives $C_{ii} > 0$
- $C_{ij} = C_{ji}$
- $C_{ii} \geq -\sum_{j \neq i} C_{ji}$

$$\text{Par exemple : } q_{11} = C_{11}V_1 \geq |q_{21}| + \dots + |q_{n1}| = \sum_{j \neq i} |C_{ji}| V_j$$

Dans le dernier cas, cela se traduit par le fait que la charge que porte (A_1) est plus grande (en valeur absolue) que la somme des charges que portent tous les autres conducteurs réunis qu'ils ont acquises sous l'influence du conducteur (A_1). La raison à cela est que les tubes de flux issus de (A_1) n'arrivent pas forcément aux autres conducteurs, ce qui ne peut se produire que si l'influence est totale, soit : $q_{11} = C_{ii} \cdot V_i = \sum_{j \neq i} |C_{ji}| V_j$

- Dans le cas de deux conducteurs en influence totale, on démontre que :

$$C_{11} = -C_{21} \text{ et } C_{11} = -C_{12}.$$

B/ LES CONDENSATEURS (المكثفات) :

1/ Capacité et charge d'un condensateur (سعة و شحنة مكثفة)

➤ **Définition :** un condensateur est l'ensemble de deux conducteurs A_1 et A_2 en influence électrostatique.

➤ Il y a types de condensateurs :

- A armatures rapprochées
- A influence totale

Les armatures sont séparées par un isolant qui a pour rôle d'augmenter la capacité du condensateur. Dans ce qui suit on suppose l'existence du vide entre les armatures.

Le condensateur est désigné par ce nom parce qu'il fait apparaître le phénomène de la condensation des charges électriques dans une région restreinte de l'espace. Plus la capacité est grande, plus on obtient de grandes charges électriques sous de basses tensions.

➤ **Constantes d'un condensateur** (ثوابت المكثفة) :

- **Capacité d'un condensateur** : La capacité d'un condensateur est le coefficient de capacité C_{11} de l'armature A_1 en présence de A_2 , $C = C_{11}$.
- **La charge d'un condensateur** : On considère que la charge du condensateur est la charge de l'armature interne $Q = Q_{\text{int}}$.
- **Relation fondamentale des condensateurs** :

$$\left. \begin{array}{l} Q = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ C_{11} = -C_{12} = -C_{21} \end{array} \right| \Rightarrow Q = C[V_1 - V_2] \Rightarrow \boxed{Q = CU} \quad (2.4)$$

L'armature A_2 porte la charge totale :

$$\left. \begin{array}{l} Q_2 = Q_{2,\text{ext}} + Q_{2,\text{int}} \\ Q_{2,\text{ext}} = -Q_1 \end{array} \right| \Rightarrow Q_2 = Q_{2,\text{ext}} - Q_1$$

Si A_2 est reliée à la terre, on a $Q_{2,\text{ext}} = 0$, donc :

$$Q_2 = -Q_1 \quad (2.5)$$

Dans le cas de l'influence partielle on obtient le même résultat. Dans ce type de condensateurs, les charges Q_1 et Q_2 correspondent aux charges réparties sur toute la surface de chacun des deux conducteurs : $Q_2 = -Q_1$.

2/ Capacités de quelques types de condensateurs :

Pour trouver la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et la tension U ($U = V_1 - V_2$), appliquée entre les deux armatures. Pour calculer U on utilise l'expression de la circulation du champ électrique.

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{C}$$

a/ Condensateur sphérique (المكثفة الكروية) :

Le condensateur sphérique est constitué de deux sphères concentriques et conductrices, séparées par un isolant. Figure 2.9

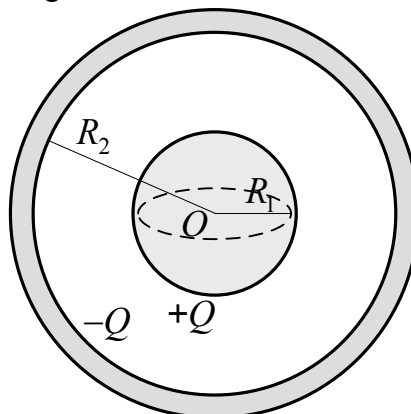


Fig 2.9 : Condensateur sphérique

On fait appel aux coordonnées sphériques qui conviennent le mieux à ce cas.

On part de la relation connue du vecteur champ électrique produit par une sphère :

$$\vec{E}(r) = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

On calcule la circulation du champ pour obtenir la différence de potentiel entre les deux armatures :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = KQ \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

A la fin on arrive à l'expression de la capacité du condensateur sphérique :

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (2.6)$$

b/ Condensateur cylindrique (المكثفة الأسطوانية) :

Le condensateur cylindrique est constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux, séparés par un isolant. Figure 2.10

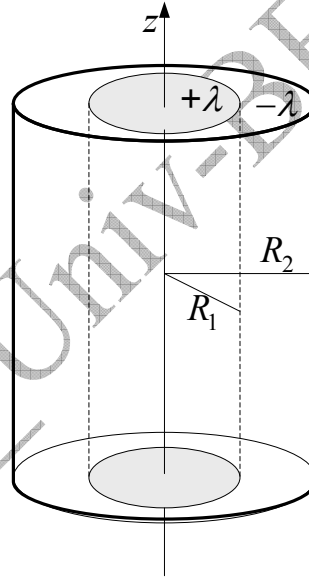


Fig 2.10 : Condensateur cylindrique

Pour ce cas, on adopte les coordonnées cylindriques et on suit le même raisonnement que précédemment : D'après le théorème de Gauss, $\vec{E}$ entre les armatures est :

$$\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot \rho} \vec{u}_\rho$$

λ : le densité linéique (ou linéaire)

La différence de potentiel est donc :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Sachant que $Q = \lambda h$, h étant la hauteur des cylindres, la capacité du condensateur cylindrique étudié est :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda \cdot h}{U} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot h}{\ln(R_2/R_1)}} \quad (2.7)$$

b/ Condensateur plan (المكثفة المستوية) :

Le condensateur plan est constitué de deux plans conducteurs séparés par un isolant. Figure 2.11

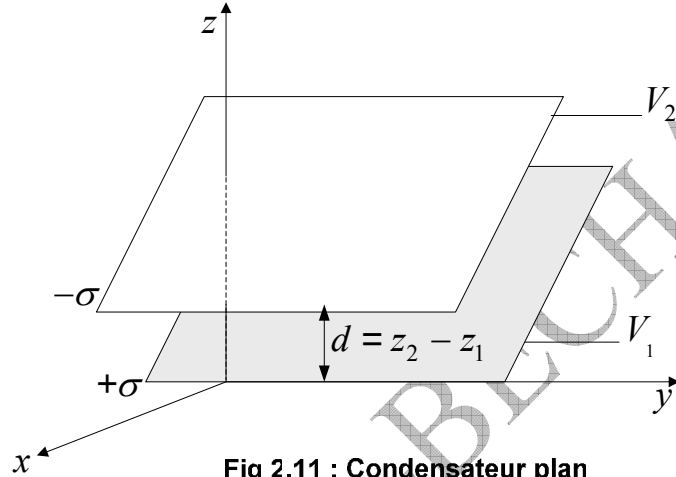


Fig 2.11 : Condensateur plan

Dans ce cas, on utilise les coordonnées cartésiennes. Le champ électrostatique entre les armatures est la composition des champs résultants des deux plans infinis, soit :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{k}) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{k}$$

$$U = V_1 - V_2 = \int_{z_1}^{z_2} \vec{E} \cdot d\vec{z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (z_2 - z_1) \Rightarrow U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

$$\sigma : \text{Densité surfacique} : \sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma \cdot S$$

La capacité du condensateur plan est donc :

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \boxed{C = \epsilon_0 \frac{S}{d}} \quad (2.8)$$

3/ Groupeement de condensateurs (جمع المكثفات):

➤ Groupeement en série (الربط على التسلسل) : Figure 2.12

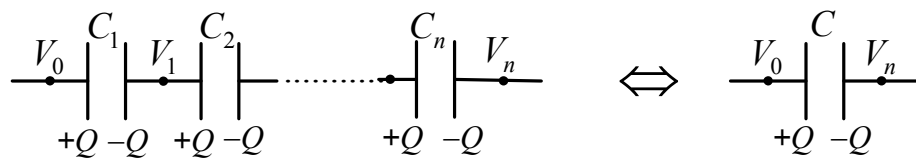


Fig 2.12 : Association de Condensateurs en série

Tous les condensateurs emmagasinent la même charge Q à cause du phénomène d'influence. La tension entre les extrémités de tout l'ensemble est égale à la somme des tensions :

$$U = V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots (V_{n-1} - V_n)$$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots \frac{Q}{C_n}$$

Résultats : L'inverse de la capacité équivalente est égal à la somme des inverses des capacités des condensateurs montés en série :

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (2.9)$$

➤ **Groupeement en parallèle** (الربط على التفرع) : Figure 2.13

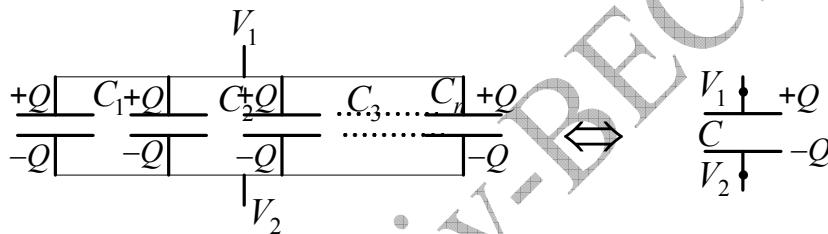


Fig 2.13 : Association de Condensateurs en parallèle

Tous les condensateurs sont soumis à la même tension U . L'expérience prouve que la charge Q_i de chaque condensateur est proportionnelle à sa capacité C_i . La charge totale est égale à la somme des charges :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots Q_n$$

$$Q = C_1.U + C_2.U + \dots C_n.U$$

$$Q = (C_1 + C_2 + \dots C_n).U$$

$$C.U = (C_1 + C_2 + \dots C_n).U$$

Résultats : La capacité équivalente est égale à la somme des capacités des condensateurs montés en parallèle :

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (2.10)$$

4/ **Energie d'un condensateur chargé** (طاقة مكثفة مشحونة):

L'étude théorique a démontré, comme le prouvent les expériences que l'énergie emmagasinée par un condensateur chargé est proportionnelle au carré de la tension appliquée entre ses armatures. Son expression est :

$$W = \frac{1}{2} C.U^2 \quad (2.11)$$

Sachant que $Q = C.U$, on peut aussi écrire :

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (2.12)$$

5/ Energie du champ électrique (طاقة الحقل الكهربائي):

La charge d'un conducteur électrique nécessite la dépense d'une énergie, la raison en est que pour ajouter une charge à un conducteur on doit fournir un travail pour vaincre la force de répulsion qui résulte des charges déjà présentes sur le conducteur. Ce travail entraîne une augmentation de l'énergie du conducteur.

Soit un conducteur au potentiel $V = \frac{q}{C}$, de capacité C et qui porte la charge q .

Si on ajoute à ce conducteur une charge élémentaire dq , en l'amenant de l'infini, le travail fourni serait :

$$dW = Vdq = \frac{q}{C} dq$$

L'augmentation totale de l'énergie du conducteur, quand la charge passe de zéro à la valeur Q , est égal à :

$$W_E = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq \Rightarrow \boxed{W_E = \frac{Q^2}{2C}}$$

Ce qui est compatible avec l'équation 2.12.

Dans le cas d'un conducteur sphérique, par exemple, où $C = 4\pi\epsilon_0 R$, l'énergie du champ électrique est :

$$W_E = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$$

6/ Densité de l'énergie électrique (كثافة الطاقة الكهربائية):

On considère à titre d'exemple un condensateur plan :

Sa capacité est : $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$

L'énergie qu'il emmagasine est : $W_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{d} U^2$

Si on divise cette énergie par le volume du condensateur, on obtient ce que l'on appelle densité de l'énergie électrique :

$$w = \frac{W_E}{v} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S U^2}{d S d} \Rightarrow w = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 U^2}{d^2} \rightarrow (1)$$

On sait que l'intensité du champ électrique entre les armatures est : $E = \frac{U}{d}$

Après substitution, l'équation (1) de la densité de l'énergie électrique s'écrit :

$$\boxed{w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2} \quad (2.13)$$

w représente la **densité de l'énergie électrique dans le vide**. Son unité est le joule par mètre cube (Jm^{-3}).

En présence d'un isolant, autre que le vide, on remplace ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$, où ε_r représente la permittivité relative de l'isolant, tandis que ε désigne la permittivité absolue. On peut donc écrire la densité de l'énergie sous la forme :

$$w = \frac{\varepsilon}{2} E^2 \quad (2.14)$$

7/ charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance

(شحن و تفريغ مكثفة عبر مقاومة):

➤ Charge d'un condensateur :

Soit le montage indiqué sur la figure 2.14, composé d'une résistance R montée en série avec un condensateur de capacité C . On alimente l'ensemble à l'aide d'une source de tension continue U_0 .

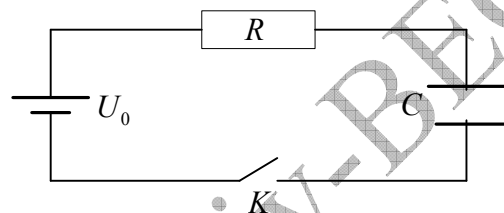


Fig 2.14 : Montage pour l'étude de la charge du condensateur

A l'instant $t = 0$, le condensateur est vide de charge, on ferme l'interrupteur K . Soit $i(t)$ l'intensité du courant électrique parcourant le circuit au temps t . Les électrons se déplacent dans le sens contraire du courant. Ces électrons quittent l'armature de haut, selon la figure 2.15, et arrivent à l'armature d'en bas qui se charge négativement. Soient $q(t)$ et $u(t)$ la charge de l'armature de haut et la tension électrique entre les armatures du condensateur (les grandeurs i , q et u sont positives par convention). Figure 2.15

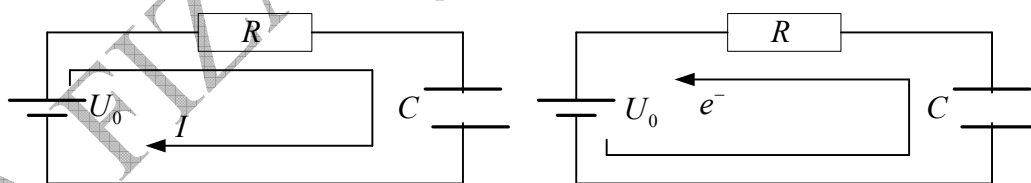


Fig 2.15 : Charge du condensateur

La loi d'Ohm nous permet d'écrire : $U_0 = Ri + U$

Sachant que $q = CU$ et $i = \frac{dq}{dt}$ (qui représente l'augmentation de la charge durant le temps dt).

On obtient l'équation différentielle de premier ordre :

$$U_0 = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \Rightarrow U_0 C = RC \frac{dq}{dt} + q$$

Ou :

$$U_0 C - q = RC \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{U_0 C - q} = \frac{dt}{RC}$$

On intègre les deux membres de l'équation pour arriver à :

$$\ln(U_0 C - q) = -\frac{t}{RC} + A$$

La constante d'intégration A est déterminée à partir de la condition initiale : au temps $t = 0$, la charge est $q = 0$, et par conséquent : $A = \ln U_0 C$

D'où :

$$\ln(U_0 C - q) - \ln U_0 C = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln \frac{U_0 C - q}{U_0 C} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{U_0 C - q}{U_0 C} = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Finalement, l'expression de la charge du condensateur est :

$$q(t) = U_0 C \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \quad (2.15)$$

- **Définition** : On appelle constante de temps la grandeur constante :

$$\tau = RC \quad (2.16)$$

- **Durée de la charge ou décharge** : Les expériences ont prouvé, comme le prévoyait la théorie, que la durée de la charge ou la décharge d'un condensateur est estimée à :

$$t = 5RC = 5\tau$$

Le graphe 2.16 représente la variation de la charge en fonction du temps au cours de la charge

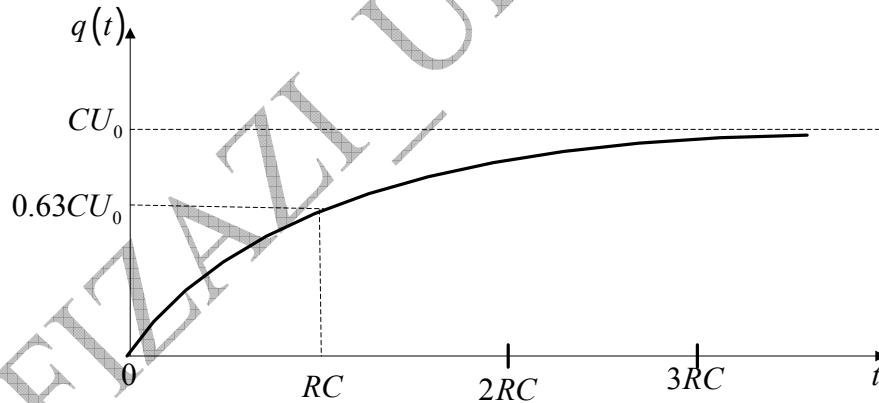


Fig 2.16 : Variation de la charge du condensateur au cours de la charge

On en déduit l'intensité du courant à chaque instant $i(t) = \frac{dq}{dt}$:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (2.17)$$

Le graphe 2.17 représente les variations de l'intensité du courant électrique en fonction du temps au cours de la charge.

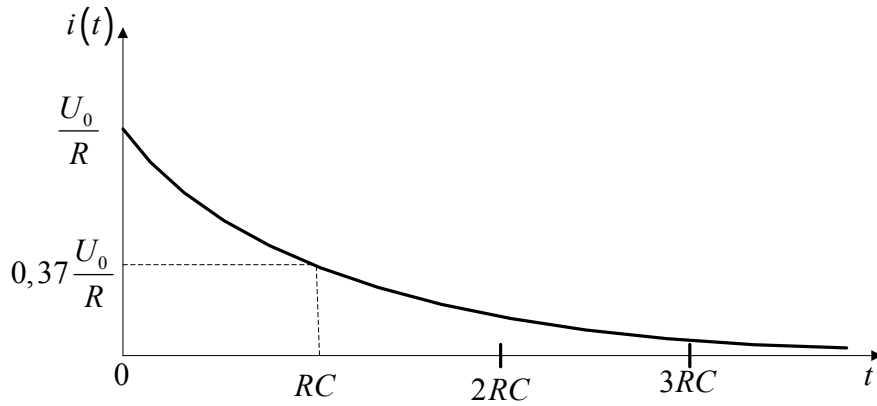


Fig 2.17 : Variation de l'intensité du courant au cours de la charge du condensateur

➤ Décharge d'un condensateur :

- Après que le condensateur ait atteint sa charge maximale $q_0 = CU_0$, on remplace à présent (à $t = 0$), la source de tension par un court circuit, comme il est indiqué sur la figure 2.18.

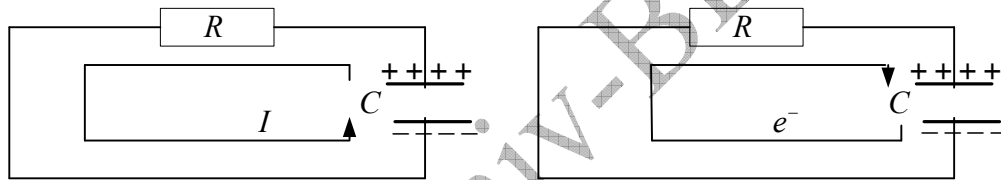


Fig 2.18 : Décharge du condensateur

Le courant a changé maintenant de sens : les électrons quittent l'armature d'en bas pour atteindre l'armature d'en haut. La charge $q(t)$ diminue au cours du temps.

En considérant toujours les grandeurs i , q et U positives par convention, on écrit la

loi d'Ohm : $Ri = U$, avec $q = CU$ et $i = \frac{dq}{dt}$.

Puisque q diminue, $\frac{dq}{dt} < 0$. Donc :

$$-R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \Rightarrow R \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{C}$$

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + B$$

La constante B est déterminée par la condition initiale :

$$t = 0, q = q_0 = CU_0; B = \ln q_0 \Rightarrow B = \ln CU_0$$

D'où :

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + \ln CU_0 \Rightarrow \ln \frac{q}{CU_0} = -\frac{t}{RC}$$

Donc les expressions de la charge et de l'intensité du courant instantanées sont respectivement :

$$q = CU_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (2.18)$$

$$i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow i = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (2.19)$$

Le graphe 2.19 représente la variation de la charge en fonction du temps au cours de la décharge :

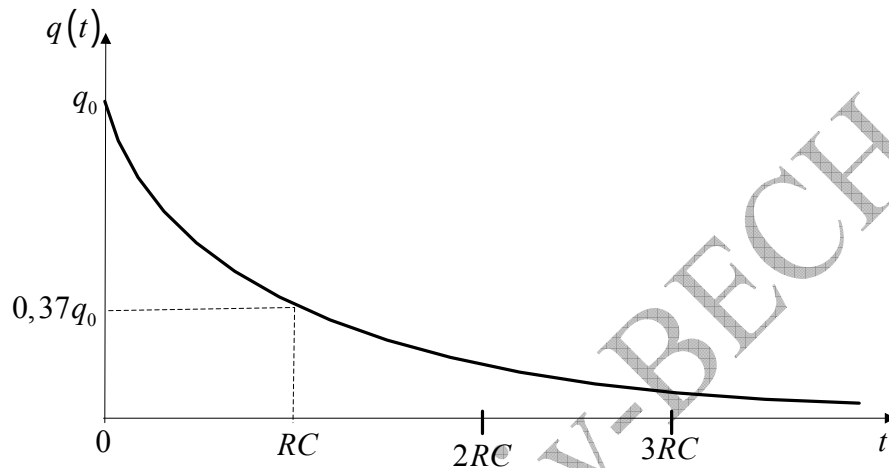


Fig 2.19 : Variation de la charge du condensateur au cours de sa décharge

Ainsi, nous terminons ce chapitre dans lequel nous avons pris connaissance des principales caractéristiques des conducteurs en équilibre, ce qui clôturera l'étude de l'électrostatique.

Dans le chapitre suivant nous allons aborder les charges en mouvement. Cette étude sera faite sous le grand titre : l'ELECTRODYNAMIQUE.

EXERCICES

**

تمارين

Exercice 2.1

Considérons une boule en métal de rayon R ayant une charge globale Q .

1/ A l'équilibre, comment se répartissent les charges dans le conducteur ?

2/ En déduire l'expression de la densité surfacique de charge σ (en Cm^{-2}).

3/ Que vaut le champ électrostatique dans le conducteur ?

4/ En appliquant le théorème de Coulomb, vérifier qu'à

la surface du conducteur : $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$

5/ En utilisant le théorème de Gauss, montrer que l'intensité du champ électrostatique créé à la distance $(r \geq R)r$ du centre du conducteur est :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

التمرين 1.2

نعتبر كرة معدنية نصف قطرها R و شحنتها الكلية Q .

1/ في حالة التوازن، كيف تتوزع الشحنات في الناقل؟

2/ إستنتج عبارة الكثافة السطحية للشحنة σ بـ (Cm^{-2}) .

3/ كم يساوي الحقل الكهربائي داخل الناقل؟

4/ بتطبيق نظرية كولومب، تحقق أن على سطح الناقل:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

5/ باستعمال نظرية غوص، بين أن شدة الحقل الكهربائي المتولد على البعد $r (r \geq R)$ من مركز

$$\text{الناقل هي: } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Exercice 2.2

Une sphère conductrice ayant un rayon $R = 8cm$ porte initialement une charge de $80\mu C$. Par la suite, une charge ponctuelle de $-20\mu C$ est introduite au centre d'une cavité sphérique ayant un rayon $r = 2,5cm$ à l'intérieur de la sphère.

1/ Quelle est la grandeur du champ électrique $\vec{E}$ près de la surface extérieure de la sphère conductrice ?

2/ Quelle est la grandeur du champ électrique $\vec{E}$ près de la surface intérieure de la sphère conductrice (dans la cavité) ?

3/ Quelle est la charge totale Q_i sur la surface intérieure de la cavité de la sphère conductrice ?

4/ Quelle est la charge totale sur la surface extérieure de la sphère conductrice ?

التمرين 2.2

كرة ناقلة ذات نصف قطر $R = 8cm$ تحمل في البداية شحنة $80\mu C$. ندخل في ما بعد، شحنة نقطية $-20\mu C$ في مركز تجويف كروي ذي نصف قطر $r = 2,5cm$ بداخل الكرة.

1/ ما هي شدة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ الناتج بقرب السطح الخارجي للكرة الناقلة؟

2/ ما هي شدة الحقل الكهربائي $\vec{E}'$ الناتج بقرب السطح الداخلي للكرة الناقلة (داخل التجويف)؟

3/ ما هي الشحنة الكلية Q_i على السطح الداخلي لتجويف الكرة الناقلة؟

4/ ما هي الشحنة الكلية Q_e على السطح الخارجي للكرة الناقلة؟

Exercice 2.3

Un cylindre creux et conducteur, de rayon $3cm$, porte initialement une densité linéaire de charge de $9\mu Cm^{-1}$. Par la suite, une tige mince ayant une densité linéaire de charge de $5\mu Cm^{-1}$ est entièrement glissée au centre du cylindre creux. La tige et le cylindre ont, tous les deux, une longueur infinie.

1/ Quelle est la grandeur du champ électrique près de la surface extérieure du cylindre avant que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ?

2/ Quelle est la densité linéaire de charge portée par la surface extérieure du cylindre creux après que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ?

التمرين 3.2

أسطوانة ناقلة و مجوفة، نصف قطرها $3cm$ ، تحمل في البداية كثافة خطية للشحنة مقدارها $9\mu Cm^{-1}$. في ما بعد، تزلق تماما إلى مركز الأسطوانة المجوفة، ساق رقيقة ذات كثافة خطية للشحنة مقدارها $5\mu Cm^{-1}$. كل من الأسطوانة و الساق لهما طول لا متناهي.

1/ ما هي شدة الحقل الكهربائي بقرب السطح الخارجي للأسطوانة قبل زلق الساق المشحونة داخل الأسطوانة؟

2/ ما هي الكثافة الخطية التي يحملها السطح الخارجي للأسطوانة المجوفة بعد زلق الساق المشحونة بداخلها؟

3/ Quelle est la grandeur du champ électrique près de la surface extérieure du cylindre après que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ?	3/ ما هي شدة الحقل الكهربائي بقرب السطح الخارجي للأسطوانة بعد زلق الساق المشحونة بداخلها؟
4/ Quelle est la grandeur du champ électrique à 2cm du centre du cylindre après que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ?	4/ ما هي شدة الحقل الكهربائي على بعد 2cm من مركز الأسطوانة بعد زلق الساق المشحونة بداخلها؟

Exercice 2.4

Une sphère de rayon R porte une charge Q .

1/ Calculer son énergie potentielle en fonction de la pression électrostatique.

2/ On décharge cette sphère en la reliant à la terre par l'intermédiaire d'un fil métallique. Que devient l'énergie emmagasinée précédemment ?

3/ On suppose que cette sphère a été chargée à l'aide d'une source de force électromotrice E constante. Quelle est l'énergie fournie par la source à la sphère ? La trouve-t-on sous forme d'énergie potentielle ? Sinon, où a disparu la différence ?

4/ soit σ la densité surfacique de charge de la sphère :

- calculer sa capacité en fonction de π, ϵ_0 et σ ,
- trouver une relation littérale entre l'énergie interne et la pression électrostatique.

التمرين 4.2

كرة نصف قطرها R و تحمل شحنة Q :

- أحسب طاقتها الكامنة بدلالة الضغط الكهروساكن.
- نفرغ هذه الكرة بتوصيلها بالأرض بواسطة سلك معدني. كيف تصبح الطاقة المخزنة سابقاً؟
- نفترض أنه تم شحن هذه الكرة بواسطة منبع قوته المحركة الكهربائية E ثابتة. ما هي الطاقة التي قدمها المنبع للكرة؟ هل نجدها كلية على شكل طاقة كامنة؟ إذا كان الجواب لا، أين اختفى الفرق؟
- إذا كانت σ هي الكثافة السطحية لشحنة الكرة:
 - إحسب سعة الكرة بدلالة π, ϵ_0 و σ ,
 - أوجد علاقة حرفية بين الطاقة الداخلية و الضغط الكهروساكن.

Exercice 2.5

Une sphère métallique de rayon $R_1 = 1\text{m}$ porte une charge électrique totale $Q = 10^{-9}\text{C}$. On la relie par un fil conducteur à une sphère initialement non chargée de rayon $R_2 = 0,30\text{m}$ (placée à grande distance de la première sphère) de telle sorte qu'elles se mettent au même potentiel.

1/ Quelle sera la charge à l'équilibre sur chacune des sphères après que la connexion sera faite ?

2/ Quelle est l'énergie de la sphère chargée avant la connexion ?

3/ Quelle est l'énergie du système après que les sphères soient reliées entre elles ? S'il y a une perte, expliquer où a été dissipée.

4/ Montrer que la charge est distribuée sur les deux sphères reliées entre elles de telle sorte que $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$ où σ est la densité superficielle de charge.

5/ Montrer en conséquence que $\frac{E_{1,surface}}{E_{2,surface}} = \frac{R_2}{R_1}$.

On négligera dans le problème l'effet du fil de jonction.

التمرين 5.2

كرة معدنية نصف قطرها $R_1 = 1\text{m}$ و تحمل شحنة كهربائية إجمالية $Q = 10^{-9}\text{C}$. نوصّلها بواسطة سلك توصيل إلى كرة نصف قطرها $R_2 = 0,30\text{m}$ و غير مشحونة في البداية (موضوعة على مسافة كبيرة من الكرة الأولى) بحيث تخضعان لنفس الكمون.

1/ في التوازن ما هي قيمة الشحنة على كل كرة بعد توصيلهما مع بعض؟

2/ ما هي طاقة الكرة المشحونة قبل التوصيل؟

3/ ما هي طاقة الجملة بعد ربط الكرتين معاً؟ إذا كان هناك ضياع لطاقة، اشرح أين ضاعت.

4/ بيّن أن الشحنة موزعة على الكرتين المربوطتين معا بحيث $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$ ، حيث σ هي الكثافة السطحية للشحنة.

5/ بين أنه بالتالي $\frac{E_{1,surface}}{E_{2,surface}} = \frac{R_2}{R_1}$.
نهمل في المسألة أثر سلك التوصيل.

Exercice 2.6

Une sphère conductrice S_1 de centre O et de rayon $R_1 = 10\text{cm}$ est placée dans une cavité sphérique creuse conductrice S_2 , de rayon $R_2 = 20\text{cm}$ et de mince épaisseur. L'ensemble baigne dans le vide. Les deux conducteurs sont initialement en équilibre. Quelle est la charge et comment se répartit-elle dans les deux cas :

1/ La sphère est portée au potentiel $V_1 = 10^4\text{V}$ tout en gardant la cavité creuse S_2 isolée comme indiqué sur la figure (a).

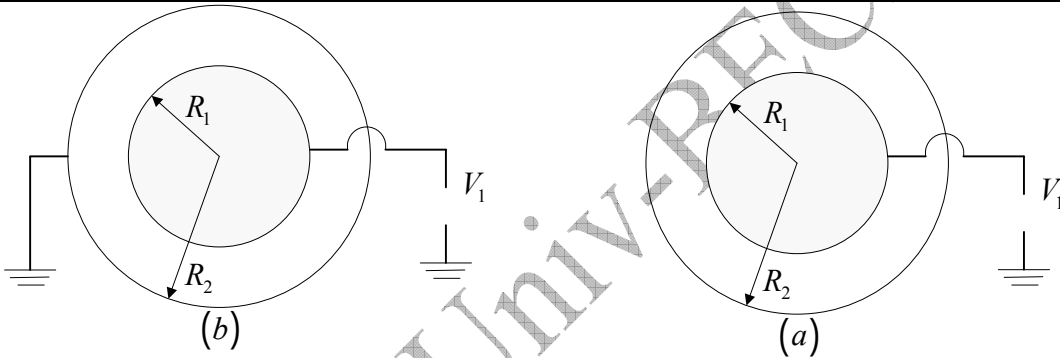
2/ La sphère est maintenue au potentiel V_1 tout en reliant la cavité creuse S_2 à la terre comme indiqué sur la figure (b).

التمرين 6.2

توضع كرة ناقلة S_1 مركزها O و نصف قطرها $R_1 = 10\text{cm}$ في مركز تجويف كروي ناقل S_2 ، نصف قطره $R_2 = 20\text{cm}$ و رقيق السمك. الجملة تسبح في الفراغ. الكرتان متعادلتان في البداية. ما هي قيمة الشحنات و طبيعة توزيعها في الحالتين:

1/ تحمل الكرة S_1 تحت الكمون $V_1 = 10^4\text{V}$ مع بقاء التجويف S_2 معزولا كما هو مبين على الشكل (a).

2/ نبقى الكرة تحت الكمون V_1 مع توصيل التجويف S_2 بالأرض كما هو مبين على الشكل (b).

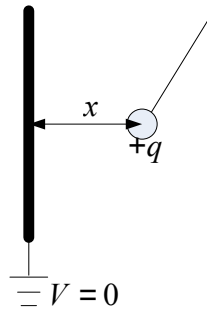
**Exercice 2.7**

Un plateau circulaire vertical métallique de très grande dimension est relié à la terre (potentiel $V = 0$). On place à une distance x une petite sphère métallique de rayon r et de charge q suspendue à un fil. La sphère prend une position d'équilibre x_e .

Trouver la force qui s'exerce sur la petite sphère assimilée à une charge ponctuelle en utilisant la notion d'image électrique..

التمرين 7.2

طبق دائري شاقولي معدني ذي أبعاد كبيرة جدا و موصول بالأرض (الكمون معدوم $V = 0$). نضع على البعد x منه كرية معدنية نصف قطرها r و شحنتها q معلقة بواسطة خيط. تأخذ الكرية موضع توازن x_e . أوجد القوة المطبقة على الكرية المشبهة بشحنة نقطية باستعمال مفهوم الصورة الكهربائية.



Exercice 2.8

Une charge q est placée à une distance a d'un plan conducteur infini maintenu au potentiel zéro. On peut montrer que le champ résultant à la surface est le même que si une charge négative $-q$ placée à une distance $-a$ remplaçait le plan. (Figure ci-dessous).

Cette seconde charge est appelée *image* de la première.

1/ Montrer que le potentiel est nul en tout point du plan et que le champ est normal au plan et calculer son intensité..

2/ Montrer que la densité de charge sur le plan est $qa/2\pi r^3$.

3/ Calculer le flux électrique à travers le plan en utilisant la notion de l'angle solide, et vérifier que la charge totale du plan est $-q$.

التمرين 8.2

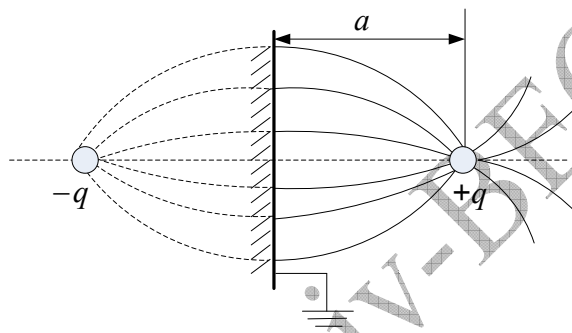
توضع شحنة q على بعد a من مستوى ناقل لا متناهي مثبت في كمون معدوم. يمكن البرهان على أن الحقل الناتج على السطح هو نفسه لو توضع شحنة سالبة $-q$ على البعد $-a$ مكان المستوى. (الشكل أسفله).

الشحنة الثانية هذه تسمى صورة الأولى.

1/ بين أن الكمون معدوم في كل نقطة من المستوى و أن الحقل عمودي على المستوى و أحسب شدته.

2/ بين أن كثافة الشحنة على المستوى هي $qa/2\pi r^3$.

3/ أحسب التدفق الكهربائي عبر المستوى باستعمال مفهوم الزاوية الصلبة و تأكد أن الشحنة الكلية للمستوى هي $-q$.

**Exercice 2.9**

Trouver le flux du champ électrique, la charge intérieure totale et la densité de charge pour un cube de côté a (figure ci-dessous) placé dans une région où le champ électrique est de la forme :

1/ $\vec{E} = Cx\vec{u}_x$

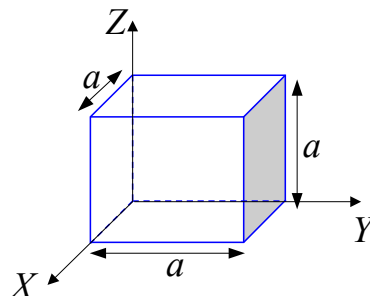
2/ $\vec{E} = C(y\vec{u}_x + x\vec{u}_y)$, $C = \text{constante}$

التمرين 9.2

أوجد تدفق الحقل الكهربائي، الشحنة الداخلية الكلية و كثافة الشحنة لمكعب ضلعه a (الشكل أسفله) و الموضوع في منطقة حيث الحقل الكهربائي هو من الشكل:

1/ $\vec{E} = Cx\vec{u}_x$

2/ $\vec{E} = C(y\vec{u}_x + x\vec{u}_y)$, $C = \text{ثابت}$

**Exercice 2.10**

1/ Trouver les capacités et les coefficients d'influence de l'ensemble de deux conducteurs sphériques $S_1(O_1, R_1)$ et $S_2(O_2, R_2)$ éloignés l'un de l'autre par la distance d ($d \gg R_1, R_2$).

2/ discuter les deux cas :

التمرين 10.2

1/ أوجد السعات و عوامل التأثير لجملة ناقلين كرويين متباعدين $S_1(O_1, R_1)$ و $S_2(O_2, R_2)$ تفصلهما المسافة d ($d \gg R_1, R_2$).

2/ ناقش الحالتين:

a) si $d \rightarrow \infty$, b) si $d = R_1 = R_2$.	أ) لو كانت $d \rightarrow \infty$ ب) لو كانت $d = R_1 = R_2$
---	---

Exercice 2.11

Un condensateur de capacité $C = 100\mu F$ est chargé sous une tension $U = 20V$.

On le relie à un condensateur de même capacité C , mais initialement déchargé.

1/ Calculer la tension qui apparaît aux bornes de l'ensemble.

2/ Faire le bilan énergétique avant et après connexion. Commenter ?

التمرين 11.2

تشحن مكثفة ذات سعة $C = 100\mu F$ تحت توتر $U = 20V$.

نربط هذه المكثفة إلى مكثفة أخرى لها نفس السعة C و لكنها غير مشحونة في البداية.

1/ أحسب التوتر الذي يظهر بين طرفي الجملة.
2/ قم بالحوصلة الطاقوية قبل و بعد الربط. ما هو تعليقك؟

Exercice 2.12

Un condensateur de capacité $C_1 = 3,3\mu F$ a été chargé sous une tension de $24V$; l'armature A porte une charge positive Q_A .

1/ Calculer l'énergie emmagasinée dans ce condensateur.

2/ Les bornes A et B sont reliées aux bornes E et D d'un condensateur complètement déchargé, de capacité $C_2 = 2,2\mu F$ (voir figure ci-dessous). Il apparaît un courant transitoire très bref, puis un équilibre électrique s'établit. La tension U_{AB} est alors égale à la tension U_{ED} ; l'armature A porte une charge Q'_A et l'armature E la charge Q'_E .

a) Ecrire une relation entre Q_A , Q'_A et Q'_E .

b) Ecrire une seconde relation entre Q'_A , Q'_E , C_1 et C_2 .

c) En déduire numériquement Q'_A et Q'_E .

3/ Après la connexion, calculer l'énergie emmagasinée dans les deux condensateurs. Au cours de cette opération, l'énergie a-t-elle été conservée ? Sous quelle forme une partie de l'énergie électrique s'est-elle transformée dans les fils de jonction ? et en quelle quantité ?

التمرين 12.2

شحنت مكثفة سعتها $C_1 = 3,3\mu F$ تحت توتر $24V$ ؛ اللبوس A يحمل الشحنة الموجبة Q_A .

1/ أحسب الشحنة المخزنة في المكثفة.
2/ الطرفان A و B موصلان بالطرفين E و D

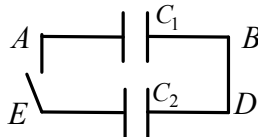
لمكثفة فارغة تماما، سعتها $C_2 = 2,2\mu F$ (أنظر الشكل أسفله). يظهر تيار مؤقت و جد سريع، ثم يسود توازن كهربائي مستقر. التوتر U_{AB} يساوي حينها التوتر U_{ED} ؛ اللبوس A يحمل الشحنة Q'_A و اللبوس E يحمل الشحنة Q'_E .

ب) أكتب علاقة بين Q_A ، Q'_A و Q'_E .

ت) أكتب علاقة ثانية بين Q'_A ، Q'_E ، C_1 و C_2 .

ج) إستنتج عدديا Q'_A و Q'_E .

3/ بعد التوصيل، أحسب الطاقة المخزنة في المكثفتين. خلال هذه العملية، هل الطاقة حفظت؟ إلى أي شكل تحول جزء من الطاقة الكهربائية في أسلاك التوصيل؟ و بأي كم؟

**Exercice 2.13**

On considère un condensateur plan formé de deux armatures conductrices identiques parallèles, espacées d'une distance d . Chaque armature est une plaque rectangulaire de surface S . On suppose que les deux

التمرين 13.2

نعتبر مكثفة مستوية مكونة من لبوسين ناقلين متماثلين متوازيين و متباعدين بمسافة d . كل لبوس عبارة عن صفيحة مستطيلة ذات سطح S . نفترض أن اللبوسين في

armatures sont en influence totale et on néglige les effets de bord.

1/ Dans ce cas précis, que signifie l'expression "armatures en influence totale" ? Que peut-on dire de la répartition de la charge dans chaque armature ? Soit σ la densité de charge sur la surface plane d'équation $y = 0$; quelle est la densité de charge sur la surface plane d'équation $y = d$?

2/ Calculer l'expression du champ électrique au voisinage de chacune des armatures.

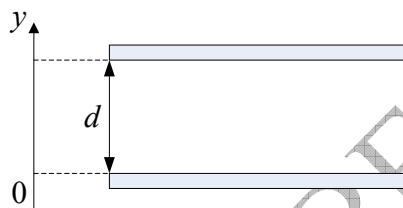
3/ Montrer que le champ électrique est uniforme entre les armatures et relier cette valeur à la différence de potentiel $V(0) - V(d)$ entre les armatures. En déduire l'expression de la capacité C du condensateur.

تأثير كلي و نهمل آثار الطرف.

1/ في هذه الحالة بالضبط، ماذا تعني عبارة "لبوسان في تأثير كلي"؟ ماذا يمكن قوله عن توزيع الشحنة على كل لبوس؟ لنكن σ كثافة الشحنة على السطح المستوي ذي المعادلة $y = 0$ ؛ ما هي كثافة الشحنة على السطح المستوي ذي المعادلة $y = d$ ؟

2/ أحسب عبارة الحقل الكهربائي بجوار كل لبوس.

3/ بين أن الحقل الكهربائي منتظم بين اللبوسين، إربط هذه القيمة بفرق الكمون بين اللبوسين $V(0) - V(d)$. إستنتج عبارة السعة C للمكثفة.



Exercice 2.14

Un générateur de tension continue et trois condensateurs sont assemblés comme indiqué sur la figure ci-dessous :

$$U = 3V, \quad C_1 = 30\mu F$$

$$C_2 = 10\mu F, \quad C_3 = 5\mu F$$

Quelles sont les charges Q_1, Q_2, Q_3 que portent les trois condensateurs ?

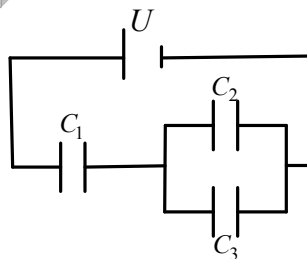
التمرين 14.2

يجمع مولد لتوتر مستمر و ثلاث مكثفات كما هو مبين على الشكل أسفله:

$$U = 3V, \quad C_1 = 30\mu F$$

$$C_2 = 10\mu F, \quad C_3 = 5\mu F$$

ما هي الشحنات Q_1, Q_2, Q_3 التي تحملها المكثفات الثلاثة؟



Exercice 2.15

Un condensateur sphérique est constitué :

- D'une sphère interne conductrice pleine portant la charge Q ,
- D'une couronne sphérique conductrice de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e , (figure ci-dessous),

1. En appliquant le théorème de Gauss à une surface fermée sphérique de rayon compris entre R_i et R_e , calculer la charge portée par la paroi interne de la couronne conductrice.

2. Calculer le champ entre les deux armatures.

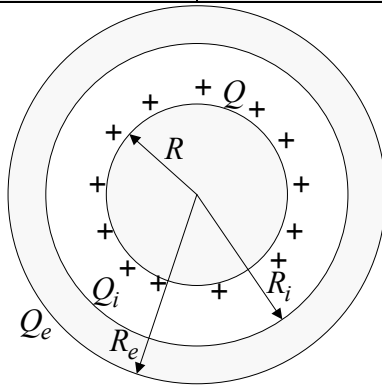
التمرين 15.2

تتكون أسطوانة كروية من:

- كرة داخلية مصمتة تحمل الشحنة Q ,
- إكليل كروي ناقل نصف قطره الداخلي R_i و نصف قطر خارجي R_e , (الشكل في الأسفل)،

1/ بتطبيق نظرية غوص على سطح كروي مغلق نصف قطره محصور بين R_i و R_e , أحسب الشحنة التي يحملها الجدار الداخلي للإكليل الناقل.

2/ أحسب الحقل بين اللبوسين.

3. Que devient ce champ si on place entre les deux armatures du condensateur un matériau de permittivité relative ε ? 4. En déduire le potentiel entre les deux armatures. 5. Calculer la capacité de ce condensateur. 6. Retrouver l'expression de la capacité d'un condensateur plan en considérant R_i très voisin de R : $R_i = R + d$.	3/ كيف يصبح هذا الحقل لو وضعنا بين لبوسي المكثفة مادة سماحيته النسبية ε ؟ 4/ إستنتج الكمون بين اللبوسين. 5/ أحسب سعة المكثفة. 6/ أوجد من جديد عبارة سعة مكثفة مستوية باعتبار R_i قريب جدا من R : $R_i = R + d$.
	

Exercice 2.16

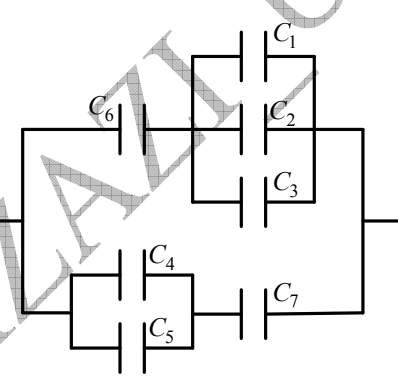
1/Déterminer la capacité de l'ensemble des condensateurs représenté sur la figure ci-dessous.

2/ Si la tension appliquée est de $120V$, trouver la charge et la différence de potentiel pour chaque condensateur ainsi que l'énergie de l'ensemble.

التمرين 16.2

1/ عين سعة مجموع المكثفات الممثلة على الشكل أسفله.

2/ إذا كان التوتر المطبق هو $120V$ ، أحسب الشحنة و فرق الكمون بين طرفي كل مكثفة و كذا الطاقة المخزنة من قبل كل المجموعة.

	$C_1 = 1\mu F$, $C_2 = 2\mu F$ $C_3 = 3\mu F$, $C_4 = 4\mu F$ $C_5 = 5\mu F$, $C_6 = 12\mu F$ $C_7 = 18\mu F$
---	---

Exercice 2.17

La capacité d'un condensateur variable d'un récepteur radio peut varier de 50 pF à 950 pF par rotation d'un bouton de 0° à 180° . Le cadran marquant 180° , le condensateur est relié à une batterie de 400 V . Après qu'il a été chargé, le condensateur est déconnecté de la batterie et le bouton ramené à 0° .

- 1/ Quelle est la charge du condensateur ?
- 2/ Quelle est la différence de potentiel entre les armatures quand le cadran marque 0° ?
- 3/ Quelle est l'énergie du condensateur dans cette position ?
- 4/ En négligeant tout frottement, calculer le travail nécessaire pour tourner le bouton.

التمرين 17.2

يمكن لسعة مكثفة متغيرة لجهاز استقبال راديو أن تتغير من 50 pF إلى 950 pF بتدوير زر من 0° إلى 180° . حين يسجل المبدأ 180° ، تكون المكثفة مربوطة إلى بطارية ذي 400 V . بعد شحنها، نقطع التوصيل بين المكثفة و البطارية و نضبط الزر في الوضع 0° .

- 1/ ما هي شحنة المكثفة؟
- 2/ ما هو فرق الكمون بين اللبوسين حين يشير المبدأ إلى 0° .
- 3/ ما هي طاقة المكثفة في هذا الوضع؟
- 4/ بإهمال كل احتكاك، أحسب العمل اللازم لتدوير الزر.

Exercice 2.18

On monte deux résistances : $R_1 = 8,8\Omega$ et $R_2 = 4,4\Omega$ et deux condensateurs : $C_1 = 0,48\mu\text{F}$ et $C_2 = 0,24\mu\text{F}$ non chargés de la manière illustrée dans la figure ci-dessous.

Sachant qu'il y a une différence de potentiel de 24 V aux bornes de ce réseau, déterminer :

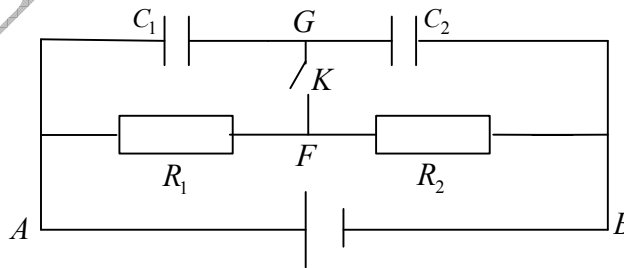
- 1/ le potentiel au point F lorsque l'interrupteur K est ouvert depuis un temps assez long (poser $V = 0$ à la borne négative de la source),
- 2/ le potentiel au point G lorsque l'interrupteur est ouvert,
- 3/ le potentiel final au même point G lorsque l'interrupteur K est fermé depuis un temps assez long,
- 4/ la quantité de charge qui a traversé l'interrupteur K fermé.

التمرين 18.2

نركب مقاومتين : $R_1 = 8,8\Omega$ و $R_2 = 4,4\Omega$ ، و مكثفتين : $C_1 = 0,48\mu\text{F}$ و $C_2 = 0,24\mu\text{F}$ كما هو مبين على الشكل أسفله.

إذا علمت أن فرقاً في الكمون مقداره 24 V يسود بين طرفي هذا التركيب، عيّن :

- 1/ الكمون في النقطة F حين تكون القاطعة مفتوحة منذ زمن طويل (ضع $V = 0$ في الطرف السالب للمنبع)،
- 2/ الكمون في النقطة G حين تكون القاطعة مفتوحة،
- 3/ الكمون في النقطة G حين تكون القاطعة مغلقة منذ زمن طويل،
- 4/ كمية الشحنة التي عبرت القاطعة K المغلقة.

**Exercice 2.19**

1/ Calculez la quantité d'énergie emmagasinée dans un condensateur constitué de deux plaques carrées de 9 cm de côté, séparées par un espace d'air de 2 mm , lorsque ses armatures portent une charge de $\pm 300\mu\text{C}$.

2/ Que devient cette énergie si on introduit une plaque en mica (de permittivité relative $\kappa = 7$) de

التمرين 19.2

1/ أحسب كمية الطاقة المخزنة في مكثفة مكونة من صفيحتين مربعيتين ضلع كل واحدة 9 cm ، يفصل بينهما حيز من الهواء سمكه 2 mm ، حينما يحمل لبوسها شحنة $\pm 300\mu\text{C}$.

2/ كيف تصبح هذه الطاقة لو أدخلنا صفيحة من الميكا

$2mm$ d'épaisseur qui remplit donc tout l'espace entre les armatures ? c) Même question que 2/ pour le cas où la plaque de mica ne fait que $1mm$ d'épaisseur.	(نفاذيته النسبية $\kappa = 7$) و سمكه $2mm$ و الذي يملأ إذن كل الفراغ بين اللبوسين؟ 3/ نفس سؤال 2/ في حالة ما إذا كان سمك صفيحة الميكا لا يساوي إلا $1mm$.
--	---

Exercice 2.20

On considère le montage comme indiqué sur la figure ci-dessous. Tous les interrupteurs sont ouverts et les condensateurs déchargés.

I. On ferme l'interrupteur K_1 :

- 1/ Quelle est la charge finale portée par chaque condensateur ?
- 2/ Quelle est la différence de potentiel finale entre les armatures de chaque condensateur ?

II On laisse l'interrupteur K_1 fermé, puis on ferme les interrupteurs K_2 et K_3 :

- 1/ Quelle est la charge finale portée par chaque condensateur ?
- 2/ Quelle est la différence de potentiel finale entre les armatures de chaque condensateur ?

III. On ouvre les interrupteurs K_2 et K_3 puis on ferme les interrupteurs K_1 et K_4 , quelle est la charge finale portée par chaque condensateur ?

VI. On laisse les interrupteurs K_1 et K_4 fermés, puis on ferme aussi les interrupteurs K_2 et K_3 :

- 1/ Quelle est la différence de potentiel finale entre les armatures de chacun des deux condensateurs C_1 et C_2 ?
- 2/ Quelles sont les charges finales des deux condensateurs C_1 et C_2 ?

Application numérique :

$$R_1 = R_2 = 100\Omega, E = 6V$$

$$C_2 = 2\mu F, C_1 = 1\mu F$$

التمرين 20.2

نعتبر الدارة المبينة على الشكل أسفله. كل القواطع مفتوحة و المكثفات غير مشحونة.

I. نغلق القاطعة K_1 :

- 1/ كم هي الشحنة النهائية التي تحملها كل مكثفة؟
- 2/ كم هو فرق الكمون النهائي بين لبوسي كل مكثفة؟

II. نترك القاطعة K_1 مغلقة، ثم نغلق القاطعتين K_2 و K_3 :

- 1/ كم هي الشحنة النهائية التي تحملها كل مكثفة؟
- 2/ كم هو فرق الكمون النهائي بين لبوسي كل مكثفة؟

III. نفتح القاطعتين K_1 و K_3 و نغلق القاطعتين K_2 و K_4 :

كم هي الشحنة النهائية التي تحملها كل مكثفة؟

IV. نترك K_2 و K_4 مغلقتين، ثم نغلق K_1 و K_3 أيضا:

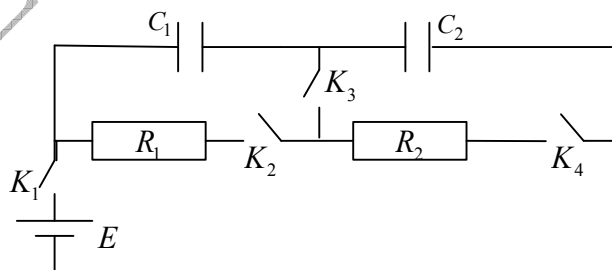
1/ كم هو فرق الكمون بين لبوسي كل من المكثفتين C_1 و C_2 ؟

2/ كم هما الشحنتان النهائيتان للمكثفتين C_1 و C_2 ؟

تطبيق عددي:

$$R_1 = R_2 = 100\Omega, E = 6V$$

$$C_2 = 2\mu F, C_1 = 1\mu F$$

**Exercice 2.21**

Quatre condensateurs sont groupés comme indiqué sur la figure ci-dessous. On applique une différence de potentiel U entre les points A et B et l'on branche un électromètre E entre les points F et G pour déterminer leur différence de potentiel. Montrer que

التمرين 21.2

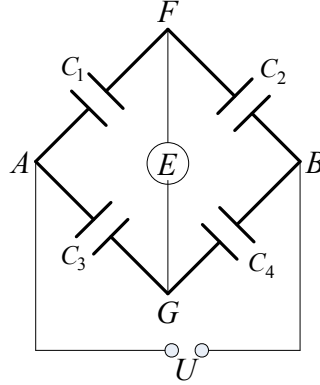
ترتبط أربع مكثفات كما هو مبين على الشكل في الأسفل. نطبق فرقا في الكمون U بين النقطتين A و B ، كما نربط إلكترومترا E بين النقطتين F و G من أجل تحديد التوتر بينهما. بين أن الإلكترونتر يشير

l'électromètre indique zéro si $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$.

Ce dispositif représente un pont utilisable pour la mesure de la capacité d'un condensateur en fonction d'un condensateur étalon et du rapport de deux capacités.

إلى الصفر إذا كانت $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$.

هذا التركيب يمثل جسرا يستعمل لحساب سعة مكثفة بدلالة مكثفة معيارية و نسبة سعتين.



Exercice 2.22

Soit le montage de condensateurs comme indiqué sur la figure ci-dessous.

1/ Redessiner le schéma de ce montage en faisant apparaître la symétrie par rapport à la branche ED .

2/ Si $U = 100V$ et $U_{CD} = 0$, calculer la capacité du condensateur équivalent, la charge de chaque condensateur ainsi que la différence de potentiel entre les armatures de chaque condensateur.

On donne $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1\mu F$

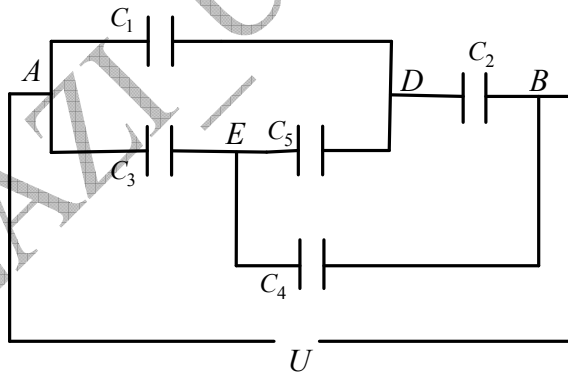
التمرين 22.2

ليكن تركيب المكثفات كما هو مبين على الشكل أسفله.

1/ أعد رسم هذا التركيب بحيث تظهر التناظر حول الفرع ED .

2/ إذا كان $U = 100V$ و $U_{CD} = 0$ ، أحسب سعة المكثفة المكافئة، شحنة كل مكثفة و كذا فرق الكمون بين لبوسي كل مكثفة.

تعطى: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1\mu F$



Exercice 2.23

Un condensateur de capacité C , initialement chargé sous une tension U_0 est rapidement connecté à un autre condensateur de capacité C' , initialement déchargé, par l'intermédiaire d'un circuit électrique de résistance R .

La décharge de C et la charge de C' , en série, se fait avec la constante de temps $\tau = RC_{eq} = R \frac{CC'}{C+C'}$.

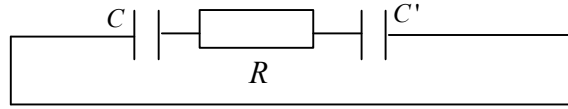
On demande d'établir le bilan des énergies libres du système, de calculer l'énergie perdue et de comparer cette énergie à celle consommée par effet Joule dans R .

التمرين 23.2

مكثفة سعتها C ، مشحونة في البداية تحت توتر U_0 توصل بسرعة بمكثفة أخرى سعتها C' ، فارغة في البداية، بواسطة دائرة كهربائية ذات مقاومة R .

تفريغ C و شحن C' ، على التسلسل، تتم بثابت الزمن $\tau = RC_{eq} = R \frac{CC'}{C+C'}$.

المطلوب هو وضع حوصلة للطاقات الحرة للجملة، حساب الطاقة الضائعة و مقارنة هذه الطاقة بتلك المستهلكة بفعل جول في R .

**Exercice 2.24**

On étudie la décharge d'un condensateur, en envisageant le circuit de la figure ci-dessous, constitué d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C chargé.

1/ Quel est le signe de i ? Établir la relation liant l'intensité i du courant à la tension u_C .

2/ Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de u_C .

3/ Une solution de l'équation différentielle peut s'écrire $u_C = A \exp(-at)$ où A et a sont deux constantes positives non nulles.

- En utilisant l'équation différentielle, déterminer A et a .
- Donner l'expression littérale de la constante de temps τ .
- Montrer par analyse dimensionnelle que τ a la même unité qu'une durée.
- Sachant que $R = 33\Omega$, et $\tau = 0,07s$, en déduire la valeur de la capacité C du condensateur.

4/ En utilisant les résultats précédents :

- montrer que $i = -\frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$.
- Déterminer la valeur I_0 de i à $t = 0$.
- Calculer la valeur de i pour $t = 0,5s$.
- Déterminer la valeur de u_C à la même date.
- Le condensateur est-il déchargé ? Justifier la réponse.

5/ On remplace ce condensateur par un autre condensateur de capacité C' supérieure à C . Ce condensateur est chargé sous la même tension U_0 . L'énergie emmagasinée dans ce condensateur est-elle supérieure à la précédente ?

التمرين 24.2

ندرس تفريغ مكثفة، باعتبار الدارة المبينة على الشكل أسفله، و المتكونة من ناقل أومي مقاومته R و مكثفة مشحونة سعتها C .

1/ ما هي إشارة i ؟ ضع العلاقة التي تربط الشدة i للتيار بالتوتر u_C .

2/ ضع المعادلة التفاضلية المسيرة لتطور u_C .

3/ إحدى حلول المعادلة التفاضلية يمكن أن تكتب $u_C = A \exp(-at)$ حيث A و a ثابتين موجبين و غير معدومين.

(أ) باستعمال المعادلة التفاضلية، حدد A و a .

(ب) إعط العبارة الحرفية لثابت الزمن τ .

(ج) بين التحليل البعدي أن τ لها نفس وحدة مدة زمنية.

(د) علما أن $R = 33\Omega$ ، و $\tau = 0,07s$ ، استنتج قيمة السعة C للمكثفة.

4/ باستعمال النتائج السابقة:

(أ) بين أن $i = -\frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$.

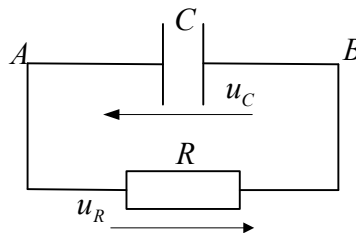
(ب) حدد القيمة I_0 لـ i في $t = 0$.

(ج) أحسب قيمة i من أجل $t = 0,5s$.

(د) أحسب قيمة u_C في نفس اللحظة.

(هـ) هل المكثفة أفرغت؟ برر إجابتك.

5/ نستبدل هذه المكثفة بمكثفة أخرى سعتها C' أكبر من C . هذه المكثفة مشحونة تحت توتر U_0 . هل الطاقة المخزنة في هذا المكثفة أكبر من السابقة؟



Exercice 2.25

On étudie le champ électrostatique et le potentiel créés par deux conducteurs sphériques concentriques chargés, en équilibre électrostatique.

Le conducteur central (C) est une boule de centre O et de rayon R ; il porte une charge négative $-Q$.

Le conducteur externe (C') est une boule creuse, de centre O et porte une charge positive égale à $2Q$; le rayon de sa surface interne est égal à $2R$, celui de sa surface externe est égal à $3R$.

Il n'y a pas d'autres charges, ni à l'intérieur de l'espace vide entre les deux conducteurs, ni à l'extérieur des deux conducteurs. Chacun des deux conducteurs est isolé. Le potentiel est nul à l'infini.

On note $\vec{E}(M)$ le champ électrostatique et $V(M)$ le potentiel en un point M quelconque de l'espace, repéré par ses coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi)$, où $\vec{OM} = r\vec{u}$.

1/ Pourquoi peut-on affirmer que la densité volumique de charge est nulle dans les conducteurs ? Où trouve-t-on les charges ?

2/ Pourquoi peut-on écrire $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}$ et $V(M) = V(r)$?

3/ Démontrer que la charge $2Q$ du conducteur externe (C') se répartit également sur ses deux surfaces.

4/ Calculer $E(r)$ et tracer le graphe correspondant. Cette fonction est-elle continue ? Commenter.

5/ Calculer $\text{div} \vec{E}(M) = \frac{1}{r^2} \frac{d^2(r^2 E(r))}{dr}$ dans les différentes régions de l'espace. Pouvaient-on prévoir ces résultats ?

6/ Déterminer le potentiel $V(r)$ et tracer le graphe correspondant.

7/ En déduire le potentiel de chacun des deux conducteurs et la capacité du condensateur sphérique formé du conducteur (C) et de la surface interne du conducteur (C').

8/ Faire une figure donnant l'allure de quelques lignes de champ (à l'intérieur du condensateur et à l'extérieur). Les orienter.

9/ Donner l'énergie emmagasinée dans ce condensateur.

التمرين 25.2

ندرس الحقل الكهروساكن و الكمون الناتجين عن ناقلين كرويين متمركزين و مشحونين و هما في حالة توازن كهروساكن.

الناقل المركزي (C) هو كرة مصمتة مركزها O و نصف قطرها R ; تحمل الشحنة السالبة $-Q$.

الناقل الخارجي هو كرة مجوفة، مركزها O و تحمل الشحنة الموجبة المساوية لـ $2Q$; نصف قطر سطحه الداخلي يساوي $2R$ ، و نصف قطره الخارجي يساوي $3R$.

لا وجود لشحنات أخرى، لا داخل الحيز الفارغ بين الناقلين، و لا خارج الناقلين. كل من الناقلين معزول. الكمون معدوم في ما لا نهاية.

نرمز بـ $\vec{E}(M)$ للحقل الكهروساكن و بـ $V(M)$ للكمون في نقطة M مهما كانت في الفضاء، و المعينة بإحداثياتها الكروية $M(r, \theta, \varphi)$ ، حيث $\vec{OM} = r\vec{u}$.

1/ لماذا يمكن الجزم بأن الكثافة الحجمية للشحنة معدومة داخل الناقلين؟ أين نجد الشحنات؟

2/ لماذا يمكن كتابة $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}$ و $V(M) = V(r)$ ؟

3/ برهن أن الشحنة $2Q$ للناقل الخارجي (C') موزعة بانتظام على السطحين.

4/ أحسب $E(r)$ و ارسم البيان المناسب. هل هذه الدالة مستمرة؟ ناقش.

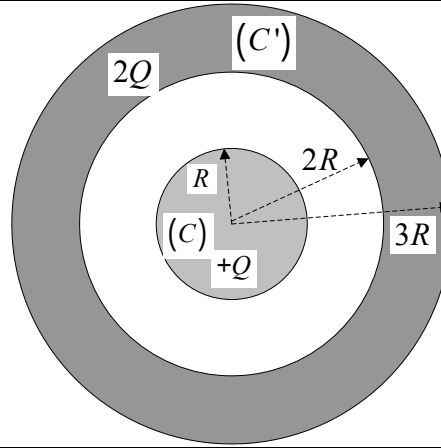
5/ أحسب $\text{div} \vec{E}(M) = \frac{1}{r^2} \frac{d^2(r^2 E(r))}{dr}$ في مختلف مناطق الفضاء. هل كان بالإمكان التنبؤ بهذه النتائج؟

6/ عيّن الكمون $V(r)$ و ارسم البيان المناسب.

7/ إستنتج كمون كل من الناقلين و سعة المكثفة الكروية المكونة من الناقل (C) و السطح الداخلي للناقل (C').

8/ أرسم شكلاً تبين فيه بعض خطوط الحقل (داخل و خارج المكثفة). بين اتجاهها.

9/ إعط الطاقة المخزنة في المكثفة.

**Exercice 2.26**

Un condensateur plan est constitué de deux plaques métalliques rectangulaires A et B (figure-a- ci-dessous) de longueur L et de largeur x , séparées par une couche d'air d'épaisseur $2d$.

1/ Calculer la capacité du condensateur.

2/ Calculer la charge du condensateur lorsqu'il est mis sous une tension U .

3/ On introduit entre les deux armatures du condensateur une plaque métallique (figure-b- ci-dessous) d'épaisseur $d/2$ et initialement neutre. Calculer les charges réparties sur les faces et les représenter sur les faces.

On donne :

$$L = 12\text{cm}; x = 10\text{cm}; 2d = 4\text{cm};$$

$$U = 400\text{V}; \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$$

التمرين 26.2

تتكون مكثفة مستوية من صفيحتين معدنيتين مستطيلتين A و B (الشكل أسفله -a-) طول كل منهما L و عرض كل منهما x ، تفصل بينهما طبقة من الهواء سمكها $2d$.

1/ أحسب سعة المكثفة.

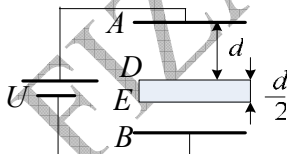
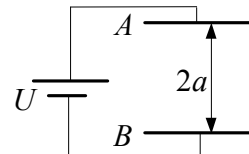
2/ أحسب شحنة المكثفة حينما تربط بين طرفي فرق في الكون U .

3/ ندخل بين لبوسي المكثفة صفيحة معدنية (الشكل أسفله -b-) ذات سمك $d/2$ و معتدلة في البداية. أحسب الشحنات Q_E, Q_D, Q_B, Q_A الموزعة على الأوجه و مثلها على الأوجه.

تعطى:

$$L = 12\text{cm}; x = 10\text{cm}; 2d = 4\text{cm};$$

$$U = 400\text{V}; \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$$

**b****a**

Corrigés des exercices 2.1 à 2.26 :**حلول التمارين من 1.2 إلى 26.2 :****Exercice 2.1 :**

1/ A l'état d'équilibre, les charges se répartissent sur la surface du conducteur c'est-à-dire sur la surface de la sphère. A l'intérieur du conducteur la charge totale est nulle.

2/ Dédution de l'expression de la densité surfacique de la charge :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = \frac{Q}{S} \\ S = 4\pi R^2 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}} \text{ (C/m}^2\text{)}$$

3/ Dans un conducteur en équilibre, le champ électrostatique est nul.

4/ D'après le théorème de Coulomb on a :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}} \text{ (V/m)}$$

5/ Pour appliquer le théorème de Gauss, considérons une surface sphérique fermée de rayon r . Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est :

$\Phi = ES = E \cdot 4\pi r^2$. Donc, l'intensité du champ électrostatique produit à la distance r ($r \geq R$) du centre du conducteur est :

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}} \text{ (V/m)}$$

Exercice 2.2 :

1/ On applique le théorème de Gauss : La charge intérieure est égale à la somme des charges à l'intérieur de la surface de Gauss qui est une sphère de rayon R_G un peu plus grand que le rayon de la sphère conductrice :

$$Q_{\text{int}} = 80 - 20 \Rightarrow Q_{\text{int}} = 60 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$\boxed{E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 S_G} = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi R_G^2 \cdot \epsilon_0}}$$

$$\boxed{E = 84,3 \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-1}}$$

2/ La surface de Gauss, dans ce cas, entoure uniquement la cavité. La charge intérieure est celle que porte la cavité, soit $-20 \mu\text{C}$. D'où le champ près de la surface de la cavité :

$$\boxed{E' = \frac{Q'_{\text{int}}}{\epsilon_0 S'_G} = \frac{Q'_{\text{int}}}{4\pi r_G^2 \cdot \epsilon_0}}$$

$$\boxed{E' = 2,81 \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-1}}$$

3/ La charge sur la surface interne de la cavité est égale à la charge ponctuelle mais de signe opposé, et ce en raison de l'influence totale que produit la charge ponctuelle :

$$q + Q_i = 0 \Rightarrow \boxed{Q_i = 20 \mu\text{C}}$$

4/ La charge à la surface externe plus (+) la charge sur la surface interne de la cavité est égale (=) à la charge que porte la sphère. La charge que porte la surface externe de la sphère est donc :

$$Q_e + Q_i = 80 \mu\text{C} \quad , \quad Q_e + 20 = 80 \Rightarrow \boxed{Q_e = 60 \mu\text{C}}$$

Exercice 2.3 :

- 1/ On applique le théorème de Gauss. On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon un peu plus grand que le rayon du cylindre conducteur, telle que toute la charge que porte le cylindre soit à l'intérieur de la surface Gauss.

$$E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 S_G} = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi R_G^2 \cdot \epsilon_0}$$

$$E = 5,4 \cdot 10^6 \text{Vm}^{-1}$$

- 2/ La densité linéaire est égale à la somme des deux densités, celle du cylindre et celle de la tige :

$$\lambda = 9 + 5, \quad \boxed{\lambda = 14 \mu\text{Cm}^{-1}}$$

- 3/ On applique le théorème de Gauss. On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon un peu plus grand que le rayon du cylindre conducteur, telle que toute la charge que porte le cylindre et la tige ensemble, soit à l'intérieur de la surface Gauss :

$$E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 S} = \frac{\lambda l}{2\pi r l \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}}, \quad \boxed{E = 8,4 \cdot 10^6 \text{Vm}^{-1}}$$

- 4/ On applique le théorème de Gauss. On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon $R = 2\text{cm}$, telle que toute la charge que porte la tige soit à l'intérieur de la surface Gauss :

$$E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 S} = \frac{\lambda l}{2\pi R l \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi R \epsilon_0}}, \quad \boxed{E = 4,5 \cdot 10^6 \text{Vm}^{-1}}$$

Exercice 2.4 :

- 1/ On sait que pour charger un conducteur, il faut fournir un travail. Pour ajouter une charge élémentaire dq (en supposant qu'on la ramène de l'infini où $V_\infty = 0$) à un conducteur, il faut fournir un travail élémentaire : $dW_e = dq(V_\infty - V)$. L'énergie potentielle élémentaire est donc $dE_p = -dW_e \Rightarrow dE_p = dq \cdot V$. Pour obtenir l'énergie totale il faut intégrer :

$$E_p = \int_0^q V dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$q = CV \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} CV^2 \rightarrow (1)$$

Le potentiel à la surface de la sphère est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad \left| \quad \begin{aligned} &\Rightarrow V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} R \rightarrow (2) \\ &q = \sigma \cdot 4\pi R^2 \end{aligned} \right.$$

En remplaçant le potentiel par sa valeur (2) dans l'équation (1), on obtient :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad \left| \quad \begin{aligned} &V^2 = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} R^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 R \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} R^2, \quad \boxed{E_p = 4\pi R^3 p_e} \end{aligned} \right.$$

- 2/ Au cours de l'opération de décharge, l'énergie qui était sur la surface de la sphère se transforme en énergie calorifique par effet joule dans le fil joignant la sphère à la terre.

3/ L'énergie fournie par la source de tension à la sphère est $E_p = qV = CV^2$, c'est le double de l'énergie emmagasinée dans la sphère conductrice à la fin. L'autre moitié s'est transformée en énergie calorifique au cours du transfert des charges à travers le fil métallique.

Exercice 2.5 :

1/ Les deux sphères sont au même potentiel, $V_1 = V_2$:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \rightarrow (1)$$

D'après le principe de la conservation de la charge, on a : $Q = Q_1 + Q_2 \rightarrow (2)$

Des équations (1) et (2) on peut en déduire la charge de chaque sphère :

$$\begin{cases} Q_1 R_2 = Q_2 R_1 \rightarrow Q_1 = Q_2 \frac{R_1}{R_2} \\ Q = Q_1 + Q_2 \rightarrow Q_1 = Q - Q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_2 = \frac{Q}{\frac{R_1}{R_2} + 1} \rightarrow Q_2 = \frac{3}{13} 10^{-9} C \\ Q_1 = Q_2 \frac{R_1}{R_2} \rightarrow Q_1 = \frac{10}{13} 10^{-9} C \end{cases}$$

2/ L'énergie de la sphère avant la connexion (La capacité C d'un conducteur sphérique étant $C = 4\pi\epsilon_0 R_1$) :

$$W = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} \rightarrow W = 4,5 \cdot 10^{-9} J$$

3/ L'énergie du système après la connexion des deux sphères entre elles :

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 \\ W &= \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2} \right] \rightarrow W = 4,46 \cdot 10^{-9} J \end{aligned}$$

On remarque une perte d'énergie, bien qu'elle soit négligeable. Puisque l'effet du fil n'est pas pris en considération, on peut expliquer la perte d'énergie comme étant une transformation en radiation électromagnétique à l'instant de la connexion des deux sphères.

4/ De l'équation (1), on déduit :

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

5/ En appliquant le théorème de Gauss, on peut calculer le champ électrique à la surface de la sphère :

$$\begin{aligned} ES &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ E_{1,\text{surface}} &= \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \\ E_{2,\text{surface}} &= \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{E_{1,\text{surface}}}{E_{2,\text{surface}}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2} &= \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

Exercice 2.6 :

1/ La sphère S_1 acquiert la charge $+Q_1$ lorsqu'elle est portée au potentiel V_1 . La cavité S_2 est influencée totalement par la charge de la sphère S_1 , ce qui entraîne l'apparition de la charge $-Q_1$ à sa surface interne, et la charge $+Q_1$ sur sa surface externe, telle que sa charge totale reste nulle du fait qu'elle est isolée et en équilibre (figure-a). C'est pour cette raison que le champ à l'intérieur de la cavité $R_1 < r < R_2$ est égal, d'après le théorème de Gauss, à :

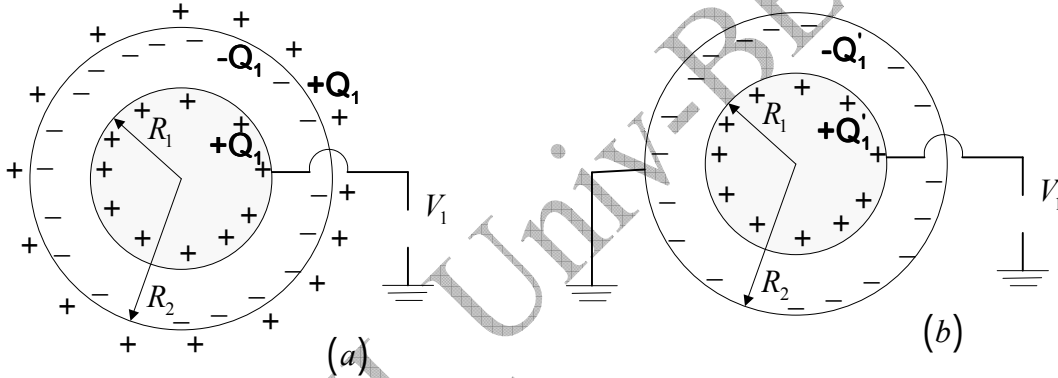
$$\left. \begin{aligned} E(r).S &= \frac{Q_1}{\epsilon_0} \\ S &= 4\pi r^2 \end{aligned} \right| \Rightarrow E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

2/ Calculons la circulation du champ de R_1 à ∞ , sachant que $V_\infty = 0$:

$$V_1 - V_\infty = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}}$$

Donc, la valeur de la charge que porte la sphère S_1 est :

$$\boxed{Q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_1} \quad , \quad \boxed{Q_1 = 1,1\mu C}$$



2/ La mise à la terre de la sphère creuse se traduit par la décharge de sa surface externe, pendant que sa surface interne porte la charge $-Q_1'$, le potentiel de cette cavité est nul. Figure-b.

En suivant le même raisonnement que précédemment, on obtient :

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V_1 = \frac{Q_1'}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{Q_1'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

On en déduit la charge de la surface interne de la cavité creuse, qui est égale mais de signe contraire à celle de la sphère S_1 , en raison de l'influence totale :

$$\begin{aligned} Q_1' &= 4\pi\epsilon_0 V_1 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right) \Rightarrow Q_1' = \frac{R_2}{R_2 - R_1} Q_1 \\ Q_1 &= 4\pi\epsilon_0 R_1 V_1 \\ R_2 &= 2R_1 \Rightarrow \boxed{Q_1' = 2Q_1} \quad , \quad \boxed{Q_1' = 2,2\mu C} \end{aligned}$$

Conclusion : La charge de la sphère S_1 varie aussitôt que la cavité S_2 est reliée à la terre.

Exercice 2.7 :

La répartition de la charge consiste en une charge $+q$ que l'on peut considérer comme ponctuelle, son niveau de potentiel étant nul ($V = 0$).

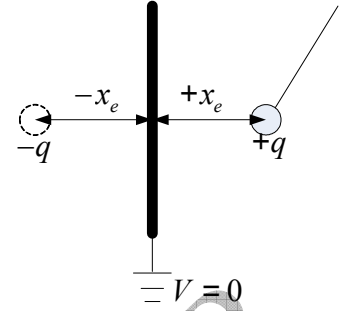
Avant de placer la charge $+q$ au voisinage du plateau, le plateau n'était pas chargé. Lorsqu'on approche la charge $+q$ de ce plateau, et par effet de l'électrisation par influence, le plateau se charge négativement, tel que son potentiel reste nul. Il résulte de ceci l'attraction de la charge par le plateau.

La charge $+q$ et le plateau créent dans l'espace une répartition de potentiel caractérisée par son niveau de potentiel nul (Surface équipotentielle) en $x = 0$.

Si on remplace le plateau par une charge $-q$ ponctuelle située à la distance $-x_e$, on aurait la même répartition de potentiel (le plan médiateur à un potentiel nul $V = 0$). On appelle cette charge ($-q$) **l'image électrique** de la charge $+q$ par rapport au plan. L'attraction entre la charge $+q$ et le plateau de potentiel nul ($V = 0$) est la même attraction produite entre la charge $+q$ et la charge $-q$.

La force appliquée sur la sphère, d'après la loi de Coulomb, est donc :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4x_e^2}$$

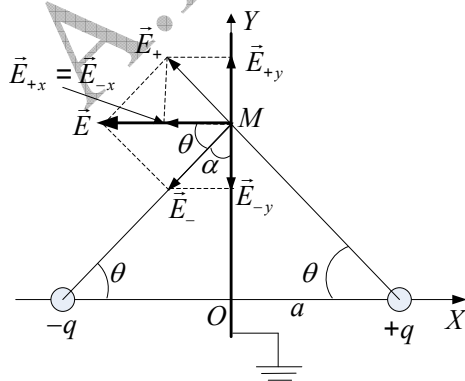
**Exercice 2.8 :**

1/ Quelque soit le point M appartenant au plan conducteur, la différence de potentiel créée par les deux charges est nulle :

$$\forall M, V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Big|_{r_1 = r_2 = r} \Rightarrow \boxed{V(M) = 0}$$

Le champ a une seule composante $\vec{E}_x$ située sur l'axe des X , et par conséquent, le champ résultant des deux charges au point M est perpendiculaire au plan conducteur vertical comme il est démontré dans le raisonnement suivant :

On note par $\vec{E}_+$ et $\vec{E}_-$ les deux champs résultant respectivement des deux charges $+q$ et $-q$. D'après la figure ci-dessous on a :



$$\vec{E}(M) = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$\vec{E}_+ = \vec{E}_{+x} + \vec{E}_{+y}$$

$$\vec{E}_- = \vec{E}_{-x} + \vec{E}_{-y}$$

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_{+x} = \vec{E}_{-x} \\ \vec{E}_{+y} = -\vec{E}_{-y} \end{array} \right| \Rightarrow \vec{E}(M) = 2\vec{E}_{+x}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \vec{E}_x = -2E_+ \cos \theta \vec{u}_x} \Leftrightarrow \boxed{E(M) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta}$$

2/ Pour calculer la densité de charge, on utilise le théorème de Gauss :

$$\left. \begin{aligned} \Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \\ Q_{\text{int}} = \sigma S \\ E = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta \\ \cos\theta = \frac{a}{r} \end{aligned} \right| \Rightarrow \sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{qa}{r^3}$$

3/ Pour vérifier la charge du plan, on calcule le flux que produit la charge ponctuelle $+q$ à travers la surface du plan conducteur :

On sait que le flux élémentaire est $d\Phi = EdS$:

$$d\Phi = 2E_+ \cos\theta \cdot dS \Rightarrow d\Phi = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} dS$$

On reconnaît l'angle solide élémentaire $d\Omega$: $d\Omega = \frac{\cos\theta}{r^2} dS \Rightarrow d\Phi = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} d\Omega$

De la charge $+q$ on voit le demi espace correspondant à l'angle solide $\Omega = 2\pi$, d'où :

$$\Phi = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

D'après le théorème de Gauss $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$.

A la fin, on vérifie que la charge que porte le plan est : $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = -\frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{Q_{\text{int}} = -q}$. Ce résultat prouve qu'il existe une influence totale entre la charge $+q$ et le plan conducteur à condition qu'il soit infini : $q = -q$.

Exercice 2.9 :

Pour calculer le flux, on utilise la formule vue en cours dans l'étude de la forme différentielle du théorème de Gauss :

$$d\Phi_{\vec{E}} = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] dv = \frac{dq}{\epsilon_0}$$

Pour calculer la charge interne, on fait appel au théorème de Gauss : $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

Quant au calcul de la densité de la charge ρ , on utilise le théorème de Gauss sous sa forme différentielle :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Premier cas : $\vec{E} = Cx\vec{u}_x$

Le champ électrique a une seule composante $\vec{E}_x$. Le flux est donc :

$$d\Phi_{\vec{E}} = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}_0 \right] dv = \frac{dq}{\epsilon_0}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_x}{dx} &= C \\ dv &= dx dy dz \\ d\Phi_{\vec{E}} &= C dv \end{aligned} \right| \Rightarrow \Phi_{\vec{E}} = Cv, \quad \boxed{\Phi_{\vec{E}} = Ca^3}$$

La charge interne est :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ q &= \Phi \epsilon_0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{q = \epsilon_0 Ca^3}$$

La densité de charge est :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \frac{dE_x}{dx} \Rightarrow \boxed{\rho = \epsilon_0 C}$$

Deuxième cas : $\vec{E} = C(y\vec{u}_x + x\vec{u}_y)$

Le champ a deux composantes $\vec{E}_x$ et $\vec{E}_y$. Le flux est donc :

$$d\Phi_{\vec{E}} = \left[\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}_0 \right] dv = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi_{\vec{E}} = 0}$$

La charge interne est : $q = \epsilon_0 \Phi = 0 \Rightarrow \boxed{q = 0}$

La densité de charge est :

$$\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$$

Exercice 2.10 :

Le conducteur S_1 porte sa charge propre $q_{11} = C_{11}V_1$, en plus de la charge $q_{12} = C_{12}V_2$ qui résulte de l'influence du conducteur S_2 . Il en est de même pour le conducteur S_2 :

$$q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \rightarrow (1)$$

$$q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \rightarrow (2)$$

Puisque la distance qui les sépare est très grande par rapport à leurs rayons, le potentiel de chaque sphère est équivalent au potentiel d'une charge ponctuelle, il est égal donc à la somme de leurs potentiels inductifs, soit :

$$V_1 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{d} \rightarrow (3)$$

$$V_2 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{d} \rightarrow (4)$$

On met le conducteur S_1 au potentiel $(V_1 > 0)$, et, on relie le conducteur S_2 à la terre $(V_2 = 0)$, on obtient par ordre :

$$q'_1 = C_{11}V_1 \rightarrow (5)$$

$$q'_2 = C_{21}V_1 \rightarrow (6)$$

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1'}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2'}{R_2} \rightarrow (7)$$

On en déduit de l'équation (7) que :

$$q_1' = -\frac{d}{R_2} q_2' \rightarrow (8)$$

$$q_2' = -\frac{R_2}{d} q_1' \rightarrow (9)$$

En remplaçant le résultat (8) dans (3), avec $(d \gg R_1, R_2)$, on trouve :

$$V_1 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \left(-\frac{d}{R_2} q_2' \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d} q_2' \Rightarrow V_1 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_1 R_2 - d^2}{d R_1 R_2}$$

$$V_1 \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{R_1 R_2} \rightarrow (10)$$

Par identification des deux équations (9) et (6), on trouve le coefficient d'influence :

$$C_{21} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_1 R_2}{d}$$

En remplaçant le résultat (9) dans (3), avec $(d \gg R_1, R_2)$, on trouve :

$$V_1 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} q_1' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d} \left(-\frac{R_2}{d} q_1' \right) \Rightarrow V_1 \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_1 R_2 - d^2}{d^2 R_1} q_1'$$

$$V_1 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1} q_1' \rightarrow (11)$$

Par identification des deux équations (11) et (5), on trouve la capacité d'influence :

$$C_{11} = 4\pi\epsilon_0 R_1$$

On porte, à présent le conducteur S_2 au potentiel $(V_2 > 0)$, et on relie le conducteur S_1 à la terre $(V_1 = 0)$. En suivant le même raisonnement que précédemment, on arrive à :

$$C_{22} = 4\pi\epsilon_0 R_2, \quad C_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_1 R_2}{d} = C_{21}$$

Discussion :

a/ Si les deux conducteurs étaient infiniment éloignés l'un de l'autre, on aurait : $C_{12} = C_{21} = 0$, ce qui prouve qu'il n'y a pas d'influence mutuelle, autrement dit, chaque conducteur est isolé, donc : $C_1 = C_{11}$ et $C_2 = C_{22}$.

b/ Si les conducteurs étaient semblables et distants de $d = R_1 = R_2$, on aurait :

$$C_{11} = C_{22} = -C_{12} = -C_{21} = 4\pi\epsilon_0 d$$

La solution serait plus rapide, si on utilise les matrices :

On écrit les équations (1) et (2) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

On peut aussi écrire les équations (3) et (4) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} R_1^{-1} & d^{-1} \\ d^{-1} & R_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

On remarque que la première matrice, qui représente la matrice des coefficients et des capacités d'influence, est équivalente à l'inverse de la matrice centrale dans la deuxième matrice, et en tenant compte des caractéristiques des matrices, on a :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = 4\pi\epsilon_0 \begin{bmatrix} R_1^{-1} & d^{-1} \\ d^{-1} & R_2^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{cases} C_{11} = 4\pi\epsilon_0 R_1 \\ C_{22} = 4\pi\epsilon_0 R_2 \\ C_{12} = C_{21} = -4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{d} \end{cases}$$

Exercice 2.11 :

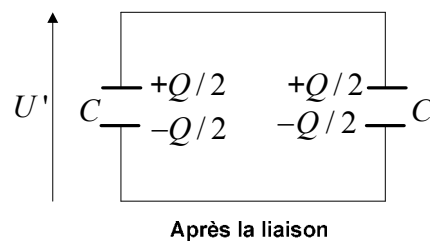
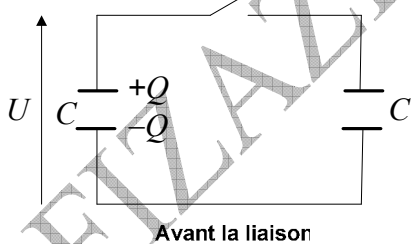
1/ Après la liaison des deux condensateurs, la charge Q , que portait le premier condensateur, se répartit sur les deux condensateurs, tel que chaque condensateur porte la charge $\frac{Q}{2}$.

La tension entre les deux bords du système est : $\frac{Q}{2} = CU' \Rightarrow U' = \frac{Q}{2C}$ $U' = 10V$

2/ Inventaire des énergies :

Avant la liaison : $W = \frac{1}{2} CU^2$ $W = 20\mu J$

Après la liaison : $W' = \frac{1}{2} CU'^2 + \frac{1}{2} CU'^2$ $W' = 10\mu J$



Commentaire : La différence entre les deux résultats est la perte de $10\mu J$!! Cette perte d'énergie n'a pas disparue !!!

Interprétation : Lors de la liaison des deux condensateurs, le courant de décharge produit un champ magnétique : les $10\mu J$ se sont transformés en radiation électromagnétique (C'est comme l'effet qui se produit au niveau des antennes d'émission des ondes radio).

Pour se convaincre, on place un poste radio à proximité du circuit : on entend un crépitements caractéristique qui résulte de la réception d'ondes électromagnétiques émises au moment de la fermeture du circuit. Pour la même raison, on peut entendre à la radio ces crépitements lors de l'éclatement d'un tonnerre.

Exercice 2.12 :

1/ L'énergie emmagasinée :

$$W_E = \frac{1}{2} CU^2, \quad W_E = 9,5 \cdot 10^{-4} J$$

2/ a) La relation entre les charges : La conservation de l'énergie nous impose :

$$Q_A = Q'_A + Q'_E \rightarrow (1)$$

b) Il y a une autre relation entre les charges :

$$U = Q'_A \cdot C_1 = Q'_E \cdot C_2 \Rightarrow \frac{Q'_A}{Q'_E} = \frac{C_2}{C_1} \rightarrow (2)$$

c) Des équations (1) et (2), on obtient les valeurs de Q'_A et Q'_E :

$$Q'_A = 4,7 \cdot 10^{-5} C, \quad Q'_E = 3,2 \cdot 10^{-5} C$$

3/ L'énergie emmagasinée dans les deux condensateurs :

On remarque que l'énergie n'est pas conservée. La différence est perdue sous forme d'énergie calorifique par effet joule dans le fil de jonction au moment de la liaison des deux condensateurs :

$$\Delta W_E = W_E - W'_E, \quad \Delta W_E = 3,8 \cdot 10^{-4} J$$

Exercice 2.13 :

1/ En règle générale, on dit que deux conducteurs sont en influence totale si toutes les lignes de champ partant de la surface de l'un d'eux arrivent à la surface de l'autre. C'est ce qui arrive lorsque l'un des conducteurs entoure complètement l'autre. Dans notre cas, on ne peut rien dire quant aux lignes de champ qui quittent les surfaces externes des armatures. Cependant, si on reste assez éloigné des bords de chaque armature, toutes les lignes de champs issues de la surface interne de l'une des armatures, arrivent à l'autre armature. En ce sens, on peut dire qu'il y a influence totale.

Dans un conducteur en équilibre, la densité de charge est nulle, et par conséquent la charge est répartie sur la surface.

A cause de l'influence totale, la charge que porte la surface interne est égale et de signe opposé à la charge que porte la surface interne de l'armature d'en face. A cause de la symétrie du problème, les densités de charge sont uniformes, et le plan $y = d$ porte une densité constante égale à $-\sigma$.

2/ Le théorème de Coulomb énonce que le champ électrique au voisinage du conducteur est perpendiculaire à sa surface et égal à $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, où σ est la densité de charge surfacique du conducteur. On a pour chaque armature $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y$.

3/ Le champ électrique est unidimensionnel, c'est-à-dire qu'il a une seule composante suivant l'axe des y et son intensité constante, donc il est uniforme. On sait que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. Donc :

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\frac{dV}{dy} \vec{u}_y &\Rightarrow \int_{V(0)}^{V(d)} dV = -\int_0^d E dy \\ V(d) - V(0) &= -Ed \\ V(0) - V(d) &= Ed \Rightarrow V(0) - V(d) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \end{aligned}$$

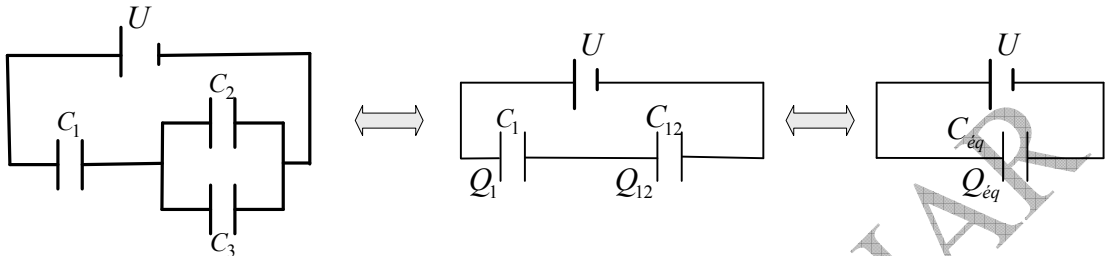
Il reste à déterminer la valeur de la capacité du condensateur :

$$Q = C[V(0) - V(d)] \Rightarrow C = \frac{Q}{V(0) - V(d)} \Rightarrow \boxed{C = \epsilon_0 \frac{S}{d}}$$

$$Q = \sigma S$$

Exercice 2.14 :

On peut simplifier le montage comme indiqué sur la figure suivante :



Les condensateurs C_2 et C_3 sont montés en parallèle, soit C_{12} leur capacité équivalente :

$$C_{12} = C_2 + C_3 \Rightarrow C_{12} = 15 \mu F$$

Les condensateurs C_{12} et C_1 sont montés en série, soit C_{eq} leur capacité équivalente :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_{12} + C_1}{C_{12}C_1} \Rightarrow C_{eq} = 10 \mu F$$

La charge totale du système est :

$$Q_{eq} = C_{eq}U \Rightarrow Q_{eq} = 30 \mu C$$

La charge du condensateur C_1 est :

$$Q_1 = Q_{12} = Q_{eq} \Rightarrow \boxed{Q_1 = 30 \mu C}$$

La tension entre les armatures du condensateur équivalent C_{12} est : $U_{12} = \frac{Q_{12}}{C_{12}} \Rightarrow U_{12} = 2V$

La charge du condensateur de capacité C_2 est : $Q_2 = C_2 U_{12} \Rightarrow \boxed{Q_2 = 20 \mu C}$

La charge du condensateur de capacité C_3 est : $Q_3 = C_3 U_{12} \Rightarrow \boxed{Q_3 = 10 \mu C}$

Exercice 2.15 :

1/ On applique le théorème de Gauss à une surface sphérique fermée de rayon compris entre R_e et R_i . A l'intérieur de cette surface, le champ est nul en raison de l'équilibre du conducteur. La charge que porte la paroi intérieure de la couronne est donc :

$$\left. \begin{array}{l} E = 0 \\ \Phi = ES = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \\ Q_{int} = Q + Q_i \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{Q_i = -Q}$$

2/Là aussi, on applique le théorème de Gauss. La surface de Gauss est une sphère de rayon $R_i > r > R$:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi = E'S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ Q_{int} = Q \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{E' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

3/ Dans ce cas, on sait que la permittivité absolue (ε) de l'isolant est égale au produit de la permittivité du vide (ε_0) par la permittivité relative (ε_r) de l'isolant $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$. Sachant que $\varepsilon > \varepsilon_0$, et puisque le champ est inversement proportionnel à la permittivité, le résultat est la diminution de l'intensité du champ.

$$E'' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow E'' < E' \\ \varepsilon_0\varepsilon_r > \varepsilon_0 \end{array} \right.$$

4/ Le potentiel entre les armature est :

$$V' = -E' dr \Rightarrow V' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K$$

En supposant, comme est toujours le cas, $V' = 0$ quand $r \rightarrow \infty$, on a $K = 0$. Donc :

$$V' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

5/ La capacité du condensateur : on calcule d'abord la différence de potentiel entre les armatures, puis on en déduit la capacité :

$$U = V - V_i \Rightarrow U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_i} \right]$$

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{RR_i}{R_i - R}$$

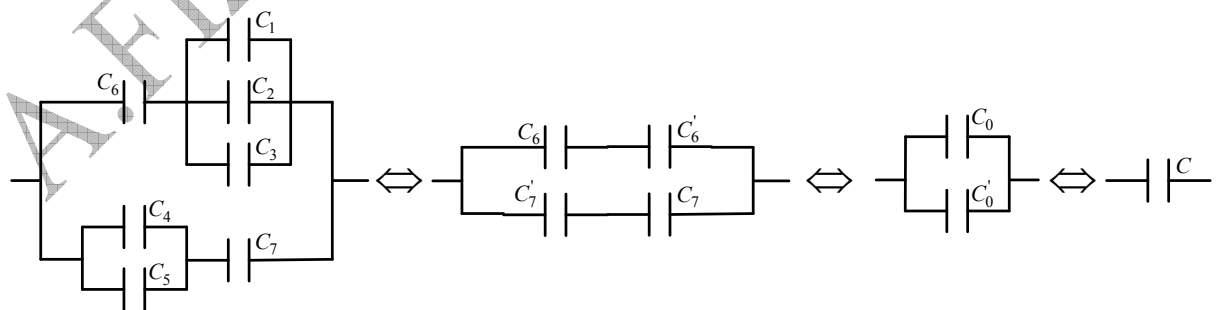
6/ Dans ce cas on a $RR_i = R_i(R_i + d) = R_i^2 \left(1 + \frac{d}{R_i} \right) \approx R_i^2$ et $R_i - R \approx d$. On peut donc écrire :

$$\left. \begin{array}{l} S = 4\pi R_i^2 \\ d = R_i - R \end{array} \right\} \Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

Telle est la capacité du condensateur plan.

Exercice 2.16 :

On s'aide de la figure suivante :



1/ Calcul de la capacité du condensateur équivalent du montage :

$$C'_6 = C_1 + C_2 + C_3 \Rightarrow C'_6 = 6\mu F$$

$$C'_7 = C_4 + C_5 \Rightarrow C'_7 = 9\mu F$$

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_6} \Rightarrow C_0 = 4\mu F$$

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_7} + \frac{1}{C_7} \Rightarrow C_0 = 6\mu F$$

Finalement la capacité du condensateur est égale à :

$$C = C_0 + C_0 \Rightarrow \boxed{C = 10\mu F}$$

2/ Calcul de la charge et de la différence de potentiel de chaque condensateur :

$$\begin{aligned} Q_6 = Q'_6 \Rightarrow 6U'_6 = 12U_6 \Rightarrow U'_6 = 2U_6 \\ U'_6 + U_6 = 120 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{U_6 = 40V}, \boxed{U'_6 = 80V}$$

$$\begin{aligned} Q_7 = Q'_7 \Rightarrow 9U'_7 = 18U_7 \Rightarrow U'_7 = 2U_7 \\ U'_7 + U_7 = 120 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{U_7 = 40V}, \boxed{U'_7 = 80V}$$

On en déduit de cela :

$$\boxed{U_1 = U_2 = U_3 = 80V}, \boxed{U_4 = U_5 = 40V}$$

A présent, il est facile de calculer la charge de chaque condensateur en appliquant la relation fondamentale des condensateur $Q = CU$:

$$Q_6 = C_6 U_6 \Rightarrow Q_6 = 480\mu C$$

$$Q_1 = C_1 U_1 \Rightarrow Q_1 = 80\mu C$$

$$Q_2 = C_2 U_2 \Rightarrow Q_2 = 160\mu C \quad = Q_6 = Q'_6 ; \quad Q_4 = C_4 U_4 \Rightarrow Q_4 = 320\mu C \quad = Q_7 = Q'_7$$

$$Q_3 = C_3 U_3 \Rightarrow Q_3 = 240\mu C$$

$$Q_7 = C_7 U_7 \Rightarrow Q_7 = 720\mu C$$

L'énergie de tout le groupement est donc :

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \Rightarrow \boxed{W = 0,72J}$$

Exercice 2.17 :

Remarque : On note par l'indice 0 tout ce qui est en rapport avec la position 0° , et par l'indice 1 tout ce qui se rapporte à la position 180° .

1/ Quand le condensateur est reliée à la batterie, sa charge est :

$$\boxed{Q_1 = C_1 U}, \quad Q_1 = 950 \cdot 10^{-12} \cdot 400, \quad \boxed{Q_1 = 380nC}$$

2/ La différence de potentiel quand le cadran indique 0° est :

$$\boxed{W_0 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_0}}, \quad \boxed{W_0 = 1,444 \cdot 10^{-3} J}$$

3/ L'énergie du condensateur quand le condensateur indique 0° est donc :

$$\boxed{U_0 = \frac{Q_1}{C_0}}, \quad U_0 = \frac{38 \cdot 10^{-8}}{50 \cdot 10^{-12}}, \quad \boxed{U_0 = 7,6 \cdot 10^3 V}$$

4/ Le travail nécessaire pour faire tourner le bouton est égal à la diminution de l'énergie entre les positions 0° et 180° . L'énergie du condensateur quand le cadran indique 180° est :

$$\boxed{W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1}}, \quad \boxed{W_1 = 0,076 \cdot 10^{-3} J}$$

$$\text{Donc le travail fourni est : } \boxed{w = W_1 - W_0}, \quad \boxed{w = -1,368 \cdot 10^{-3} J}$$

Le signe moins (-) signifie que cette énergie a été dépensée.

Exercice 2.18 :

1/ **L'interrupteur K ouvert** : regardons la figure(a) correspondante :

D'après la règle des tensions : $U_{AB} = U_{AF} + U_{FB}$

D'où :

$$\left. \begin{array}{l} U_{AB} = (R_1 + R_2)I \\ R_1 = 2R_2 \end{array} \right| \Rightarrow U_{AB} = 3R_2 I = 3U_{FB}$$

Le potentiel en B est donc :

$$\left. \begin{array}{l} V_A - V_B = 3(V_F - V_B) \\ V_B = 0, V_A = 24V \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{V_F = 8V}$$

2/ De la même façon on trouve la valeur du potentiel V_G : $U_{AB} = U_{AG} + U_{GB}$

Les deux condensateurs portent la même charge Q puisqu'ils sont montés en série :

$$\left. \begin{array}{l} U_{AB} = QC_1 + QC_2 \\ C_2 = 2C_1 \end{array} \right| \Rightarrow U_{AB} = 3QC_1 = 3U_{AG}$$

Le potentiel en G est donc :

$$\left. \begin{array}{l} V_A - V_B = 3(V_A - V_G) \\ V_B = 0, V_A = 24V \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{V_G = \frac{2V_A}{3}} \quad \boxed{V_G = 16V}$$

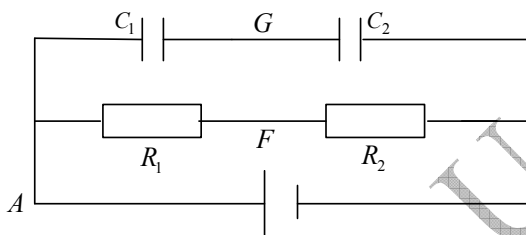


Figure (a)

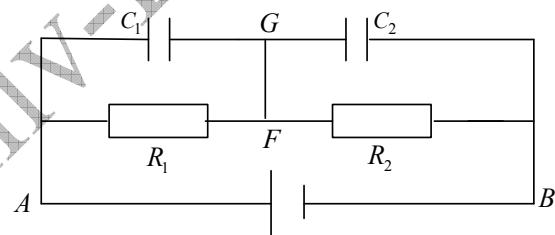


Figure (b)

3/ **L'interrupteur K fermé** : Regardons la figure(b) correspondante.

Le potentiel du point F est le même qu'à la question (1), soit $V_F = 8V$. Donc :

$$\boxed{V_F = V_G = 8V}$$

4/ Avant la fermeture de l'interrupteur, chaque condensateur portait la charge :

$$\left. \begin{array}{l} Q = Q_1 = Q_2 \\ C_1 U_1 = C_2 U_2 \\ U_1 = V_A - V_G = 16V \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{Q = 7,69 \cdot 10^{-6} C}$$

Au moment de la fermeture, et temporairement, chaque condensateur portait sa propre charge :

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = C_1 U_1 \rightarrow Q_1 = 7,69 \cdot 10^{-6} C \\ Q_2 = C_2 U_2 \rightarrow Q_2 = 1,92 \cdot 10^{-6} C \end{array} \right| \Rightarrow Q_1 \neq Q_2$$

Cependant, cette situation ne dure pas. Lorsque l'état d'équilibre est atteint très rapidement, les charges des deux condensateurs deviennent égales. Pour que les deux charges des deux armatures communes au point G s'égalisent, il faut que des charges négatives, les seules qui peuvent se déplacer, quittent l'armature C_1 . Ce déplacement ne s'arrête que lorsque les deux charges des deux armatures s'égalisent.

Si Q' est la valeur qui a transité par l'interrupteur, sa valeur est donc :

$$Q_2 = Q_1 + Q'_1 \Rightarrow Q'_1 = Q_2 - Q_1, \quad \boxed{Q'_1 = -5,76 \cdot 10^{-6} C}$$

Exercice 2.19 :

1/ Pour calculer la quantité d'énergie emmagasinée dans le condensateur, calculons d'abord la capacité du condensateur :

$$\boxed{C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d}}, \quad \boxed{C_1 = 35,8 \cdot 10^{-12} F}$$

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1}}, \quad \boxed{W_E = 1,25 \cdot 10^3 J}$$

2/ Si on introduit une plaque de mica, la capacité augmente, ce qui entraîne une diminution de l'énergie. La permittivité absolue du mica est $\epsilon = \epsilon_0 \kappa$. D'où :

$$\boxed{C_2 = \kappa \epsilon_0 \frac{S}{d}}, \quad \boxed{C_2 = 250,6 \cdot 10^{-12} F}$$

$$\boxed{W_{E2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_2}}, \quad \boxed{W_{E2} = 1,8 \cdot 10^2 J}$$

3/ Dans le cas de la diminution de la distance entre les armatures, la capacité augmente et l'énergie emmagasinée diminue :

$$\boxed{C_3 = \kappa \epsilon_0 \frac{S}{d/2}}, \quad \boxed{C_3 = 501,2 \cdot 10^{-12} F}$$

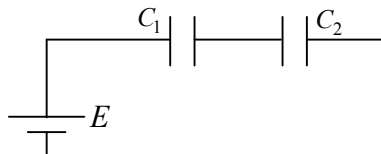
$$\boxed{W_{E3} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_3}}, \quad \boxed{W_{E3} = 89,8 J}$$

Exercice 2.20 :

I. **L'interrupteur K_1 fermé :** Voir figure correspondante ci-dessous :

1/ les deux condensateurs étant montés en série, ils portent la même charge. La tension entre les armatures du condensateur équivalent est égale à la force électromotrice E du générateur :

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \\ q &= CV = CE \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{q = E \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}, \quad \boxed{q = 4 \mu C}$$

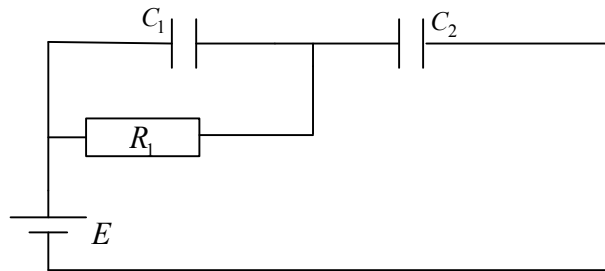


2/ La différence de potentiel entre les armatures de chaque condensateur :

$$U_1 = \frac{q}{C_1} \Rightarrow \boxed{U_1 = 4V}$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} \Rightarrow \boxed{U_2 = 2V}$$

- II. On laisse l'interrupteur K_1 fermé, et on ferme les interrupteurs K_2 et K_3 . Voir figure suivante :



1/ Après le laps de temps nécessaire pour la charge du condensateur, le courant électrique s'annule, mais le générateur impose une tension permanente entre ses bords. En suivant les deux trajets différents pour calculer la tension entre les pôles du générateur, on arrive à :

$$\begin{aligned} E &= U_1 + U_2 \\ E &= U_2 \end{aligned} \Rightarrow U_1 = 0 \Rightarrow \boxed{q_1 = 0}$$

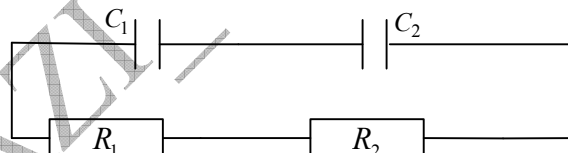
Donc, le condensateur C_1 se décharge dans la résistance R_1 , tandis que le condensateur C_2 se charge sous la tension E du générateur, telle que :

$$q_2 = C_2 E \Rightarrow \boxed{q_2 = 12nC}$$

2/ La différence de potentiel entre les bords de chaque condensateur est :

$$\boxed{U_1 = 0}, \quad \boxed{U_2 = E = 6V}$$

- III. On ouvre les interrupteurs K_1 et K_3 , et on ferme les interrupteur K_2 et K_4 . Voir figure suivante :

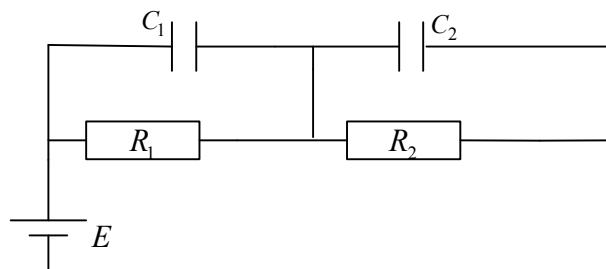


Les deux condensateurs se déchargent complètement dans les résistances :

$$\boxed{q_1 = q_2 = 0}$$

- IV. On laisse K_2 et K_4 fermés, puis on ferme aussi les interrupteurs K_1 et K_3 .

1/ La tension entre les bords de chaque condensateur est :



$$E = (R_1 + R_2)I \Rightarrow I = \frac{E}{R_1 + R_2}, \quad I = 0,03A$$

$$R_1 = R_2 \Rightarrow U_1 = U_2 = R_1 I \quad U_1 = U_2 = 3V$$

2/ La charge de chaque condensateur est :

$$q_1 = C_1 U_1 \quad q_1 = 3\mu C$$

$$q_2 = C_2 U_2 \quad q_2 = 6\mu C$$

Exercice 2.21 :

Si l'électromètre indique zéro, cela veut dire que les points F et G sont au même potentiel. Nous voyons sur la figure ci-contre que :

$$U_{AF} = U_{AG} \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_3}{C_3} \rightarrow (1)$$

$$U_{FB} = U_{GB} \Rightarrow \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_4}{C_4} \rightarrow (2)$$

D'après le principe de la conservation de la charge, on a :

$$-q_1 + q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2$$

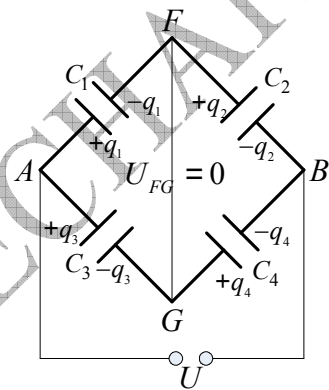
$$-q_3 + q_4 = 0 \Rightarrow q_3 = q_4$$

Dans l'équation (2), on remplace q_2 et q_4 respectivement par q_1 et q_3 , on écrit donc :

$$\frac{q_1}{C_2} = \frac{q_3}{C_4} \rightarrow (3)$$

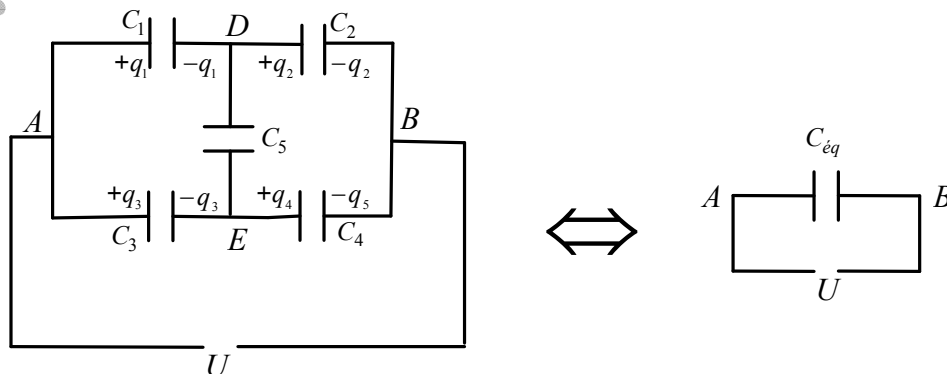
On divise les équations (3) et (1) membre à membre, on obtient :

$$\frac{(3)}{(1)} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$$



Exercice 2.22 :

1/ On remarque que E est un point commun aux condensateurs C_3 , C_4 et C_5 ; en même temps le point D est commun aux condensateurs C_1 , C_2 et C_5 . Le condensateur C_5 est seul entre les points E et D . Le montage qui montre la symétrie est représenté sur la figure suivante :



2/ On pose : $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$

D'après le principe de la conservation de la charge, et à l'aide de la figure précédente, on a :

$$\begin{aligned} q &= q_1 + q_3 = q_2 + q_4 \rightarrow (1) \\ C_{eq} U &= C U_1 + C U_3 = C U_2 + C U_4 \\ C_{eq} U &= C (U_1 + U_3) = C (U_2 + U_4) \rightarrow (2) \end{aligned}$$

D'après la règle des tensions, on peut écrire :

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ U &= U_3 + U_4 \end{aligned} \Rightarrow 2U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \rightarrow (3)$$

De l'équation (1), on en déduit que :

$$C_{eq} U = C U_1 + C U_3 = C U_2 + C U_4 \Rightarrow U_1 + U_3 = U_2 + U_4$$

Reportons ce dernier résultat dans l'équation (3), qui devient :

$$\begin{aligned} 2U &= \underbrace{U_1 + U_3}_{U_2 + U_4} + U_2 + U_4 \\ \boxed{U &= U_2 + U_4} \rightarrow (4) \end{aligned}$$

Des équations (2) et (4) on peut calculer la capacité du condensateur équivalent C_{eq} :

$$\begin{aligned} (1) &\rightarrow C_{eq} U = C (U_2 + U_4) \\ (4) &\rightarrow U = U_2 + U_4 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = C = 1 \mu F}$$

La charge de chaque condensateur : on montre que les charges q_3, q_2, q_1 et q_4 sont égales :

$$\begin{aligned} U_1 &= U_3 \\ U_2 &= U_4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = q_3 \\ q_2 = q_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -q_1 + q_2 &= 0 \Rightarrow q_1 = q_2 \\ -q_3 + q_4 &= 0 \Rightarrow q_3 = q_4 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{q_1 = q_2 = q_3 = q_4}$$

Evaluons la charge q_2 par exemple :

$$U = U_1 + U_2 \Rightarrow \frac{q}{C_{eq}} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow q = q_1 + q_2 = 2q_2$$

$$q = C_{eq} U = 2C q_2 \Rightarrow \boxed{q_2 = \frac{C_{eq}}{2} U}$$

$$\boxed{q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ C}}$$

Quant à la charge q_5 , elle est nulle : $q_5 = C_5 U_5 \Rightarrow \boxed{q_5 = 0}$

La différence de potentiel entre les bords de chaque condensateur est :

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ U_1 &= U_2 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 50 \text{ V}} \quad \boxed{U_5 = 0}$$

Exercice 2.23 :

L'énergie électrostatique libre initiale du système est : $(1) \leftarrow W_{el} = \frac{1}{2} C U_0^2$

On obtient l'énergie finale, à la fin de régime transitoire, en fonction de C , C' et de la tension U commune entre les bords des deux condensateurs, en écrivant :

$$(2) \leftarrow W_{e2} = \frac{1}{2}(C + C')U^2$$

Pour connaître cette tension U , on introduit la conservation de la charge électrique au cours de la transformation de l'énergie. En effet, le système est isolé du milieu extérieur, et la charge électrique qui est une quantité de matière ne peut être que conservée. La charge initiale Q_0 s'est répartie à la fin en deux charges q et q' , telle que :

$$Q_0 = CU_0 = q + q' = (C + C')U$$

$$U = \frac{C}{C + C'}U_0$$

$$W_{e2} = \frac{1}{2}(C + C') \frac{C^2 U_0^2}{(C + C')^2} \Rightarrow W_{e2} = \frac{1}{2} \frac{C^2}{C + C'} U_0^2$$

L'énergie emmagasinée dans l'ensemble des condensateurs est donc (2) - (1) :

$$\Delta W_e = W_{e2} - W_{e1} = -\frac{1}{2} \frac{CC'}{C + C'} U_0^2$$

Le signe moins (-) indique la diminution de l'énergie. L'énergie consommée a été transférée au milieu extérieur sous forme d'énergie calorifique, dans la résistance R . La puissance de cette transformation est d'autant plus grande que le temps de décharge est plus petit, et la résistance plus faible.

Pour s'en assurer de cela, on calcule l'énergie dissipée par effet joule : soit i l'intensité instantanée du courant électrique dans le circuit. La forme de ce courant est exponentielle. Sa valeur initiale est $\frac{U_0}{R}$, car à cet instant, le condensateur de capacité C' était sous une tension nulle. La constante de temps est $\tau = RC_{eq}$.

$$\text{Donc : } i = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

L'énergie dissipée par effet joule est donnée par :

$$W_J = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty R \frac{U_0^2}{R^2} \exp(-2t/\tau) dt$$

$$W_J = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} \tau \Rightarrow W_J = \frac{1}{2} U_0^2 \frac{CC'}{C + C'}$$

La puissance moyenne au cours de la transformation du système, si on admet que l'opération s'est produite en l'intervalle de temps $t = 5\tau$, est :

$$P_{moy} = \frac{W_J}{t} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} \frac{\tau}{5\tau} \Rightarrow P_{moy} = \frac{1}{10} \frac{U_0^2}{R}$$

Si On approche la valeur de la résistance de zéro, la transformation est brutale. La puissance calorifique transformée conduit à échauffement très important, même si la quantité de l'énergie fournie est indépendante de R .

Conclusion : Il faut éviter la jonction de ces deux sources de tension, c'est à dire les condensateurs chargés. Si la résistance est celle de l'interrupteur, qui est obligatoirement faible, l'instant de la fermeture conduit à sa détérioration.

Il est strictement interdit de réaliser un montage pareil.

Exercice 2.24 :

1/ Au cours de la charge du condensateur, l'intensité du courant est comptée positivement.

Au cours de la décharge le courant change de sens, donc i est négative : $i = -\frac{dq_A}{dt}$

Remarque : $dq_A = q_A(t+dt) - q_A(t) < 0$ car la charge que porte l'armature A décroît au cours de la décharge, on trouve effectivement $i < 0$.

La relation entre i et u_C :

$$\left. \begin{array}{l} q_A = Cu_C \\ i = -\frac{dq_A}{dt} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{i = -C \frac{du_C}{dt}}$$

2/ L'équation différentielle de l'évolution de la tension u_C est :

$$\left. \begin{array}{l} u_C = u_R \\ u_R = Ri \\ i = -C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right| \Rightarrow u_C = -RC \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{RC} u_C + \frac{du_C}{dt} = 0}$$

3/ a) Désignation des deux constantes A et a :

$$\text{Exprimons d'abord } \frac{du_C}{dt} = \frac{d(Ae^{-at})}{dt} \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = -aA \exp(-at)$$

Remplaçons dans l'équation différentielle :

$$\frac{1}{RC} A \exp(-at) - aA \exp(-at) = 0 \Rightarrow A \left(\frac{1}{RC} - a \right) \exp(-at) = 0$$

Cette équation est vérifiée quelque soit le temps t :

pour $A = 0$, ce qui est impossible car l'énoncé impose $A > 0$,

Ou pour $\frac{1}{RC} - a = 0$, ce qui conduit à :

$$\frac{1}{RC} - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{RC}}$$

Au temps $t = 0$, on a $u_C(0) = U_0 = 10V$, d'où :

$$A \exp(-a \cdot 0) = U_0 \Rightarrow \boxed{A = U_0}, \quad \boxed{A = 10V}$$

b) La constante de temps est : $\boxed{\tau = RC}$

c) La valeur de la capacité est : $\boxed{C = \frac{\tau}{R}}$, $\boxed{C = 2 \cdot 10^{-3} F}$

d) La dimension de la constante de temps est homogène au temps :

$$\left. \begin{array}{l} \tau = RC \Rightarrow [\tau] = [R][C] \\ R = \frac{u_R}{i} \Rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]} \\ C = i \frac{dt}{du_C} \Rightarrow [C] = [I] \frac{[T]}{[U]} \end{array} \right| \Rightarrow [\tau] = \frac{[U]}{[I]} [I] \frac{[T]}{[U]} \Rightarrow \boxed{[\tau] = [T]}$$

4/ a) Expression de l'intensité instantanée :

$$\left. \begin{aligned} i &= C \cdot \frac{du_C}{dt} \\ u_C &= U_0 e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{i = -\frac{U_0}{C} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

b) Intensité du courant au temps $t = 0$: $i(0) = -\frac{U_0}{R}$, $\boxed{I_0 = -0,3A}$

c) Intensité du courant au temps $t = 0,5s$: $i(t) = -\frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$, $\boxed{i(0,5) = -0,2A}$

d) La tension au même moment est : $u(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$, $\boxed{u(0,5) = 8.10^{-3}V}$

e) La durée écoulée dépasse plus de cinq fois la valeur de la constante de temps τ , on trouve une valeur de u_C proche de zéro. Donc, on peut considérer que le condensateur s'est déchargé.

5/ L'expression de l'énergie emmagasinée dans le condensateur C au temps $t = 0$ est $W_E = \frac{1}{2} C U_0^2$. Pour le condensateur ($C' > C$) on a $W'_E = \frac{1}{2} C' U_0^2$. Puisque U_0 est constante, on a $W'_E > W$.

Exercice 2.25 :

1/ Dans un conducteur en équilibre, le champ $\vec{E}$ est nul, et par conséquent $\text{div}\vec{E} = 0$. D'après la forme différentielle du théorème de Gauss, $\text{div}\vec{E} = \rho / \epsilon_0$. Donc $\boxed{\rho = 0}$.

2/ En raison de la symétrie sphérique du système des deux conducteurs en état d'équilibre électrostatique, le champ qui est un vecteur radial, est contenu dans tous les plans contenant l'axe $\overrightarrow{OM}$; donc le champ radial $\vec{E}(M)$ et porté par $\vec{u}$.

En plus de ce qui vient d'être dit, il n'y a pas de variation du champ par rotation autour de O . Cela veut dire que les valeurs du champ ne dépendent pas des variables θ et φ .

D'où, on peut écrire $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}$ et $V(M) = V(r)$.

3/ La répartition des charges sur les surfaces des conducteurs.

En raison de la symétrie sphérique de l'ensemble des conducteurs, les charges se répartissent uniformément sur leurs surfaces. La charge $2Q$ du conducteur externe (C') se répartit sur ses surfaces interne et externe.

Puisque les conducteurs (C) et (C') sont en influence totale, il existe obligatoirement sur la surface interne du conducteur (C') la charge $+Q$.

La charge restante $+Q$ apparaît sur la surface externe du conducteur (C').

On peut démontrer ceci, en appliquant le théorème de Gauss : Le champ est nul sur une sphère de rayon r , tel que $2R < r < 3R$. Le flux du champ externe est donc nul, et par conséquent la charge interne de cette surface doit être nulle.

4/ **Graphique de $E(r)$** : On applique le théorème de Gauss à la sphère de rayon r tel que $R < r < 2R$. La charge interne est $-Q$. On obtient : $4\pi r^2 E(r) = \frac{-Q}{\epsilon_0}$.

On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r tel que $r > 3R$. La charge interne est $+Q$. On obtient : $4\pi r^2 E(r) = \frac{+Q}{\epsilon_0}$.

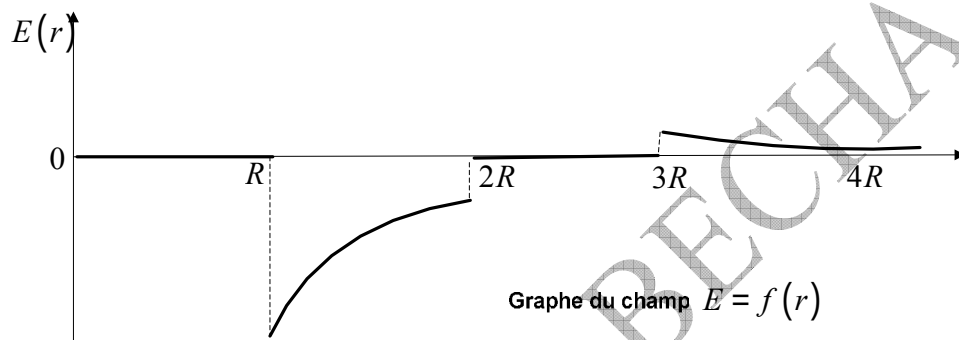
On a donc :

$$\text{Pour } R < r < 2R : 4\pi r^2 E(r) = \frac{-Q}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Pour } r > 3R : 4\pi r^2 E(r) = \frac{+Q}{\varepsilon_0}$$

Le champ est nul à l'extérieur de cet espace étudié, et discontinu à la traversée de tout plan chargé.

5/ : $\text{div} \vec{E}(M) = \frac{1}{r^2} \frac{d^2(r^2 E(r))}{dr} = 0$, en effet, dans ce problème, il n'y a aucune densité volumique de charge en aucune position. La charge est répartie sur les surfaces des conducteurs.



6/ Graphe $V(r)$ du potentiel :

Le potentiel est continu. On l'obtient en partant de l'infini où sa valeur est nulle. Par intégration de $V(r) = -\int E(r) dr$ dans les différents cas, on obtient :

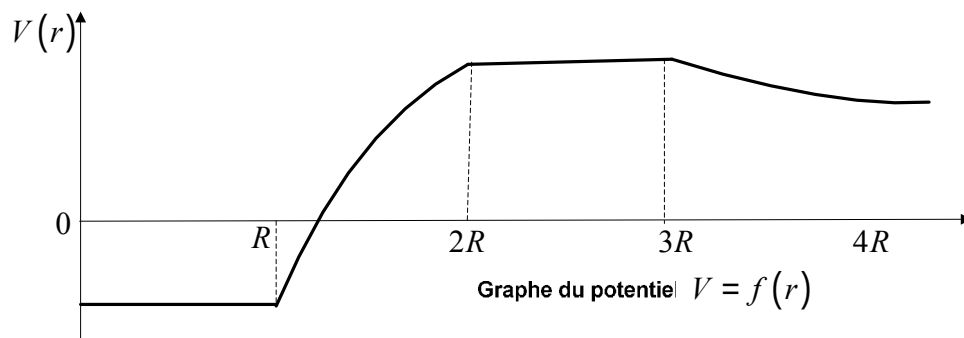
$$\text{Pour } r > 3R : V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\text{Pour } 3R > r > 2R, \text{ le potentiel est constant : } V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{3R}$$

$$\text{Pour } 2R > r > R, \text{ on a : } V(r) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2R} + K$$

$$\text{La constante d'intégration } K \text{ est telle que } V(2R) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2R} + K = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{3R}, \text{ on}$$

$$\text{trouve à la fin } V(r) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{5Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{6R} :$$



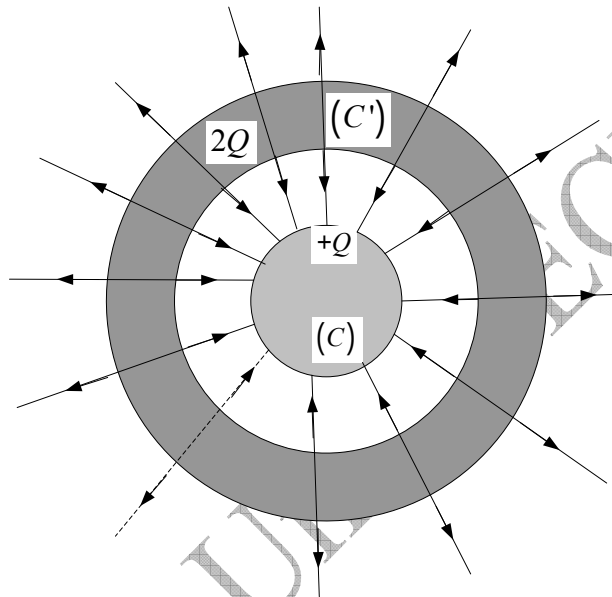
7/ Le potentiel du conducteur (C') est : $V_{C'} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3R}$

Le potentiel du conducteur (C) est : $V_C = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6R}$

La différence de potentiel est donc : $V_{C'} - V_C = U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R}$

En utilisant la relation fondamentale des condensateurs $Q = CU$, on obtient la capacité de ce condensateur sphérique : $C = 8\pi\epsilon_0 R$

8/ La forme de quelques lignes de champ orientées (voir figure ci-dessous)



9/ Energie du condensateur : $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Rightarrow W = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 R}$

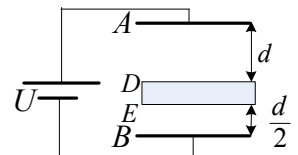
Exercice 2.26 :

1/ Capacité du condensateur plan : $C = \epsilon_0 \frac{S}{2d} = \epsilon_0 \frac{x.L}{2d} \Rightarrow C = 2.65 \times 10^{-12} F$

2/ Charge du condensateur :

$$Q = CV$$

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{2d} = \epsilon_0 \frac{x.L}{2d} \Rightarrow Q = \epsilon_0 \frac{x.L}{2d} V ; Q = 1.1 \times 10^{-9} C$$



Calcul des charges des faces :

L'électrisation se produit par influence : $Q_E = -Q_B$; $Q_A = -Q_D$, et puisque la plaque interne est initialement électriquement neutre, on a :

$$Q_D = -Q_E \Rightarrow Q_D = -Q_E = +Q_B = -Q_A = Q'$$

Le résultat, est qu'on a deux condensateurs groupés en série.

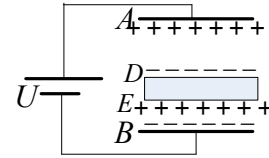
La capacité du condensateur équivalent est donc :

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} ; \quad \left. \begin{array}{l} C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \\ C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d/2} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{2\epsilon_0 S}{3d}}$$

Les charges que portent les quatre faces sont :

$$\boxed{Q' = C_{eq} V = 2\epsilon_0 \frac{Lx}{3d}}$$

$$\boxed{Q' = Q_D = -Q_E = +Q_B = -Q_A = 1.4 \times 10^{-9} C}$$



III / ELECTROCINETIQUE

الكهرباء المتحركة

L'électrocinétique est l'étude des courants électriques, c'est-à-dire l'étude des charges électriques en mouvement dans des milieux matériels appelés conducteurs. Autrement dit, c'est l'étude des circuits et réseaux électriques.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux causes qui provoquent le mouvement de charges, ainsi que les causes qui s'opposent à leur mouvement.

A/ Le courant électrique (التيار الكهربائي) :

La figure 3.1 représente deux corps, B non chargé et en état d'équilibre, et A chargé par l'une des méthode d'électrisation. Relions les deux corps par l'intermédiaire d'un fil de jonction. Le corps B se charge, c'est-à-dire qu'il acquiert une charge élémentaire dQ en un temps très bref dt , ainsi il perd son équilibre électrostatique temporairement.

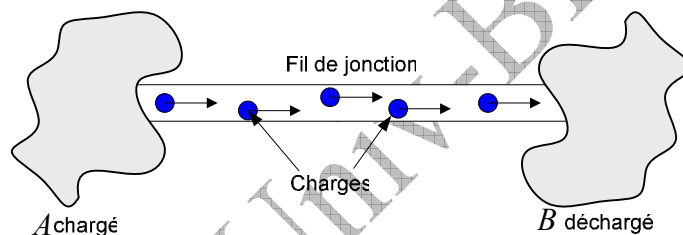


Fig 3 - circulation du courant de A vers B

Ceci s'explique par le déplacement de charges électriques du corps A vers le corps B à travers le fil de jonction qui les relie. D'où la définition du courant électrique :

- **Définition** : Le courant électrique est un déplacement collectif et organisé des porteurs de charges (électrons ou ions).

Cet écoulement de charges peut se produire dans le vide (faisceau d'électrons dans les tubes cathodiques...), ou dans la matière conductrice (les électrons dans les métaux, ou les ions dans les solutions aqueuses).

Un courant électrique apparaît dans un conducteur quand une différence de potentiel est établie entre les bornes de ce dernier.

1/ Intensité du courant électrique (شدة التيار الكهربائي) :

- **Intensité moyenne** (الشدة المتوسطة) : L'intensité moyenne du courant électrique est la quantité d'électricité (la charge) qui traverse une section du conducteur par unité de temps :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (3.1)$$

- **Intensité instantanée** (الشدة اللحظية) : L'intensité instantanée du courant électrique est la dérivée de la charge électrique par rapport au temps :

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (3.2)$$

- L'unité : Ampère (A), (en mémoire au physicien André-Marie Ampère 1775-1836). L'ampère est l'intensité d'un courant électrique correspondant au passage d'une charge électrique de un coulomb, à travers une section d'un conducteur, en une seconde.
- Ordre de grandeur de la vitesse des porteurs de charges :
 - Dans un fil électrique, les électrons libres se déplacent à une vitesse moyenne d'environ $1mm/s$.
 - Dans les solutions aqueuses, la vitesse des ions est plus faible que celle des électrons libres dans les métaux.
 - Dans le vide, la vitesse des électrons avoisine $10000km/s$; même cette valeur est très petite devant la célérité de la lumière ($c = 3.10^5 kms^{-1}$).
- Sens du courant (اتجاه التيار الكهربائي): Le courant électrique circule dans le sens décroissant des potentiels, c'est-à-dire dans le sens du champ électrique. Ainsi, le sens choisi **conventionnellement** est contraire au sens des charges négatives.

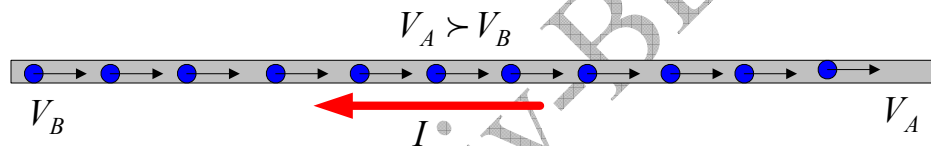


Fig 3 2 sens conventionnel du courant électrique

- Rappel de la loi d'Ohm (Georges-Simon Ohm 1789-1854):

La facilité avec laquelle les charges circulent entre deux pôles dépend de la façon dont ces pôles sont reliés entre eux. Si la jonction se fait par l'intermédiaire d'un fil métallique, les charges ne rencontrent pas de difficultés majeures pour se déplacer, par contre, si la liaison se fait à travers un isolant, le passage des charges devient très difficile, voir impossible.

Cette propriété qui caractérise la matière, de permettre ou d'interdire le passage des porteurs de charges, s'appelle la **résistance** de la matière en question. On mesure la résistance en **Ohm** (Ω). La résistance des matériaux est faible, tandis que la résistance des isolants est très grande et même infinie.

Dans l'industrie, il existe de petits éléments (appelés résistances), leurs résistances varient de quelques ohms à des millions d'ohms.

Pour un conducteur métallique, sous une température constante, le rapport entre la différence de potentiel U (ou tension) entre ses bornes, et l'intensité I du courant électrique qui le traverse, est constant et égal à la résistance du conducteur.

$$R = \frac{U}{I} = C^{te} \quad (3.3)$$

Cette relation entre l'intensité du courant, la tension et la résistance est connue sous le nom de la **loi d'Ohm**.

La loi d'Ohm montre que pour une différence de potentiel déterminée, on peut mettre dans le circuit un nombre de résistances, en vue de limiter l'intensité du courant électrique qui traverse l'appareil alimenté électriquement.

2/ La densité du courant électrique (كثافة التيار الكهربائي) :

Nous avons défini le courant électrique comme étant un écoulement de charges dans le vide ou à travers un milieu matériel conducteur. On peut exprimer l'intensité du courant électrique en fonction de la vitesse des charges mobiles (libres).

On considère un conducteur de section dS . Soit n le nombre de charges q mobiles, se déplaçant à la vitesse constante $\vec{v}$, et contenues dans un volume V .

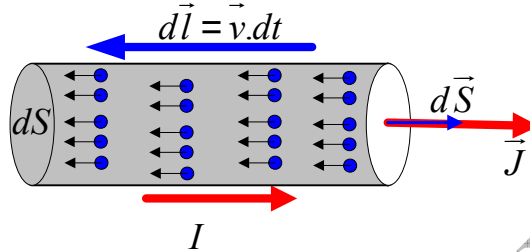


Fig 3.3 : densité de courant

En un temps très court dt les charges progressent d'une distance : $d\vec{l} = \vec{v}.dt$

Pendant la même durée dt , la charge dQ contenue dans le volume élémentaire dV du conducteur est donc : $dQ = nq.dV$

Et puisque : $dV = d\vec{l}.d\vec{S}$

On a : $dQ = n.q.\vec{v}.dt.d\vec{S}$

➤ **Définition** : La densité du courant électrique est la grandeur $\vec{J}$ qui est égale à la charge par unité de temps à travers l'unité de surface :

$$\boxed{\vec{J} = nq.\vec{v}} \quad (3.4)$$

On peut donc écrire :

$$dQ = \vec{J}.dt.d\vec{S}$$

Dans le cas d'un cristal composé d'ions au repos et d'électrons libres mobiles, on a :

$$\boxed{\vec{J} = -ne.\vec{v}} \quad (3.5)$$

On remarque ici que le vecteur densité de courant $\vec{J}$ est de sens contraire au sens du mouvement réel des électrons, c'est-à-dire que le sens du courant est le même que celui du vecteur $\vec{J}$.

Si $\vec{S}$ représente le vecteur surface de la section transversale du conducteur, et qui est colinéaire au vecteur $\vec{J}$, l'intensité du courant est donc la grandeur scalaire :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J}.d\vec{S}$$

$$I = \vec{J}.\vec{S} \Rightarrow \boxed{I = nqv.S} \quad (3.6)$$

On exprime l'unité de la densité de courant par **ampère par mètre carré** ($A.m^{-2}$).

Exemple 3.1 : La masse molaire du cuivre est $M = 63,54 \text{ g.mol}^{-1}$, et sa masse volumique $\rho = 8,8.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

- a/ Calculer le nombre d'électrons par unité de volume,
 b/ En admettant que chaque atome de cuivre libère deux électrons, et qu'un fil en cuivre de section 10 mm^2 est traversé par un courant d'intensité 30 A , calculer la densité de courant,
 c/ En déduire la vitesse de déplacement des électrons à l'intérieur du cristal de cuivre.

Réponse :

a/ Calcul du nombre d'atomes dans la matière cuivre :

$$\eta = \frac{N \cdot \rho}{M} \Rightarrow \eta = \frac{6,03.10^{23} \times 8,8.10^6}{63,54} \Rightarrow \boxed{\eta = 8,35.10^{28} \text{ (atomes)}}$$

b/ Calcul de la densité :

$$J = \frac{I}{S} \Rightarrow J = \frac{30}{10.10^{-6}} \Rightarrow \boxed{J = 3.10^6 \text{ A/m}^2}$$

c/ Déduction de la vitesse de déplacement des électrons libres :

$$J = nev \Rightarrow \boxed{v = \frac{J}{ne}} \Rightarrow v = \frac{3.10^6}{2 \times 8,35.10^{28} \times 1,66.10^{-19}} \Rightarrow \boxed{v = 108 \mu\text{m.s}^{-1}}$$

➤ **Relation entre le champ électrique et la densité de courant électrique:**

On considère une portion $AB = l$, d'un conducteur, traversé par un courant électrique d'intensité I . Le passage d'un courant électrique implique obligatoirement l'existence d'une différence de potentiel entre les points A et B .

Nous savons comment calculer la différence de potentiel appliquée entre deux points :

$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.7)$$

Si le conducteur est un fil de section S , le champ électrostatique est uniforme sur toute la portion AB .

Puisque $U = E.l$, On a :

$$U = R.I = E.l \Rightarrow RJS = E.l \quad (3.8)$$

Ainsi, on obtient une nouvelle expression de la densité de courant :

$$\boxed{J = \frac{l}{S.R} E} \quad (3.9)$$

$$\text{On pose} \quad \sigma = \frac{l}{S.R} = C^{te} \quad (3.10)$$

On appelle cette constante : **conductivité électrique** (الناقلية الكهربائية) du matériau conducteur, son unité est $(\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1})$.

La conductivité dépend des propriétés microscopiques de la matière conductrice, c'est une quantité locale utile qui permet de distinguer les propriétés électriques de la matière. Sur

cette base de conductivité, les matériaux sont classés en conducteurs, isolants et semi conducteurs.

L'inverse de la conductivité s'appelle **résistivité électrique** (المقاومية الكهربائية) du conducteur (ou résistance spécifique) :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{R.S}{l} \quad (3.11)$$

Son unité est l'**ohm.mètre** ($\Omega.m$).

Ainsi, l'expression de la résistance d'un conducteur peut s'écrire sous la forme :

$$R = \frac{l}{\sigma.S} = \rho \frac{l}{S} \quad (3.12)$$

Cette expression simple, qui relie la résistance d'un fil cylindrique à ses caractéristiques géométriques, est connue sous le nom de **loi de Pouillet**, de son auteur Claude Pouillet 1719-1868.

La représentation (figure 3.4) montre la classification générale des matériaux d'un point de vue électrique.

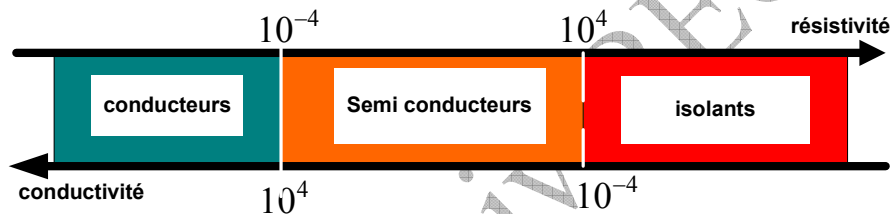


Fig 3.4 : ordre de grandeur de la conductivité et de la résistivité

Les résistivités de quelques corps sont regroupées dans le tableau suivant :

Métaux ($\Omega.m$)	semi conducteurs ($\Omega.m$) à 300K	Isolants ($\Omega.m$)
Argent : $1,47.10^{-8}$	silicium :2400	Verre : de 10^{11} à 10^{14}
cuivre: $1,72.10^{-8}$	germanium:0,5	Mica : de 10^{11} à 10^{15}
aluminium: $2,63.10^{-8}$		Eau : de 0,1 à 10^5

► **Remarque** : La résistivité d'un conducteur varie en fonction de la température. Pour les métaux, la résistivité augmente avec l'accroissement de la température (donc la résistance augmente). Tandis que pour les semi-conducteurs, c'est l'inverse qui se produit. Quelques alliages métalliques, ont une résistivité qui tend vers zéro lorsque la température avoisine le zéro absolu ; il s'agit alors de supraconducteurs.

Pour les métaux, la variation de leur résistivité est régie par la loi :

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \quad (3.13)$$

ρ : la résistivité à la température $T^\circ C$.

ρ_0 : la résistivité à la température de référence $T_0^\circ C$.

α : le coefficient calorifique de la résistance et qui vaut à peu près $\frac{1}{273}$.

La variation de la résistivité en fonction de la température implique la variation de la résistance suivant la loi :

$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

Le carbone fait exception à cette règle de la variation de la résistance en fonction de la température, ainsi que tous les liquides électrolysables : leurs résistances croissent avec l'abaissement de la température, et diminuent avec l'augmentation de la température. La résistance des alliages métalliques, tels que le manganine et le constantin, est presque invariable vis-à-vis de la température. C'est pour cette raison que le manganine est utilisé pour fabriquer des résistances d'étalonnage. La résistance des conducteurs s'annule au voisinage du zéro absolu et varie aussi en fonction de sa pureté.

▪ Relation entre $\vec{E}$, $\vec{J}$ et I :

Dans l'équation $\vec{J} = \frac{l}{S.R} \vec{E}$, on constate que $\vec{E}$ et $\vec{J}$ sont de même sens. Et puisque

I et $\vec{E}$ sont de même sens, le courant électrique circule dans le sens des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{J}$.

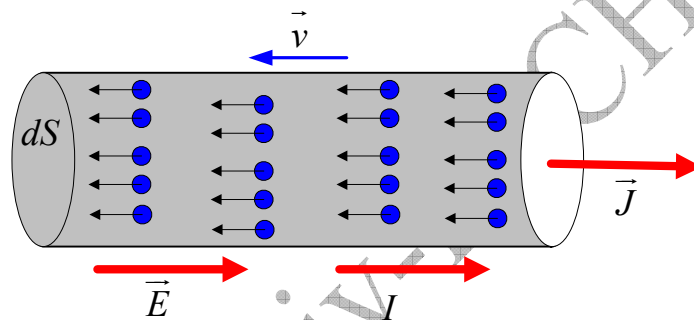


Fig 3 5 sens de $\vec{E}$, $\vec{J}$ et I

3/ Effet Joule : (James Prescott Joule 1818-1889) (فعل جول) :

D'après la définition du potentiel électrique, le travail dW effectué par la charge élémentaire dq se déplaçant entre les deux points entre lesquels règne une différence de potentiel électrique (ou tension) U est :

$$dW = U.dq$$

On définit, de façon générale (en électricité comme en mécanique), la puissance comme étant le travail effectué par unité de temps, soit :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Dans notre cas, nous avons :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{U.dq}{dt} = U.I$$

Donc, on peut écrire :

$$\boxed{P = U.I} \quad (3.14)$$

Cette relation traduit ce qui est connu sous le nom d' **effet joule** dans le cas général. L'unité de la puissance est le **watt** (W), en mémoire à James Watt 1736-1819.

Pour les dipôles soumis à la loi d'Ohm, le passage du courant électrique qui les parcourt provoque leur échauffement ou dégagement de chaleur : ce phénomène est aussi appelé effet

joule. En effet un dipôle passif transforme l'énergie électrique en énergie calorifique. La puissance dissipée par le dipôle est égale à :

$$P = RI^2 \quad (3.15)$$

On représente le conducteur ohmique par l'un des deux schémas de la figure 3.6.

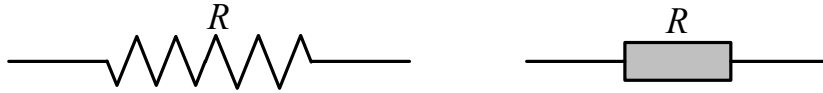


Fig 3 6 représentation de la résistance

La dissipation de la puissance sous forme d'énergie nous indique une ressemblance entre la résistance électrique et les forces de frottement mécanique. Tout frottement conduit à une perte d'énergie mécanique qu'on retrouve sous forme de chaleur (énergie calorifique), tandis que dans un conducteur ohmique (la résistance électrique), « le frottement » des électrons à l'intérieur de la matière, conduit de la même façon, à une dissipation d'énergie électrique sous forme de chaleur. C'est là qu'apparaît tout l'intérêt des supraconducteurs, c'est-à-dire les matériaux qui ont une résistance parfaitement nulle, et qui permettent la conduction du courant électrique sans perte d'énergie.

D'après la définition de l'énergie, on en déduit que, l'énergie E que produit une source, ou l'énergie consommée par une résistance pendant le temps t est égale à :

$$E = U.I.t = R.I^2.t = \frac{U^2}{R}.t \quad (3.16)$$

L'unité de l'énergie est le joule (J).

4/ Rappel sur le groupement des conducteurs ohmiques (تذكير بربط النواقل الأومية) :

On distingue deux cas pour le groupement de conducteurs ohmiques ou résistances :

a/ Groupement en série : Figure 3.7

Toutes les résistances R_i sont parcourues par le même courant électrique I , et chacune d'elles n'a qu'une extrémité commune avec un autre dipôle. La tension $U_{AB} = U$ est égale à la somme des tensions des dipôles (résistances).

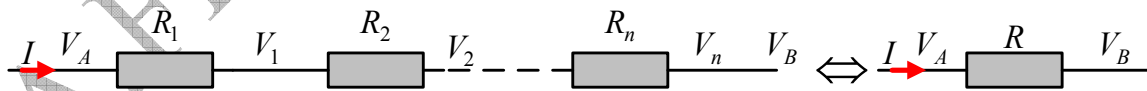


Fig 3 7 groupement de résistances en série

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = R.I$$

$$U = R_1.I + R_2.I + R_3.I + \dots + R_n.I = RI$$

Ainsi, on obtient la résistance équivalente de tous les dipôles passifs groupés en série :

$$R = \sum_{i=1}^n R_i \quad (3.17)$$

b/ Groupement en parallèle : Figure 3.8 (a)

Ce groupement est caractérisé par le fait que tous les dipôles ont leurs bornes communes deux à deux. La tension est la même entre les extrémités de n'importe quelle résistance R_i .

Le courant électrique qui alimente la portion de circuit se répartit entre les dipôle, tel que :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} \Rightarrow \frac{U}{R} = \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right] U$$

Ainsi, on obtient la résistance équivalente des dipôles passifs montés en parallèle ou en dérivation :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} \quad (3.18)$$

Remarque : La valeur de la résistance équivalente, dans ce cas, est toujours plus petite que celle de la plus petite des résistances montées en dérivation.

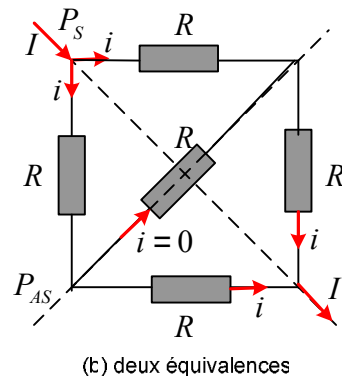
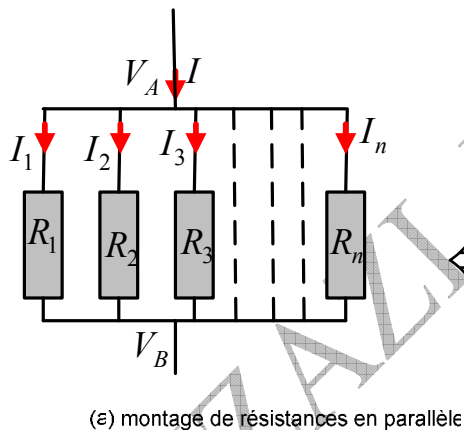


Fig 3 8

c/ Des équivalences utiles (تكافؤات مفيدة) : En voici quelques règles intéressantes :

- Si pour un conducteurs ohmique ou résistance, et dans tous les cas $i = 0$ (ou $\mu = 0$), il est alors possible de le remplacer par un fil de jonction ou de l'éliminer du circuit.
- Si deux points sont au même potentiel, on peut les relier par un fil de jonction.
- Si un courant électrique nul circule dans un fil de jonction, on peut éliminer ce dernier.

d/ Deux symétries (تناظران) : Figure 3.8 (b)

Dans certains cas, l'utilisation de la symétrie devient très utile et nous évite beaucoup de calculs.

Par convention : soient :

P : plan physique de symétrie du réseau. Du point de vue physique le plan P peut être de deux types :

P_S : Plan de symétrie des courants et des tensions.

P_{AS} : Plan antisymétrique des courants et des tensions (En considérant que le potentiel est nul sur le plan).

Une branche située sur P_{AS} est parcourue par un courant nul.

Afin d'éclaircir ces règles, on considère comme exemple, le circuit de la figure 3.8 (b). Toutes les résistances sont équivalentes, il en résulte un nombre d'équivalences P_S ou P_{AS} .

Le courant I entrant se divise en deux courants semblables i : en effet il n'existe aucune raison pour que les porteurs de charges s'écoulent en nombre plus grand dans un sens plutôt que dans l'autre. La même chose se produit à la sortie de I .

Quand on applique la loi des nœuds, la résistance centrale est parcourue par un courant nul, et ce quelque soit le courant I ou la tension U imposés à la portion du circuit.

D'après les règles d'équivalence que nous venons de voir, il nous est permis d'éliminer cette résistance centrale (sans éliminer, pour autant, la branche). La résistance équivalente deviendrait, tout simplement, égale à $R_{eq} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$.

B/ Eléments d'un circuit électrique (عناصر الدارة الكهربائية) :

Toutes les applications en électricité exploitent la facilité avec laquelle s'effectue la transformation de l'énergie électrique à partir d'une source électrique vers un appareil quelconque (fer à repasser, lampe, téléviseur,...). Cette transformation se fait par l'intermédiaire d'un **circuit électrique** qui relie la source à l'appareil, et permet le déplacement des électrons.

Il existe une variété de sources électriques, telles que : les piles, les batteries, les cellules solaires, les générateurs... Dans tous ces cas, chaque source a deux pôles au moins entre lesquelles règne une différence de potentiel.

1/ Eléments et vocabulaire du circuit électrique (عناصر و مصطلحات الدارة الكهربائية) :

Le circuit électrique est composé d'un groupement d'éléments, appelés dipôles, reliés entre eux par des fils conducteurs ; le tout constitue une structure fermée. Nous citons ci après quelques éléments et le vocabulaire propres au circuit.

- **Le nœud** (العقدة) : c'est un point d'un circuit où arrivent trois fils au moins, ou plus.
- **La branche** (الفرع) : c'est une portion de circuit qui s'intercale entre deux nœuds.
- **La maille** (العروة) : c'est un ensemble de branches qui constituent une boucle fermée.
- **Le dipôle** (ثنائي القطب) : un dipôle s'intercale dans un circuit à l'aide de deux pôles, le courant entrant par l'un d'eux, et sortant par l'autre. Un dipôle est caractérisé par sa réponse à une différence de potentiel, c'est-à-dire par une courbe caractéristique $U = f(I)$.
- **Le dipôle passif** (ثنائي القطب الخامل) : c'est un dipôle qui consomme l'énergie électrique.
- **Le dipôle actif** (ثنائي القطب النشط) : c'est un dipôle qui produit du courant électrique.

- **Le dipôle linéaire** (ثنائي القطب الخطي) : sa courbe caractéristique $U = f(I)$ est une droite.
- **Les fils de jonction** (أسلاك التوصيل) : on néglige leurs résistances par rapport aux résistances des autres dipôles. On les considère comme étant équipotentiels.
- **Le réseau** (الشبكة) : c'est un ensemble de circuits.

Convention : Dans l'étude pratique des dipôles, on utilise deux conventions :

- **La convention récepteur** (مصطلح الأخذة) : la tension et l'intensité électriques sont orientées positivement et dans deux sens opposés. Figure 3.9 (a).
- **La convention générateur** (مصطلح المولد) : la tension et l'intensité électriques sont orientées positivement et dans le même sens. Figure 3.9 (b).

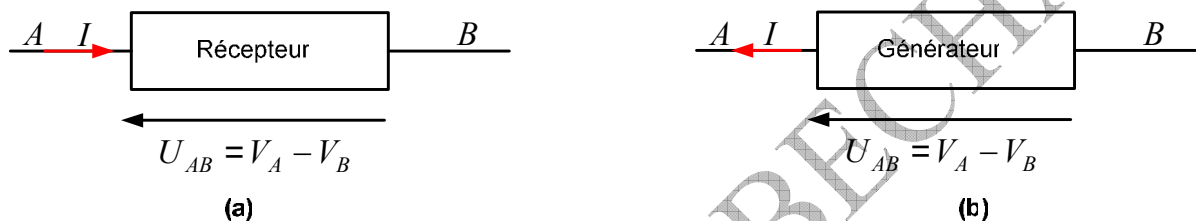


Fig 3 9 conventions récepteur et générateur

2/ Nécessité de la disponibilité d'une force électromotrice (ضرورة توفر قوة محركة كهربائية):

Le générateur doit fournir un travail électrique aux charges pour qu'elles puissent le traverser en allant du pôle à potentiel inférieur au pôle à potentiel élevé. Le travail du générateur est semblable à celui d'une pompe hydraulique qui, remonte l'eau d'un niveau inférieur à un niveau supérieur. Il est aisé de comprendre le phénomène du courant électrique en le comparant au courant d'eau dans un fleuve.

L'eau court dans une région élevée vers une région inférieure, grâce à la force d'attraction (le poids). Mais, si on veut créer un circuit hydraulique fermé, il est indispensable de fournir une énergie, d'où l'utilisation d'une pompe pour ramener l'eau à une plus haute altitude.

On peut définir la force électromotrice d'une source électrique comme étant un travail fourni à l'unité de charge pour la transporter à travers un circuit fermé. Si dW est le travail fourni pour déplacer une charge de valeur dq à travers le circuit, en un temps bref dt , la force électromotrice e est donc :

$$e = \frac{dW}{dq}$$

Et puisque la puissance est le travail fourni par unité de temps :

$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow P = e \cdot \frac{dq}{dt}$$

D'où l'expression de la puissance :

$$\boxed{P = e \cdot I} \quad (3.19)$$

On sait, d'autre part que : $U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = e$

Dans le cas d'un circuit fermé : la puissance totale fournie entre A et A de la part de la force de Coulomb est égale à :

$$P = U \cdot I = I \int_A^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = I(V_A - V_A) = 0$$

On vient d'obtenir une puissance nulle. Cela veut dire que le champ électrostatique ne garantit pas la permanence du courant électrique dans un circuit fermé.

Lorsqu'un courant électrique parcourt un circuit fermé, cela indique que la force de Coulomb n'est pas responsable du mouvement collectif des porteurs de charge dans le conducteur.

C'est ce qui se produit exactement dans un circuit électrique, où c'est une force, autre que la force électrostatique, qui doit permettre aux porteurs de charge de remonter le potentiel et le vaincre.

Pour obtenir un courant électrique continu, dans un circuit fermé, il est indispensable d'alimenter le circuit en énergie.

Les appareils qui produisent cette énergie s'appellent **générateurs** électriques, on peut dire que se sont des sources de force électromotrice.

Il existe plusieurs méthodes pour la production d'une force électromotrice :

- La batterie transforme l'énergie chimique en énergie électrique,
- Un moteur électrostatique transforme l'énergie mécanique en énergie électrique,
- Le moteur électrique transforme l'énergie mécanique en énergie électrique,
- La cellule solaire transforme l'énergie de radiation en énergie électrique,
- Une centrale nucléaire transforme l'énergie nucléaire en énergie électrique.

3/ Les deux types de générateurs (نوعا المولدات):

a/ Générateurs ou sources de tension (مولدات أو منابع التوتر) :

La source de tension, ou générateur de tension, est un dipôle caractérisé par une tension constante entre ses bornes, quelque soit l'intensité variable qu'il débite. Dans tout ce qui suit, nous allons nous intéresser particulièrement aux générateurs de tension continue. Ce type de générateur est caractérisé par une force électromotrice (e), et une faible résistance intérieure (r). La figure 3.10 représente le schéma de ce type de générateurs.

Il est possible de remplacer un générateur de tension, dont les caractéristiques sont (e, r), par une source idéale, de force électromotrice e , montée en série avec le conducteur ohmique, de résistance, comme indiqué sur la figure 3.10.

La force électromotrice d'un générateur de tension est égale à la différence de potentiel entre ses bornes quand il ne débite aucun courant :

$$I = 0 \Leftrightarrow e = U_{AB} \quad (3.20)$$

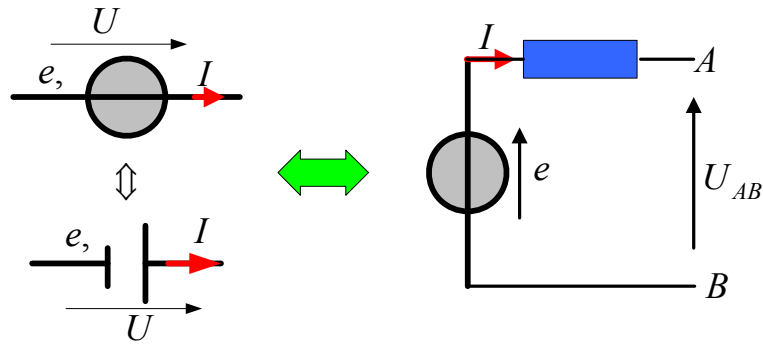


Fig 3 10 représentation du générateur de tension

b/ Générateurs ou sources de courant (مولدات أو منابع التيار) :

La source de courant, ou générateur de courant, est un dipôle caractérisé par le débit d'un courant constant, quelque soit la différence de potentiel variable entre ses bornes. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser essentiellement aux générateurs de courant continu. On peut réaliser ce type de sources à l'aide de systèmes électroniques, la tension entre les bornes de chacune d'elles étant limitée par une valeur maximale. On représente ce type de générateurs par le schéma de la figure 3.11.

On peut remplacer un générateur de courant par une source de courant idéale, qui débite un courant constant, et montée en parallèle avec un conducteur ohmique, de résistance, comme indiqué sur la figure 3.11.

$$I = I_0 - \frac{u}{r} \quad (3.21)$$

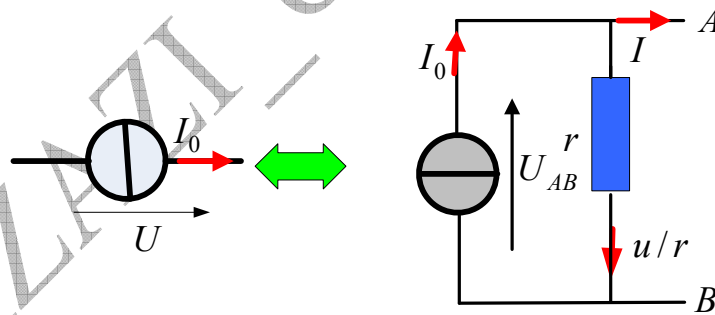


Fig 3 11 représentation du générateur de courant

B/ Les lois régissant les circuits électriques (القوانين المسيرة للدارات الكهربائية).

1/ Equation du circuit électrique (معادلة الدارة الكهربائية) :

Soit le circuit représenté sur la figure 3.12, composé d'un générateur (de force électromotrice e et de résistance interne r), d'une résistance externe R , et d'un moteur M (de force contre électromotrice e' et de résistance interne r').

Le générateur produit une puissance électrique : $P = e.I$

Le conducteur Ohmique (R) transforme l'énergie électrique en énergie calorifique, dont la valeur est RI^2 . La résistance interne du générateur consomme à son tour une

puissance de valeur rI^2 (C'est ce qui explique l'échauffement du générateur). Le moteur M (ou un récepteur ou même un générateur monté en opposition, à condition que $e' < e$), consomme, quant à lui, une puissance $e'I$, qu'il la transforme en énergie mécanique, sa résistance interne consomme une puissance égale à $r'I^2$ (à cause de la présence d'un conducteur ohmique à l'intérieur du moteur, d'où son échauffement).

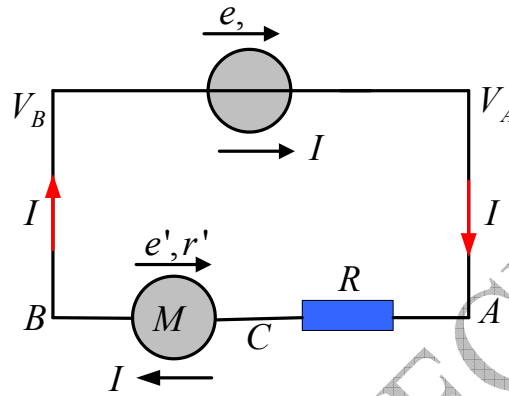


Fig 3.12 : circuit fermé

D'après le principe de la conservation de l'énergie : l'énergie produite est égale à l'énergie consommée :

$$eI = e'I + RI^2 + rI^2 + r'I^2$$

D'où, l'intensité du courant qui parcourt le circuit :

$$I = \frac{e - e'}{R + r + r'}$$

Dans le **cas général**, si on note par les résistances internes et par R les résistances externes, on a :

$$I = \frac{\sum e}{\sum r + \sum R} \quad (3.22)$$

L'intensité du courant électrique dans le circuit électrique est égale à la somme algébrique des forces électromotrices divisée par la somme de toutes les résistances. Cette relation est appelée : **équation du circuit électrique**.

Convention : Quand on applique la relation (3.22), on doit choisir un sens autour du circuit que l'on considère positif ; les courants électriques et les forces électromotrices sont comptés positivement s'ils ont le même sens que le sens choisi, et ils sont comptés négativement dans le cas contraire.

2/ Différence de potentiel entre deux points d'un circuit (ou loi généralisée d'Ohm) (فرق الكمون بين نقطتين من دائرة) :

La figure 3.13 représente une portion de circuit électrique parcourue par un courant d'intensité I , que débite une source (non représentée sur la figure), et qui approvisionne cette

portion AB d'une puissance $P = UI$, où U représente la différence de potentiel entre les points A et B .

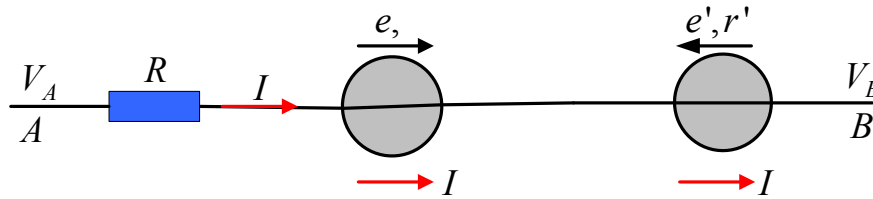


Fig 3 13 différence de potentiel entre deux points

$R = \sum R_i$: désigne la **résistance totale** de la portion AB (conducteurs ohmiques, fils de jonction, les résistances internes des générateurs et récepteurs...etc).

$e = \sum e_i$: désigne la **somme algébrique** de toutes les forces électromotrices (y compris les forces contre électromotrices).

La puissance produite entre les points A et B est égale à :

$$UI + \left(\sum e_i \right) I$$

Dans les résistances la puissance consommée est :

$$\left(\sum R_i \right) I^2$$

Si on égalise les deux puissances produite et consommée, selon le principe de la conservation de l'énergie, on aura :

$$UI + \left(\sum e_i \right) I = \left(\sum R_i \right) I^2$$

Finalement, on obtient la loi qu'on appelle : **loi d'Ohm généralisée** :

$$\boxed{V_A - V_B = U = \left(\sum R_i \right) I - \sum e_i} \quad (3.23)$$

Convention : Si on choisit le sens de A vers B comme étant positif, et si les courants et les forces électromotrices sont de même sens, leurs signes seront positifs, par contre s'ils sont de sens contraires, leurs signes sont négatifs.

Si le point A coïncide avec le point B , alors :

$$\left(\sum R \right) I - \sum e = 0 \quad (3.24)$$

➤ La différence de potentiel aux bornes d'un générateur de tension

(فرق الكمون بين طرفي مولد التوتر)

La figure 3.14 représente un générateur de tension avec deux possibilités :

a/ Le sens du courant est le même que celui de la force électromotrice, c'est-à-dire que le courant sort par le pôle positif du générateur.

b/ Le sens du courant est contraire à celui de la force électromotrice, c'est-à-dire que le courant sort par le pôle négatif du générateur.

On applique à la portion du circuit la relation générale $U_{AB} = \sum R_i I - \sum e_i$, et on choisit le sens positif de A vers B .

Sur la figure 3.14 (a) : e et I sont de sens contraires au sens positif choisi, ils sont donc négatifs, d'où :

$$U_{AB} = \sum R_i I - \sum e_i = -rI - (-e)$$

$$\boxed{U_{AB} = e - rI} \quad (3.25)$$

Cette dernière expression est la différence de potentiel entre les bornes d'un générateur.

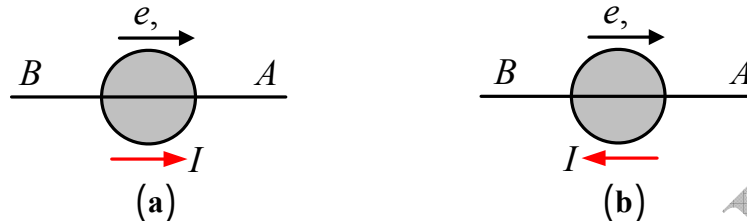


Fig 3.14 : différence de potentiel entre les bornes d'un générateur

Sur la figure 3.14 (b) : e s'oppose au sens positif choisi, donc elle est négative ; tandis que I concorde avec le sens positif choisi, donc il est positif :

$$U_{AB} = \sum R_i I - \sum e_i = rI - (-e)$$

$$\boxed{U_{AB} = rI + e} \quad (3.26)$$

Cette expression 3.26 correspond aussi à la différence de potentiel entre les bornes d'un récepteur, où e est sa force contre électromotrice (appelée souvent force électromotrice). Ceci n'est pas étonnant, puisqu'un générateur dont le courant entre par son pôle positif se comporte comme récepteur.

3/ Groupement de générateurs (ربط المولدات) :

Un circuit électrique peut grouper plus d'un générateur.

a/ Cas des générateurs de tension : Chaque générateur est caractérisé par une force électromotrice e_i et une résistance interne r_i .

■ Association en série : Figure 3.15

Dans ce cas, la force électromotrice du générateur équivalent est égale à la somme algébrique des forces électromotrices des générateurs associés, et sa résistance interne est égale à la somme arithmétique de toutes les résistances internes.

$$\boxed{r = \sum_i r_i} \quad \boxed{e = \sum_i e_i} \quad (3.27)$$

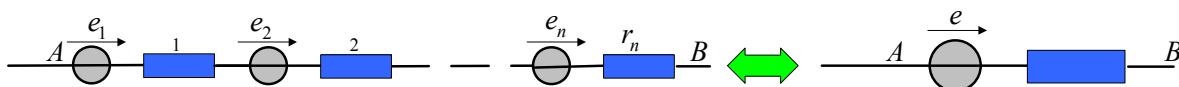


Fig 3 15 groupement de générateurs de tension en série

▪ Association en opposition : Figure 3.16

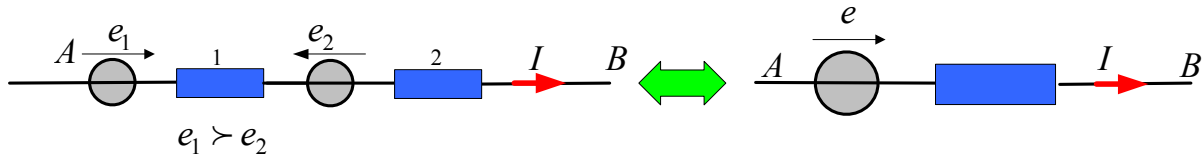


Fig 3.16 : groupement de générateurs de tension en opposition

On considère le récepteur (un moteur par exemple), comme étant un générateur monté en opposition avec le générateur effectif, et le générateur monté en opposition jouant le rôle de récepteur (ou moteur). Le générateur de plus grande force électromotrice s'impose en tant que générateur. D'où :

$$e_1 > e_2 \Rightarrow e = e_1 - e_2 \quad (3.28)$$

$$r = r_1 + r_2 \quad (3.29)$$

▪ Association en série : Figure 3.17

Il est interdit de monter en dérivation deux générateurs de différentes tensions. Les sources de tensions montées en parallèle doivent obligatoirement être toutes semblables.

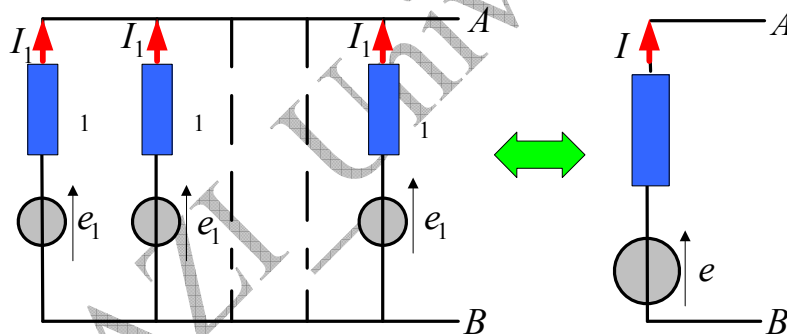


Fig 3.17 : groupement de générateurs de tension en dérivation

Dans ce cas, la force électromotrice du générateur équivalent est égale à la force électromotrice d'un générateur du groupement, et l'inverse de la résistance équivalente est égal à la somme des inverses des résistances internes.

$$I = nI_1 ; e = e_1 ; \frac{1}{r} = \sum_i \frac{1}{r_i} = \frac{n}{r_1} \quad (3.30)$$

a/ Cas des générateurs de courant :

▪ Groupement en parallèle : Figure 3.18

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}} ; \boxed{I = I_1 + I_2 + \dots + I_n} \quad (3.31)$$

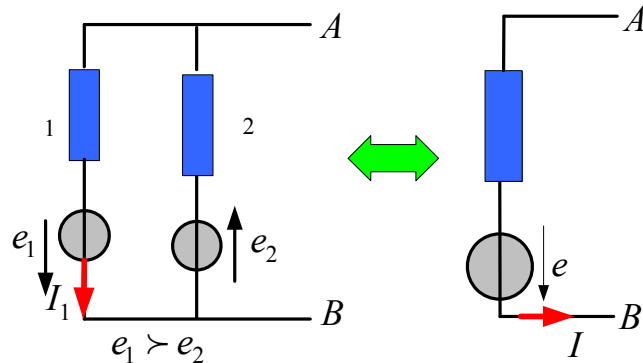


Fig 3 18 groupement de générateurs de courant en parallèle

▪ **Association en série** : Figure 3.19

Il est interdit de monter en série des sources de courant débitant des intensités de courants différentes. Les générateurs de courant montés en parallèle doivent obligatoirement être tous semblables.

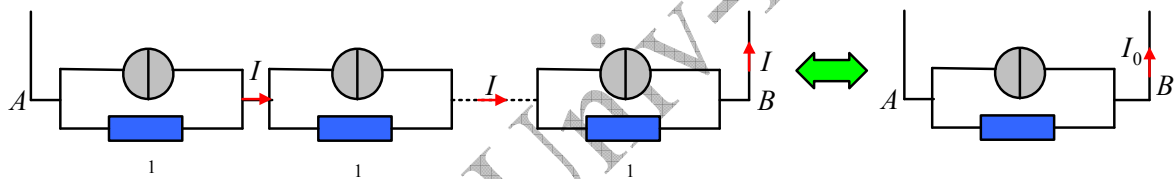


Fig 3 19 groupement de générateurs de courant en série

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}} ; \boxed{I_0 = I} ; \boxed{V_A - V_B = V_1 + V_2 + \dots + V_n} \quad (3.32)$$

Afin d'éclaircir la méthode d'application de toutes ces règles, nous allons aborder dans ce qui suit quelques exemples d'application.

Exemple 3.2 : Considérons le circuit représenté sur la figure 3.20.

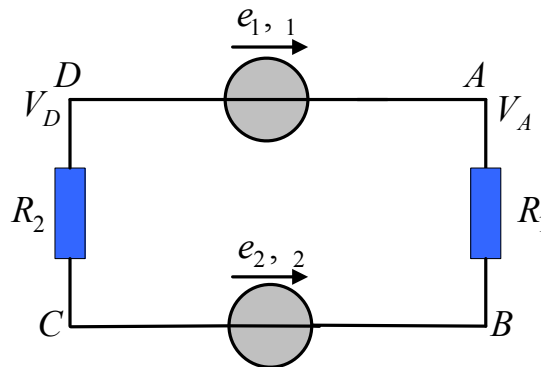


Fig 3 20

Avec les valeurs suivantes :

$$e_1 = 12V, \quad r_1 = 0,2\Omega, \quad e_2 = 6V, \quad r_2 = 0,1\Omega, \quad R_1 = 1,4\Omega, \quad R_2 = 2,3\Omega$$

Trouver :

1/ Le sens et l'intensité du courant dans le circuit électrique,

2/ La différence de potentiel entre les points A et C .

Réponse :

1/ Puisque $e_1 > e_2$, on en déduit que le sens du courant est celui des aiguilles d'une montre.

Puisque le deuxième générateur est monté en opposition avec le premier générateur, sa force électromotrice est négative. On calcule l'intensité en utilisant la relation : $I = \frac{\sum e}{\sum R}$

$$I = \frac{12 - 6}{0,1 + 0,2 + 1,4 + 2,3} \Rightarrow \boxed{I = 1,5A}$$

2/ Pour trouver la différence de potentiel entre les points A et C , on utilise la relation :

$$V_A - V_C = U_{AC} = (\sum R_i)I - \sum e_i$$

Pour ce faire, on choisit l'un des chemins ABC ou ADC :

Suivant le trajet ABC :

$$V_A - V_C = U_{AC} = \underbrace{(0,1 + 1,4) \times 1,5}_{\sum R_i I} - \underbrace{(-6)}_{\sum e_i} \Rightarrow \boxed{U_{AC} = 8,25V}$$

Suivant le trajet ADC :

$$V_A - V_C = U_{AC} = \underbrace{(0,2 + 2,3) \times -1,5}_{\sum R_i I} - \underbrace{(-12)}_{\sum e_i} \Rightarrow \boxed{U_{AC} = 8,25V}$$

Exemple 3.3 :

Tous les circuits électriques utilisés dans notre vie quotidienne, comme par exemple les circuits électroniques, ont un ou plusieurs points reliés à la terre, donc de potentiel zéro. La terre est un gigantesque corps conducteurs dont le potentiel n'est pas influencé par sa jonction avec d'autres conducteurs usuels chargés. C'est pour cette raison que le potentiel de la terre est toujours pris égal à zéro. Le potentiel de tout autre point dans le circuit est évalué par rapport à ces points que l'on considère comme référence de potentiel.

Dans le circuit montré sur la figure 3.21, le point B est relié à la terre. On demande de calculer le potentiel aux points A et C .

Application numérique : $e = 10V$, $r = 1\Omega$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 1\Omega$

Réponse :

On calcule d'abord l'intensité en utilisant la formule : $I = \frac{\sum e}{\sum R}$

$$I = \frac{10}{5} \Rightarrow \boxed{I = 2A}$$

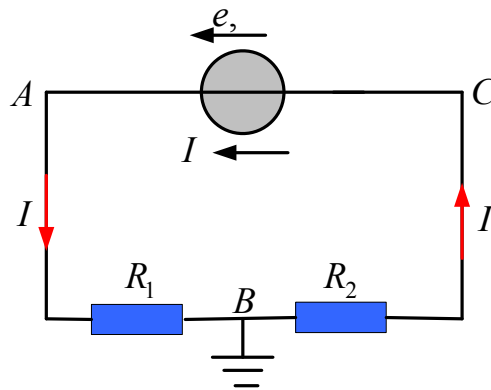


Fig 3 21

Calcul de V_{AB} et V_{BC} :

$$V_{AB} = R_1 \cdot I \Rightarrow V_{AB} = 3 \cdot 2 = 6V$$

$$V_{BC} = R_2 \cdot I \Rightarrow V_{BC} = 1 \cdot 2 = 2V$$

Et puisque $V_B = 0$, on a :

$$V_{BC} = V_B - V_C = 2 \Rightarrow \boxed{V_C = -2V} \text{ et } V_{AB} = V_A - V_B = 6 \Rightarrow \boxed{V_A = 6V}$$

On peut s'assurer de ce résultat en calculant la différence de potentiel entre les bornes du générateur en allant de A vers C à travers le générateur :

$$V_A - V_C = U_{AC} = r \cdot I - \sum e_i \Rightarrow V_A - V_C = 1 \cdot (-2) - (-10) \Rightarrow \boxed{V_A - V_C = 8V}$$

4/ Les lois de Kirchhoff:

a/ Conservation de la charge ou loi des nœuds (قانون العقد)

En un nœud d'un circuit, la somme des intensités entrant est égale à la somme des intensités sortant :

$$\boxed{\sum I_s = \sum I_e} \quad (3.33)$$

Cela signifie que les charges ne s'accumulent pas, elles s'écoulent en un nœud du réseau, elles obéissent à la règle de la conservation de la charge.

b/ Conservation de l'énergie ou loi des mailles (قانون العروات)

En une maille k d'un circuit électrique, la somme algébrique des produits de résistance par l'intensité du courant ($\sum_{k=1}^n R_k \cdot I_k$) est égale à la somme algébrique des

forces électromotrices ($\sum_{k=1}^n e_k$).

$$\boxed{\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n R_k \cdot I_k} \quad (3.34)$$

Cette règle est une traduction de la loi de conservation de l'énergie, elle est en accord avec la relation 3.24.

➤ **Conseil utile** : Lorsqu'on applique les lois de Kirchhoff, il est conseillé d'observer les règles suivantes :

- Quand on applique la première loi, veiller à ce que la somme des courants entrant soit égale à la somme des courants sortant.

- Quand on applique la deuxième loi, on doit choisir un sens positif autour de la maille : toutes les forces électromotrices et les courants qui ont ce même sens seront comptés positivement, ceux qui sont de sens contraires seront comptés négativement. On considère le sens de e positif quand on entre, d'après le sens positif choisi, par le pôle négatif et qu'on sort par le pôle positif, et l'inverse dans le cas contraire.

Dans le cas des réseaux complexes, il est difficile de connaître le nombre d'équations indépendantes, pour en déduire toutes les inconnues. A cette fin, il est conseillé d'utiliser les deux règles suivantes :

- Si le nombre de nœuds dans le réseau électrique est m , la loi des nœuds s'applique à $m - 1$ nœuds. Le choix des nœuds se fait en toute liberté.

- Séparer le réseau en ses composantes de mailles indépendantes (une maille est dite indépendante si elle a au moins une branche non commune avec une autre maille), considérer chaque maille comme étant seule et lui appliquer la deuxième loi de Kirchhoff

Nous allons montrer comment appliquer ces règles et lois dans les exemples suivants :

Exemple 3.4 :

La figure 3.22 (a) représente un circuit électrique fermé. On se propose d'appliquer les deux lois de Kirchhoff en écrivant toutes les équations correspondantes. Les résistances internes des générateurs et du moteur sont négligeables.

Réponse :

Application de la première loi : Il y a quatre nœuds auxquels correspondent quatre équations :

$$\text{Au nœud } A : I_1 = I_2 + I_3$$

$$\text{Au nœud } B : I_1 = I_5 + I_6$$

$$\text{Au nœud } C : I_2 = I_5 + I_4$$

$$\text{Au nœud } D : I_6 = I_4 + I_3$$

Application de la deuxième loi : Il y a trois mailles indépendantes. Après le choix des sens comme indiqué sur la figure 3.23 (b), on peut écrire les différentes équations :

$$\text{Mailles 1 : } e_1 - e_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_5 I_5$$

$$\text{Mailles 2 : } e_2 = R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_2 I_2$$

$$\text{Mailles 3 : } -e_6 = R_6 I_6 + R_4 I_4 - R_5 I_5$$

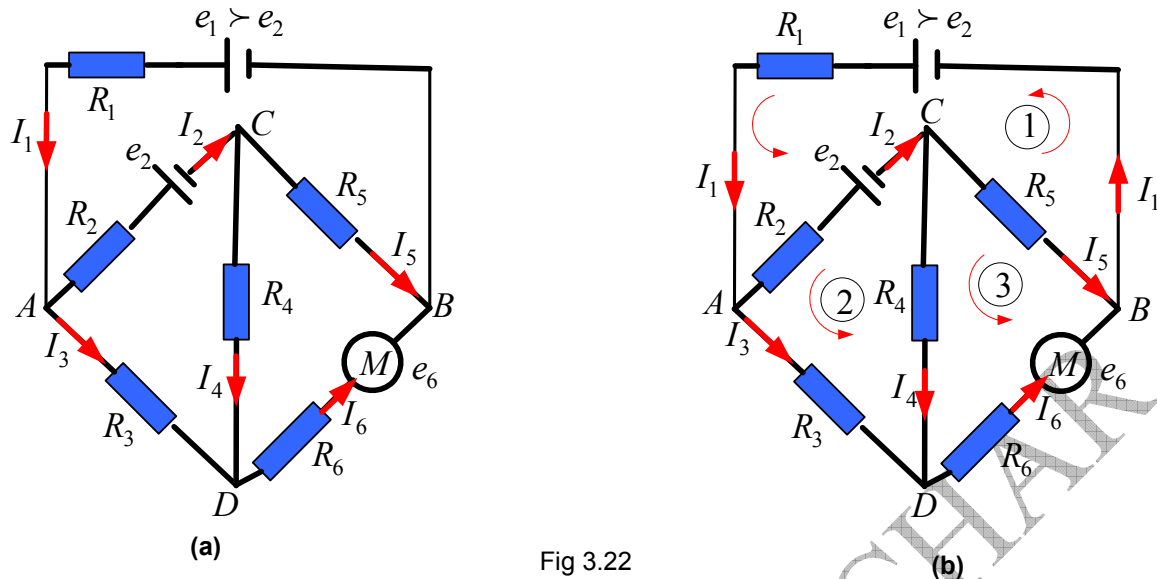


Fig 3.22

Remarque : Les mailles $(e_1 \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow e_1)$ et $(A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A)$ ne présentent aucun intérêt puisqu'elles ne sont pas indépendantes.

5/ Le théorème de Thévenin:

Enoncé : Tout réseau linéaire intercalé entre deux bornes A et B , quelque soit sa complexité, est équivalent à un générateur unique de force électromotrice (E_{Th}) et de résistance interne (R_{Th}) . (Figure 3.23).

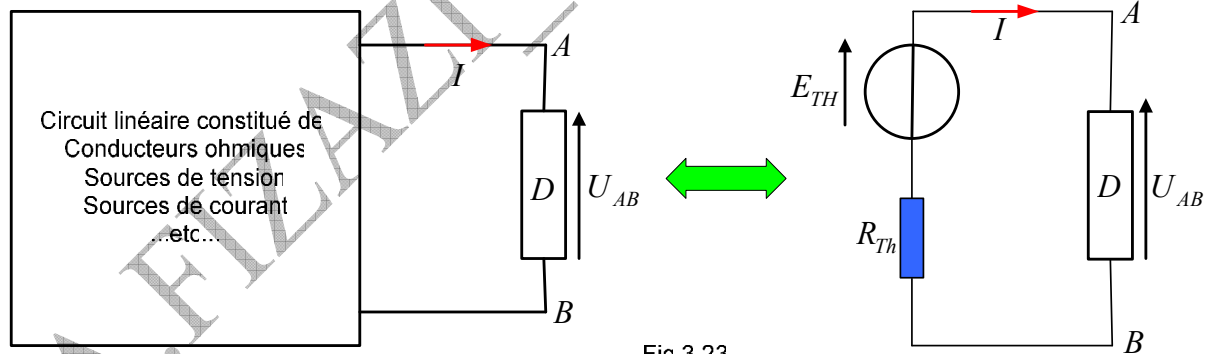


Fig 3 23

Avec :

$U_{AB_0} = E_{Th}$: représente la force électromotrice du générateur équivalent (qu'on appelle générateur Thévenin), elle est égale à la différence de potentiel entre les bornes A et B quand le circuit est ouvert, c'est-à-dire quand la jonction entre A et B est coupée.

$R_{Th} = R_{eq}$: représente la résistance équivalente du circuit quand on l'observe à partir des bornes A et B (la jonction entre A et B étant coupée), et en éteignant toutes les sources de tension et de courant électriques.

Comment calculer les caractéristiques du générateur Thévenin ?

- **Calcul de E_{Th} :** On ouvre le circuit entre A et B en éliminant le dipôle D , puis on calcule $U_{AB_0} = E_{Th}$ comme indiqué sur la figure 3.24.

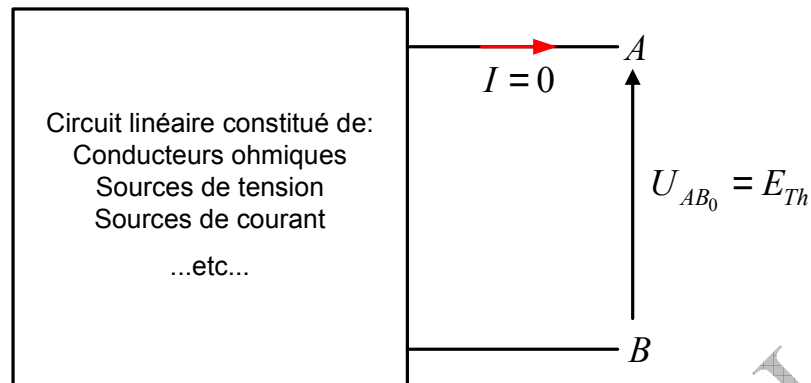


Fig 3.24

- **Calcul de R_{Th} :** On élimine le dipôle D , on éteint toutes les sources de tension et de courant, on dessine une nouvelle figure du nouveau circuit qui ne contient que des résistances, et puis on calcule la résistance équivalente de tout le circuit situé entre A et B .
- Si le dipôle D est une résistance R , l'intensité du courant qui parcourt le dipôle est donc égale à :

$$I = \frac{E_{Th}}{R + R_{Th}}$$

Remarque : La branche AB peut contenir plus d'un dipôle.

Dans l'exemple suivant, nous allons montrer comment appliquer le théorème de Thévenin.

Exemple 3.5 :

Soit le circuit de la figure 3.25.

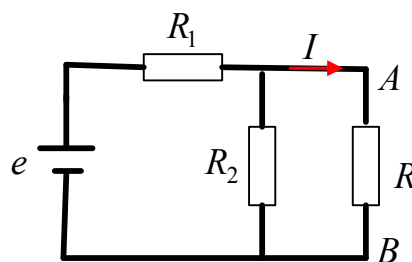


Fig 3 25

On se propose de trouver R_{Th} , E_{Th} , puis déduire l'intensité I du courant électrique qui alimente la résistance R , ainsi que la différence de potentiel entre ses bornes.

Réponse :

On éteint les sources de tension, puis on calcule la résistance équivalente R_{Th} , en éliminant la branche AB (figure 3.26).

R_1 et R_2 sont montés en parallèles, donc :

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

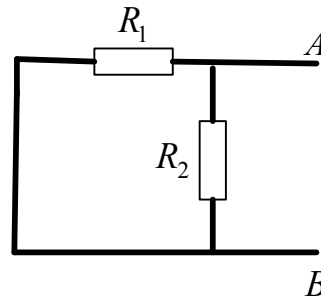


Fig 3.26

Pour calculer E_{Th} , on considère le circuit ouvert, et on élimine la résistance entre A et B (figure 3.27).

$$\left. \begin{array}{l} E_{Th} = U_{AB_0} = V_A - V_B = e - R_1 \cdot I_1 \\ V_A - V_B = R_2 \cdot I_1 \end{array} \right\} \Rightarrow E_{Th} = U_{AB_0} = R_2 \frac{e}{R_1 + R_2}$$

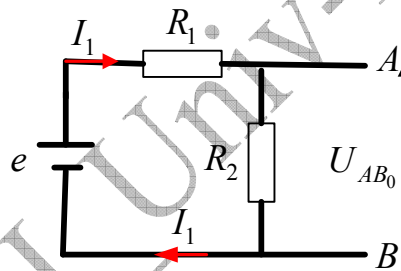


Fig 3.27

Pour calculer l'intensité I du courant, on considère le générateur de Thévenin équivalent qui alimente la branche AB (figure 3.28).

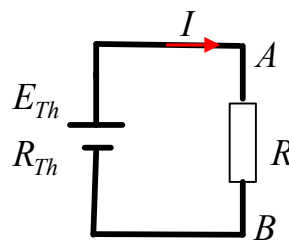


Fig 3.28

$$U_{AB} = RI = E_{Th} - R_{Th}I \Rightarrow I = \frac{E_{Th}}{R + R_{Th}}$$

En remplaçant E_{Th} et R_{Th} par leur valeurs respectives, on trouve l'expression de l'intensité :

$$I = \frac{R_2 \cdot e}{R_1 R_2 + R R_1 + R R_2}$$

Détermination de la différence de potentiel entre les points A et B :

$$U_{AB} = RI \Rightarrow U_{AB} = \frac{R R_2}{R_1 R_2 + R R_1 + R R_2} e$$

Exemple 3.6 :

Montrer littéralement et numériquement qu'on peut convertir un générateur de courant en générateur de tension

Réponse :

La figure 3.29, montre deux montages équivalents, c'est-à-dire que l'intensité du courant produit par chacun des circuits est la même, et la tension entre les bornes de chacun des deux circuits est aussi la même. Le résultat est qu'on peut convertir un générateur de courant en un générateur de tension.

De la figure (a), on peut déduire : $I = I_0 - \frac{U}{r} \rightarrow (1)$

De la figure (b), on peut déduire : $U = V_A - V_B = e - r' I \Rightarrow I = \frac{e}{r'} - \frac{U}{r'} \rightarrow (2)$

Par identification des deux équations (1) et (2), on trouve les deux caractéristiques du générateur de tension en fonction des deux caractéristiques du générateur de courant :

$$r' = r, \quad r' = 2\Omega$$

$$e = r I_0, \quad e = 2 \times 15 = 30V$$

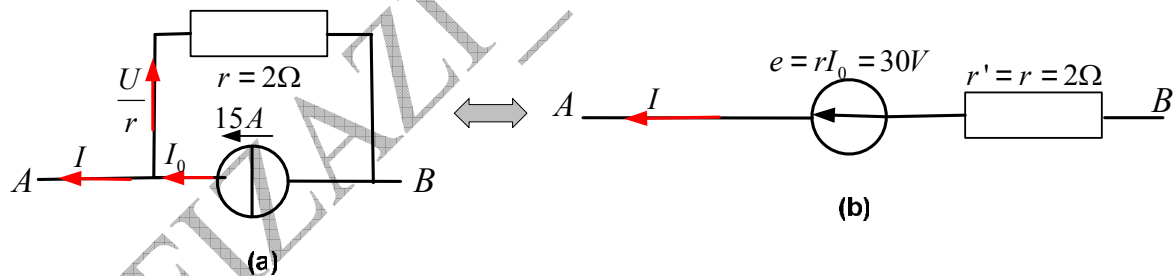


Fig 3 29 Conversion d'un générateur de courant en générateur de tension

EXERCICES

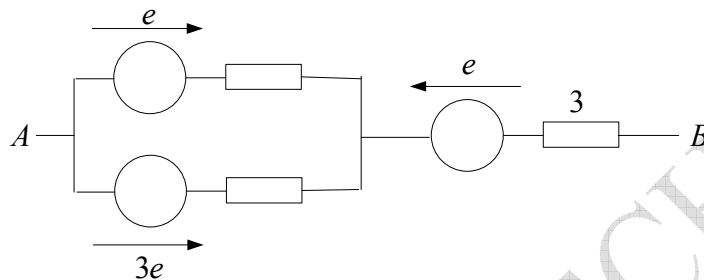
**

تمارين**Exercice 3.1**

Déterminer les paramètres du dipôle équivalent au groupement de générateurs entre les points A et B .
Préciser le sens du courant.

التمرين 1.3

عين مميزتي ثنائي القطب المكافئ لمجموع المولدات بين النقطتين A و B .
وضح اتجاه التيار.

**Exercice 3.2**

Deux résistances R_1 et R_2 sont montées en parallèle avec un générateur idéal dont la tension entre ses bornes est U .

Montrer que les intensités du courant qui traversent ces résistances sont respectivement :

$$I_1 = I \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \text{ et } I_2 = I \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

التمرين 2.3

مقاومتان R_1 و R_2 مركبتان على التوازي مع مولد مثالي حيث التوتر بين قطبيه هو U .

بين أن شدتي التيار اللتين تجتازان هاتين المقاومتين هما على التوالي:

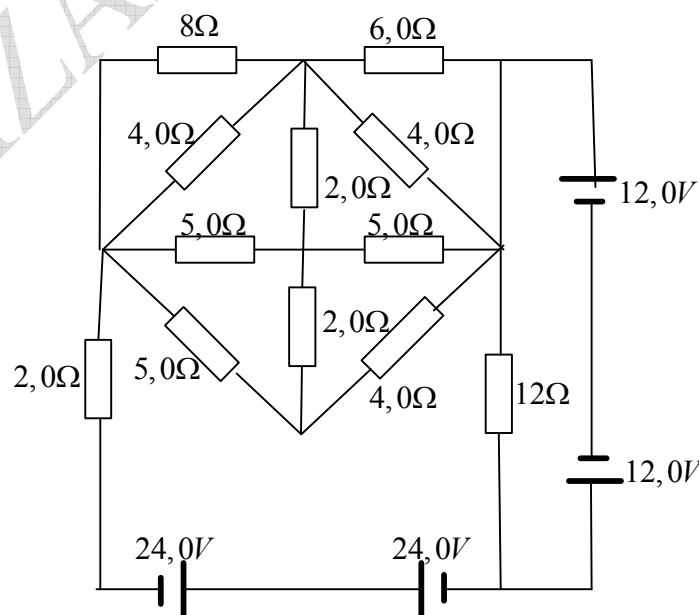
$$I_2 = I \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \text{ و } I_1 = I \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Exercice 3.3

Quelle intensité traverse la résistance de 8Ω dans la figure ci-dessous.

التمرين 3.3

ما هي الشدة التي تجتاز المقاومة 8Ω في الشكل أسفله؟



Exercice 3.4

Calculer la résistance équivalente entre les points A et B du montage représenté sur la figure ci-dessous sachant que :

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_7 = 10\Omega ;$$

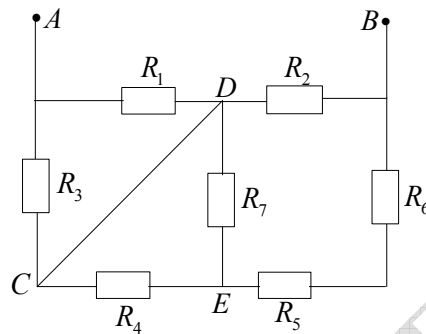
$$R_5 = R_6 = 2,5\Omega$$

التمرين 4.3

أحسب المقاومة المكافئة للدائرة المبينة على الشكل أسفله بين النقطتين A و B علماً أن :

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_7 = 10\Omega ;$$

$$R_5 = R_6 = 2,5\Omega$$

**Exercice 3.5**

Un fil de tungstène de $1,00\text{mm}$ de diamètre transporte un courant d'intensité $15,0\text{A}$. Déterminer le champ électrique à l'intérieur du fil sachant que la résistivité du tungstène est $5,5 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

التمرين 5.3

سلك من التنغستين قطره $1,00\text{mm}$ يحمل تياراً شدته $15,0\text{A}$. حدد الحقل الكهربائي داخل السلك علماً أن المقاومة النوعية للتنغستين هي $5,5 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

Exercice 3.6

Le générateur de la figure ci-dessous a une force électromotrice $e = 9,0\text{V}$ et une résistance $r = 0,50\Omega$.

- 1/ Calculer l'intensité dans chaque résistance.
- 2/ Quelle est la puissance fournie par le générateur ?
- 3/ Quelle est la différence de potentiel entre A et C ?

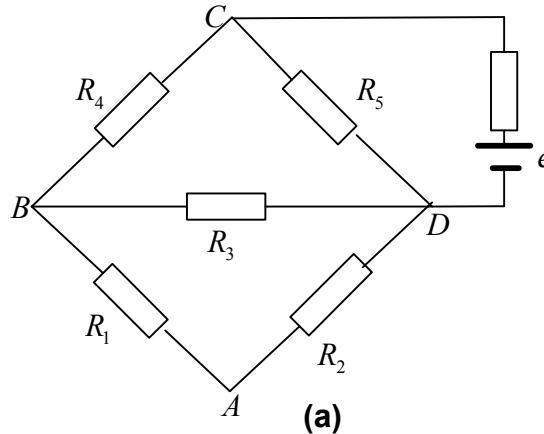
$$R_1 = R_2 = R_4 = 1,0\Omega, R_3 = 2,0\Omega, R_5 = 6,0\Omega$$

التمرين 6.3

لمولد الشكل أسفله قوة محرقة كهربائية مقدارها $e = 9,0\text{V}$ و مقاومة داخلية $r = 0,50\Omega$.

- 1/ أحسب الشدة في كل مقاومة.
- 2/ ما هي الإستطاعة المنتجة من قبل المولد؟
- 3/ ما هو فرق الكمون بين A و C ؟

$$R_1 = R_2 = R_4 = 1,0\Omega, R_3 = 2,0\Omega, R_5 = 6,0\Omega$$

**Exercice 3.7**

L'un des dispositifs les plus utiles pour mesurer la température, est le thermomètre à résistance de platine. Un fil d'environ $2,0m$ de platine pur de $0,1mm$ de diamètre est enroulé en forme de bobine de résistance $25,5\Omega$ à $0^\circ C$. Sachant que le coefficient thermique de la résistivité du platine est $0,003927K^{-1}$, déterminer la variation de la résistance due à l'augmentation de température de $1,00^\circ C$. Quelle est la température, si la résistance est de $35,5^\circ C$?

التمرين 7.3

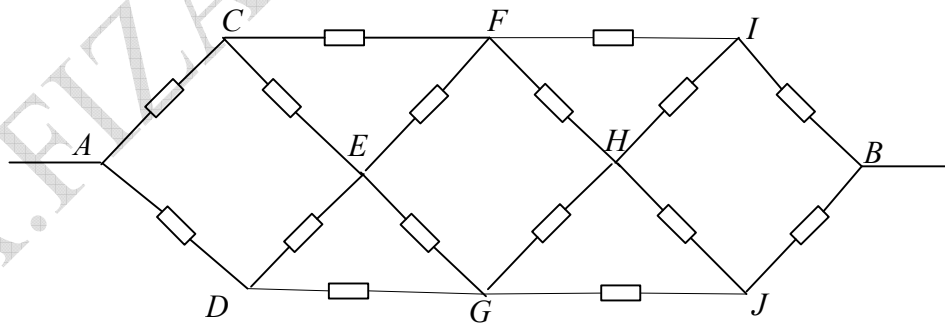
أحد التجهيزات الأكثر فائدة لقياس درجة الحرارة، هو مقياس الحرارة ذي مقاومة من البلاتين. سلك من البلاتين الخالص طوله $2,0m$ قطره حوالي $0,1mm$ ملفوف على شكل وشيعة مقاومته $25,5\Omega$ في $0^\circ C$. علما أن المعامل الحراري لمقاومية البلاتين هو $0,003927K^{-1}$ ، حدد تغير المقاومة الناتج عن ارتفاع درجة الحرارة بـ $1,00^\circ C$. ما هي درجة الحرارة إذا كانت المقاومة $35,5^\circ C$ ؟

Exercice 3.8

Dans la figure ci-dessous chaque branche contient une résistance $r = 1\Omega$. Calculer la résistance équivalente entre A et B.

التمرين 8.3

في الشكل أسفله كل فرع يحتوي على مقاومة $r = 1\Omega$. أحسب المقاومة المكافئة بين A و B.

**Exercice 3.9**

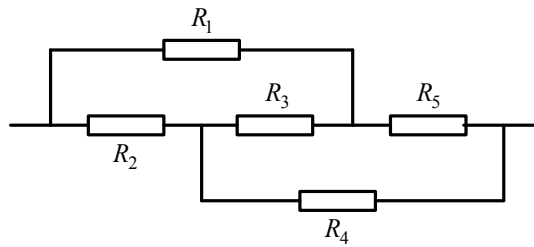
En utilisant les lois de Kirchhoff, trouver la résistance équivalente entre les bornes du groupe de résistances représenté dans la figure ci-dessous.

$$R_2 = R_3 = R_5 = 6\Omega, \quad R_1 = R_4 = 12\Omega$$

التمرين 9.3

باستعمال قانوني كيرشوف، أوجد المقاومة المكافئة بين قطبي مجموعة المقاومات الممثلة في الشكل أسفله.

$$R_1 = R_4 = 12\Omega, \quad R_2 = R_3 = R_5 = 6\Omega$$

**Exercice 3.10**

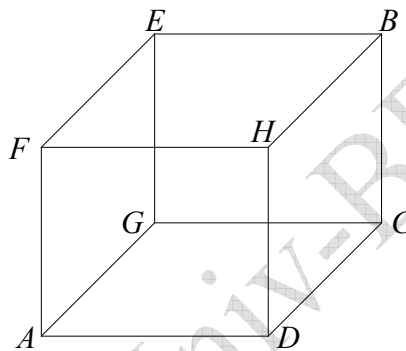
On considère un réseau électrique de forme cubique qui peut être alimenté de trois manières : entre A et B , entre A et C , entre A et D .

Déterminer dans chaque cas la résistance équivalente de ce réseau sachant que la résistance d'un côté est .

التمرين 10.3

نعتبر شبكة كهربائية ذات شكل تكعيبي و التي يمكن تغذيتها بطرق ثلاث: بين A و B ، بين A و C ، بين A و D .

عين من أجل كل حالة المقاومة المكافئة لهذه الشبكة علما أن مقاومة كل ضلع هي .

**Exercice 3.11**

On réalise le montage indiqué sur la figure ci-dessous. Le condensateur est initialement déchargé.

On donne :

$$E = 15V, R_1 = 50k\Omega,$$

$$R_2 = R_3 = 100k\Omega, C = 20\mu F$$

1/ Déterminer les éléments E_{Th} et R_{Th} du modèle de Thévenin équivalent du dipôle actif linéaire situé à gauche des bornes A et B , l'interrupteur K étant ouvert.

2/ Calculer :

a/ l'intensité I du courant à la fermeture de K .

b/ l'énergie du condensateur une fois sa charge terminée.

c/ la durée approximative nécessaire pour la charge complète du condensateur.

التمرين 11.3:

نحقق التركيب المبين على الشكل في الأسفل. المكثفة فارغة في البداية. تعطى:

$$E = 15V, R_1 = 50k\Omega,$$

$$R_2 = R_3 = 100k\Omega, C = 20\mu F$$

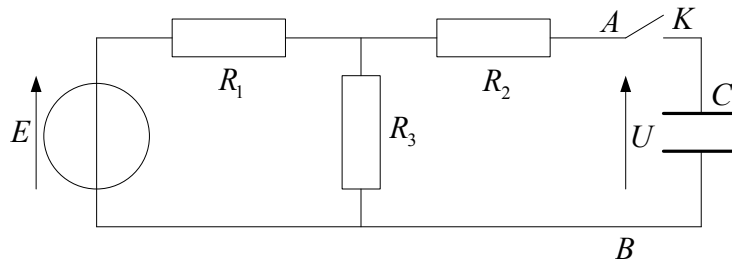
1/ عيّن العنصرين E_{Th} و R_{Th} لنموذج ثيفنا المكافئ لثنائي القطب الخطي النشط الواقع على يسار الطرفين A و B حين تكون القاطعة K مفتوحة.

2/ أحسب

أ/ الشدة I للتيار عند غلق القاطعة K ,

ب/ طاقة المكثفة حين يتم شحنها،

ج/ المدة الزمنية التقريبية اللازمة لشحن المكثفة تماما.

**Exercice 3.12**

Un générateur, de f.é.m. $e = 70,0V$ et de résistance interne $r = 1,00\Omega$, est connecté à un moteur, de f.é.m. e' et de résistance interne r' , en série avec un conducteur ohmique de résistance $R = 10,0\Omega$ plongeant dans un calorimètre.

1/ Déterminer en fonction de e', r' et de l'intensité I du courant qui traverse le moteur la puissance totale P_T dissipée par le moteur ainsi que la puissance P_J dissipée par effet Joule par ce dernier. En déduire l'expression de la puissance P_M convertie en puissance mécanique. (On orientera la f.é.m. e' dans le sens opposé à celui du courant I).

2/ a) Le moteur est bloqué, la puissance électrique convertie en puissance mécanique est nulle. On mesure un transfert thermique, au niveau du calorimètre, $Q_1 = 15,00kJ$ en une minute. Calculer l'intensité I_1 du courant dans ce cas et la f.é.m. e' .

En déduire r' .

b) Le moteur fonctionne. Le transfert thermique n'est plus que de $Q_2 = 1,50kJ$ en une minute. Calculer l'intensité I_2 du courant et e'' , nouvelle valeur de la f.é.m. du moteur.

3. On enlève le conducteur ohmique de résistance R et le moteur fonctionne.

a) Exprimer le rendement η du moteur, rapport de la puissance utile pour le moteur sur la puissance reçue par celui-ci.

b) Le moteur est connecté au générateur précédent. Déterminer le point de fonctionnement du circuit, c'est à dire :

intensité I du courant qui traverse le moteur et tension U aux bornes de ce dernier.

c) Calculer le rendement η .

التمرين 12.3

مولد قوته المحركة الكهربائية $e = 70,0V$ و مقاومته الداخلية $r = 1,00\Omega$ ، يوصل بمحرك، قوته المحركة الكهربائية e' و مقاومته الداخلية r' ، على التسلسل مع ناقل أومي مقاومته $R = 10,0\Omega$ مغمور في مسعر (جهاز لقياس كمية الحرارة).

1/ حدّد بدلالة e', r' والشدة I للتيار الذي يجتاز المحرك، الاستطاعة الكلية P_T المبددة من قبل المحرك و كذا الاستطاعة P_J المبددة بفعل جول من قبل هذا الأخير. إستنتج عبارة الاستطاعة P_M المحولة إلى استطاعة ميكانيكية. (وجه القوة المحركة الكهربائية e' في الاتجاه المعاكس لجهة التيار I).

2/ أ) نمنع المحرك من الدوران، الاستطاعة الكهربائية المحولة إلى استطاعة ميكانيكية معدومة. نقيس تحويل حراري، على مستوى المسعر، $Q_1 = 15,00kJ$ في الدقيقة الواحدة. أحسب الشدة I_1 للتيار في هذه الحالة و القوة المحركة الكهربائية e' . إستنتج r' .

ب) الآن المحرك يشتغل (يدور). التحويل الحراري هو $Q_2 = 1,50kJ$ فقط في الدقيقة الواحدة. أحسب الشدة I_2 للتيار و القيمة الجديدة e'' للقوة المحركة الكهربائية للمحرك.

3/ ننزع الناقل الأومي ذي المقاومة R و نبقي المحرك يشتغل.

أ) عبّر عن المردود η للمحرك، أي النسبة بين الاستطاعة الفعلية للمحرك و الاستطاعة التي يتلقاها هو نفسه.

ب) يربط المحرك بالمولد السابق. عيّن نقطة اشتغال الدارة أي: الشدة I للتيار الذي يجتاز المولد و التوتر U بين طرفي هذا الأخير.

ج) أحسب المردود η .

Exercice 3.13

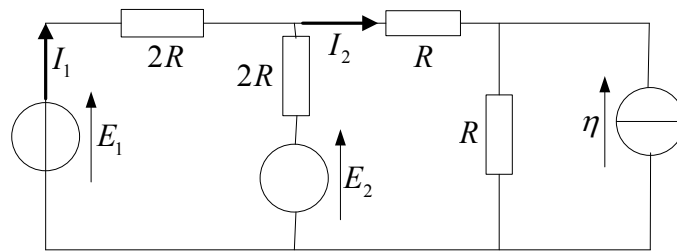
En utilisant les lois de Kirchhoff déterminer les courants I_1 et I_2 pour le réseau représenté sur la

التمرين 13.3

باستعمال قانوني كيرشوف عيّن التيارين I_1 و I_2 في

figure ci-dessous.

الشبكة الممثلة على الشكل أسفله.

**Exercice 3.14**

Calculer les caractéristiques E_{Th} et R_{Th} du générateur de Thévenin correspondant au circuit représenté sur la figure ci-dessous, en déduire ensuite l'intensité I du courant qui passe dans le conducteur ohmique R .

Application numérique :

$$R_1 = 5\Omega ; R_2 = 2\Omega ; R_3 = 4\Omega ;$$

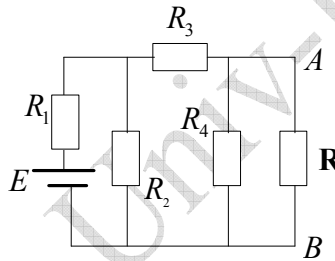
$$R_4 = 10\Omega ; R = 5\Omega ; E = 20V$$

تمرين 14.3

أحسب المميزتين E_{Th} و R_{Th} لمولد "تيفنا" المناسب للدارة الممثلة في الشكل أسفله ، ثم استنتج شدة التيار I المار في الناقل الأومي R .
تطبيق عددي:

$$R_1 = 5\Omega ; R_2 = 2\Omega ; R_3 = 4\Omega ;$$

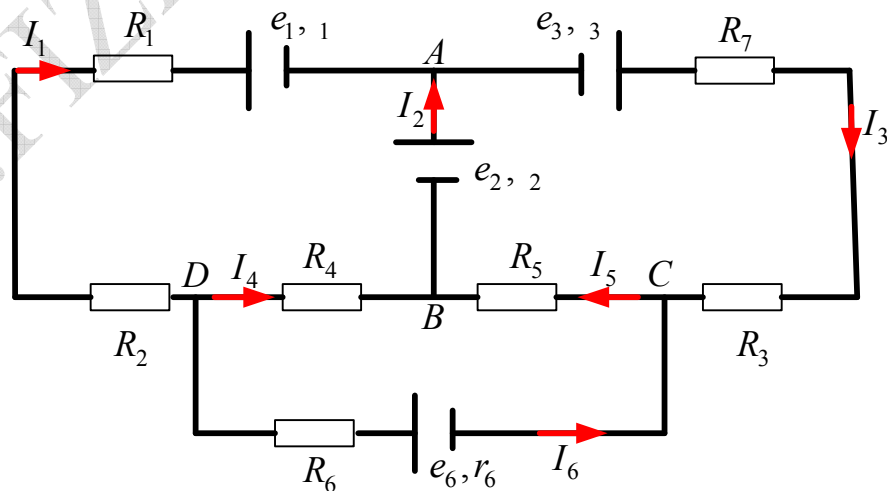
$$R_4 = 10\Omega ; R = 5\Omega ; E = 20V$$

**Exercice 3.15**

Soit le circuit représenté sur la figure ci-dessous. En appliquant les deux lois de Kirchhoff écrire toutes les équations correspondant aux nœuds et aux mailles.

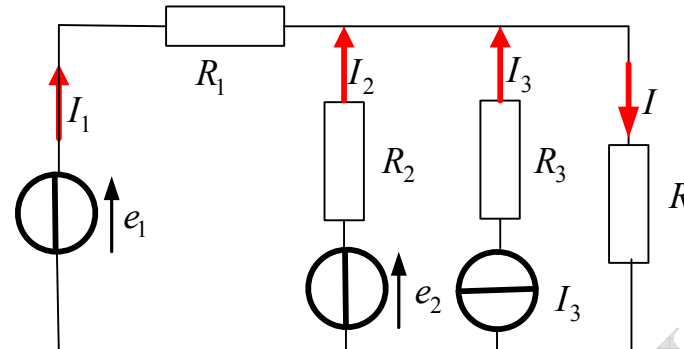
التمرين 15.3

لتكن الدارة المبينة على الشكل في الأسفل. بتطبيق قانوني كيرشوف أكتب كل المعادلات المناسبة للعقد و العروات.

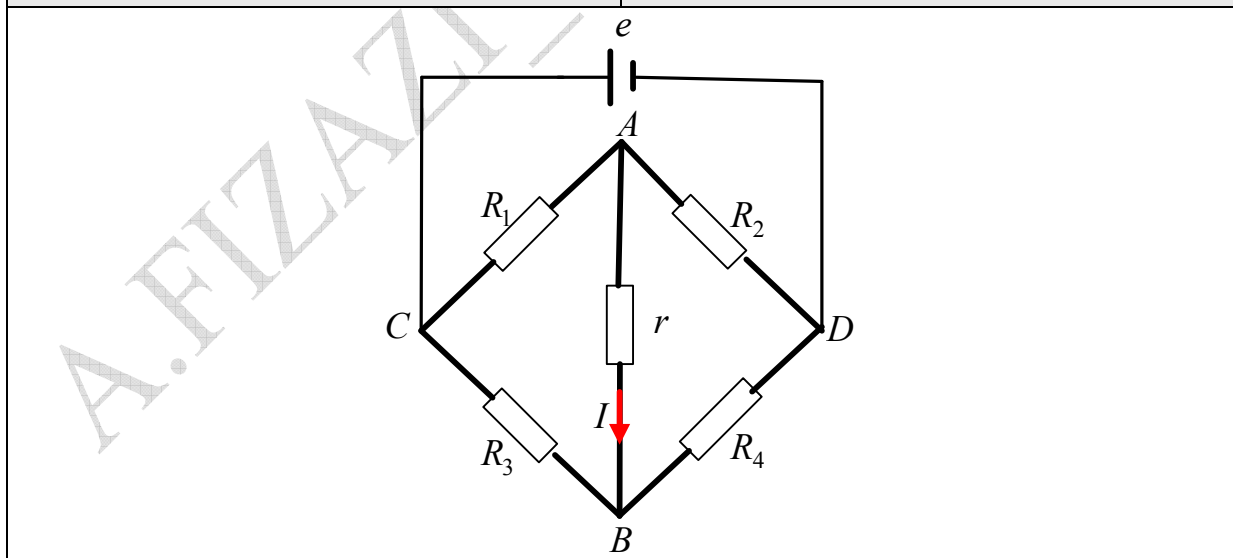
**Exercice 3.16**

Soit le circuit représenté sur la figure ci-dessous.

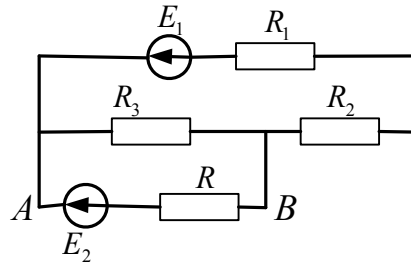
التمرين 16.3

Ecrire toutes les équations en appliquant les lois de Kirchhoff. En déduire l'expression de l'intensité I en fonction de $e_1, e_2, R_1, R_2, R_3, R, I_3$. Quelle est la tension (U_3) entre les bornes du générateur ?	لنكن الدارة المبينة على الشكل في الأسفل. أكتب كل المعادلات بتطبيق قانوني كيرشوف. إستنتج عبارة الشدة I بدلالة $e_1, e_2, R_1, R_2, R_3, R, I_3$. كم هو التوتر ($U_3$) بين طرفي المولد؟
	

Exercice 3.17 Le schéma ci-dessous représente un circuit appelé pont de Wheatstone. On demande de calculer les deux caractéristiques du générateur de Thévenin R_{Th} et E_{Th}, puis d'en déduire l'intensité I du courant électrique qui alimente la résistance ainsi que la différence de potentiel U_{AB} entre ses bornes. Application numérique : $e = 24V$, $R_1 = R_4 = 10k\Omega$ $R_2 = 33k\Omega$, $R_3 = 27k\Omega$, $r = 2k\Omega$	التمرين 17.3 يمثل الشكل في الأسفل دائرة تعرف باسم جسر وتسطون. المطلوب حساب مميزتي مولد تيفنا R_{Th} ، E_{Th} ثم استنتاج الشدة I للتيار الكهربائي الذي يغذي المقاومة و كذا فرق الكمون U_{AB} بين طرفيها. تطبيق عددي: $e = 24V$, $R_1 = R_4 = 10k\Omega$ $R_2 = 33k\Omega$, $R_3 = 27k\Omega$, $r = 2k\Omega$
---	--



Exercice 3.18 Déterminer littéralement l'intensité du courant qui traverse la branche AB (figure ci-dessous) en fonction de $E_1, E_2, R_1, R_2, R_3, R$.	التمرين 18.3 عين حرفياً شدة التيار العابر للفرع AB (الشكل في الأسفل) بدلالة $E_1, E_2, R_1, R_2, R_3, R$.
---	---

**Exercice 3.19**

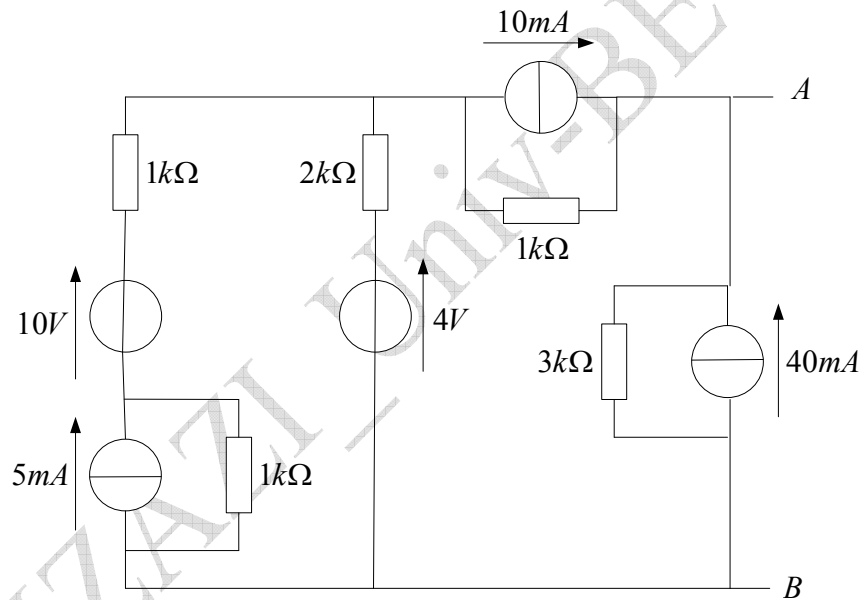
Soit le montage indiqué sur la figure ci-dessous.

En procédant par schémas équivalents, déterminer les caractéristiques du générateur de Thévenin équivalent au circuit entre les points A et B .

On branche une résistance $R = 4k\Omega$ entre A et B . Calculer le courant I_0 qui circule dans cette résistance.

التمرين 19.3

ليكن التركيب المبين على الشكل في الأسفل. باستعمال الأشكال المتكافئة، عيّن مميزتي مولد تيفنا المناسب للدارة بين A و B . نربط مقاومة $R = 4k\Omega$ بين A و B . أحسب الشدة I_0 للتيار الذي يجتاز هذه المقاومة.

**Exercice 3.20**

Un circuit est formé par deux mailles carrées $ABCD$ et $EFGH$, la première entourant la seconde. Chaque côté de ces mailles a une résistance $r = 1,0k\Omega$ et les deux sommets E et A sont connectés par une résistance d'égale valeur $r = 1,0k\Omega$. Une force électromotrice $e = 12V$ est branchée entre G et C .

1/ Simplifier ce circuit et déterminer la résistance équivalente entre G et C .

2/ Quelle est l'intensité débitée par le générateur ?

3/ Quelle est la différence de potentielle entre les points C et A ?

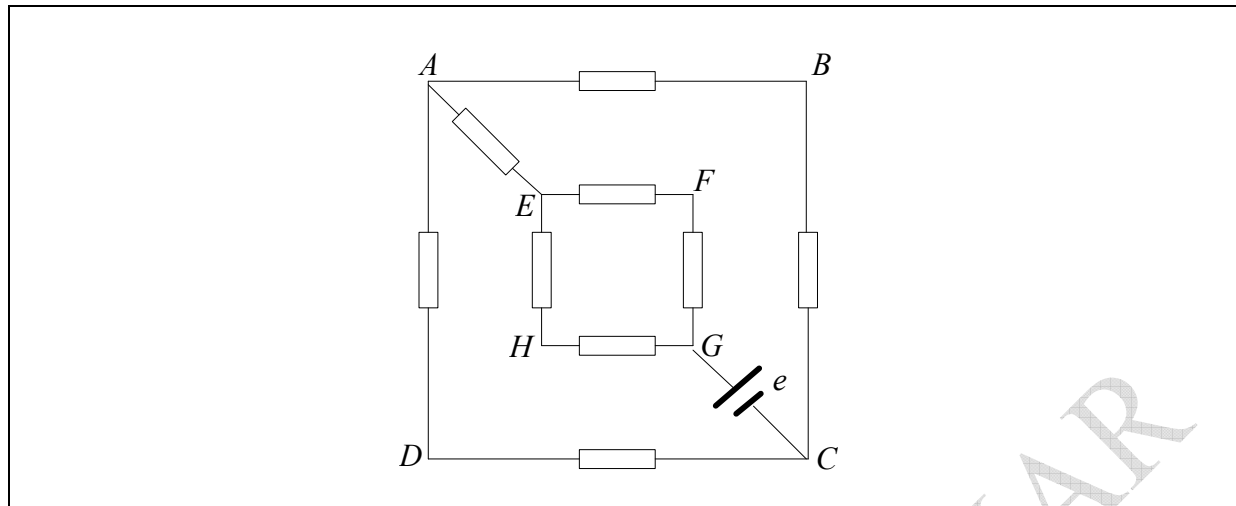
التمرين 20.3

تتكون دارة من عروتين مربعيتين $ABCD$ و $EFGH$ ، الأولى تحيط بالثانية. كل ضلع لهاتين العروتين له مقاومة $r = 1,0k\Omega$ والقمتان A و E موصلتان بواسطة مقاومة قيمتها كذلك $r = 1,0k\Omega$. تربط قوة محرّكة كهربائية مقدارها $e = 12V$ بين C و G .

1/ بسط هذه الدارة و حدّد المقاومة المكافئة بين G و C .

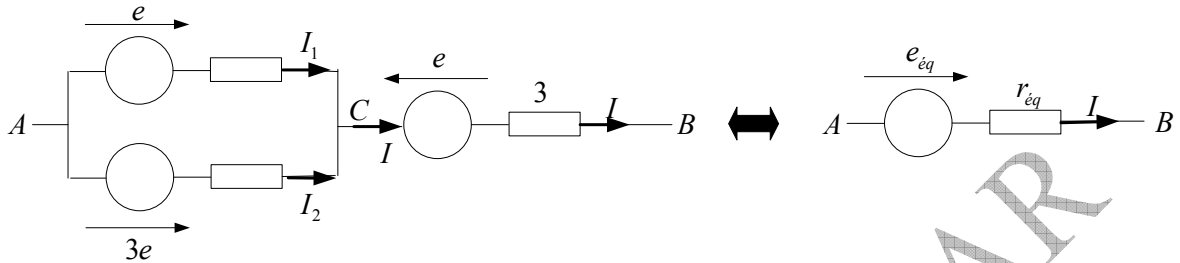
2/ ما هي الشدة التي يجريها المولد؟

3/ ما هو فرق الكمون بين النقطتين C و A ؟



Solution des exercices 3.1 à 3.20:**حلول التمارين من 1.3 إلى 20.3****Exercice 3.1 :**

D'après la figure ci-dessous, on voit que : $U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}$



En supposant que le courant va du point A vers le point B , on aura : $I = I_1 + I_2$

On peut calculer la différence de potentiel entre les points A et B en suivant deux chemin différents :

$$U_{AB} = (rI_1 - e) + (3rI + e) \rightarrow (1)$$

$$U_{AB} = (rI_2 - 3e) + (3rI + e) \rightarrow (2)$$

En additionnant les équations (1) et (2), on obtient :

$$2U_{AB} = r(I_1 + I_2) - 4e + 6rI + 2e$$

$$2U_{AB} = rI - 4e + 6rI + 2e$$

$$2U_{AB} = -2e + 7rI \rightarrow (3)$$

La différence de potentiel entre les bords du montage équivalent est :

$$U_{AB} = e_{eq} + r_{eq}I \rightarrow (4)$$

Par identification des équations (3) et (4), on obtient :

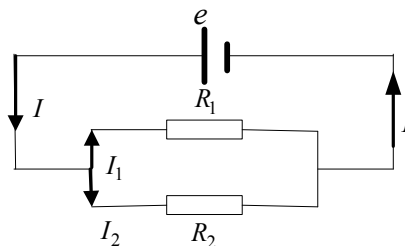
$$e_{eq} = -2e$$

$$r_{eq} = \frac{7}{2}r$$

Vu le signe négatif de la force électromotrice équivalente e_{eq} , le sens réel du courant électrique va du point B vers le point A .

Exercice 3.2 :

D'après la figure ci-dessous, l'intensité du courant principal I que débite le générateur, de force électromotrice e , se répartit entre les deux résistances, telle que : $e = R_1 I_1 = R_2 I_2$



Et puisque : $I = I_1 + I_2$, On peut calculer chacune des deux intensités dans chacune des deux branches :

$$\left. \begin{array}{l} I_2 = I - I_1 \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{array} \right| \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 (I - I_1) \Rightarrow \boxed{I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = I - I_2 \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{array} \right| \Rightarrow R_1 (I - I_2) = R_2 I_2 \Rightarrow \boxed{I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Exercice 3.3 :

En se concentrant sur la figure de l'énoncé, on peut en déduire, et sans aucun calcul, que **l'intensité est nulle** dans toutes les branches. La raison est simple : les générateurs s'annulent deux à deux à cause de leur montage en opposition deux à deux, et par conséquent les forces électromotrices s'annulent deux à deux.

Exercice 3.4 :

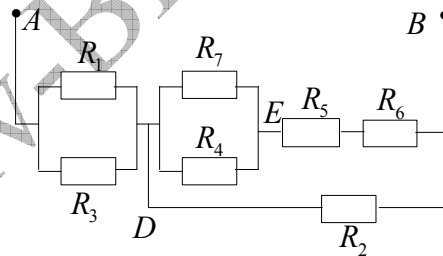
Il suffit de distinguer les résistances montées en série de celles montées en parallèle, comme le montre la figure ci-dessous. Donc :

$$R_{eq} = R_{AB} = (R_1 \parallel R_3) + R_2 \parallel [(R_4 \parallel R_7) + R_5 + R_6]$$

$$\boxed{R_{AD} = R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \Rightarrow \boxed{R_{13} = 5\Omega}$$

$$\boxed{R_{DE} = R_{47} = \frac{R_7 R_4}{R_7 + R_4}} \Rightarrow \boxed{R_{47} = 5\Omega}$$

$$\boxed{R_{DB} = \frac{R_2 (R_{47} + R_5 + R_6)}{R_2 + R_{47} + R_5 + R_6}} \Rightarrow \boxed{R_{DB} = 5\Omega} ; \boxed{R_{eq} = R_{AD} + R_{DB}} \Rightarrow \boxed{R_{eq} = R_{AB} = 10\Omega}$$



Exercice 3.5 :

On connaît la relation entre la densité de courant, la conductivité et le champ électrique :

$$J = \sigma E$$

Puisque la densité de courant est :

$$J = \frac{I}{S}$$

Donc :

$$E = \frac{I}{\sigma S}$$

La conductivité est égale à l'inverse de la résistivité, on peut donc écrire :

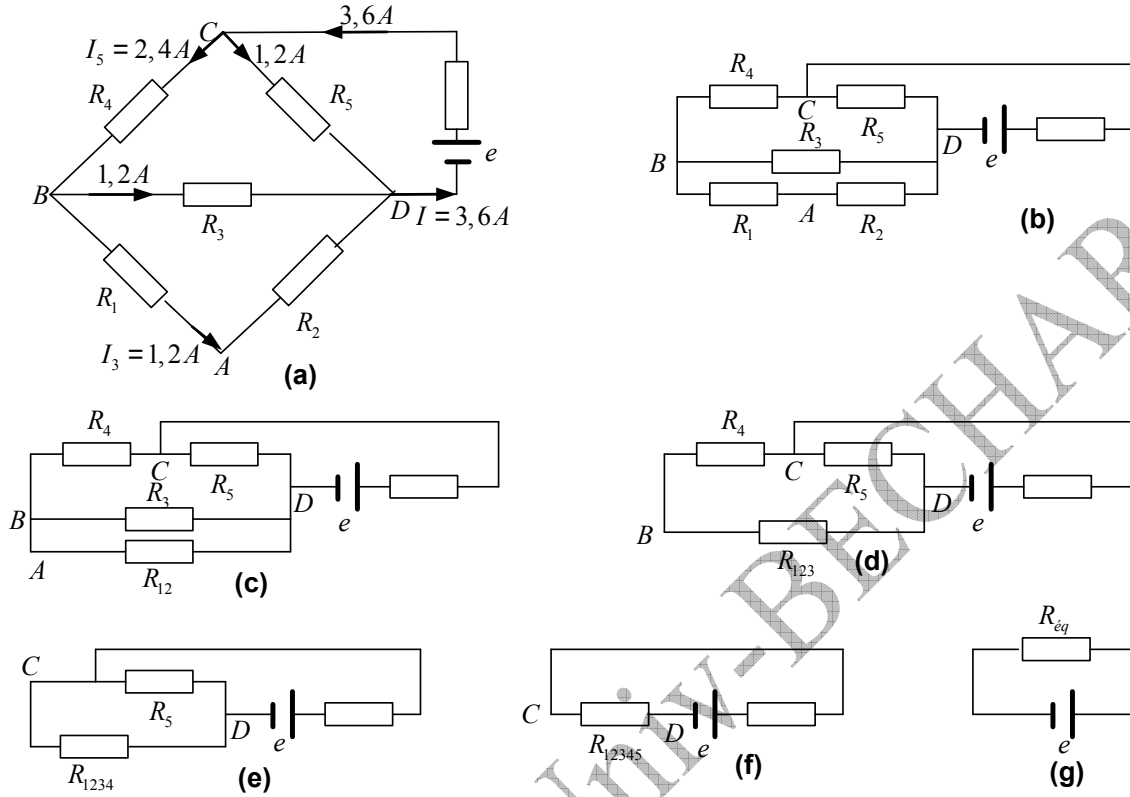
$$\boxed{E = \rho \cdot \frac{I}{S} = \rho \frac{I}{\pi r^2}}$$

Application numérique :

$$E = 5,5 \cdot 10^{-8} \frac{15,0}{3,14 \cdot 0,25 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{E = 1,05 Vm^{-1}}$$

Exercice 3.6 :

Tous les montages représentés ci-dessous sont équivalents au montage donné dans l'énoncé.



De la figure (b), on en déduit la résistance équivalente des résistances R_1 et R_2 montées en série :

$$R_{12} = R_1 + R_2 \rightarrow \boxed{R_{12} = 2,0\Omega}$$

De la figure (c), on en déduit la résistance équivalente des résistances R_{12} et R_3 montées en parallèle :

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{123} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_1 + R_2} \rightarrow \boxed{R_{123} = 2,0\Omega}$$

De la figure (d), on en déduit la résistance équivalente des résistances R_{123} et R_4 montées en série :

$$R_{1234} = R_{123} + R_4 \rightarrow \boxed{R_{1234} = 3,0\Omega}$$

De la figure (e), on en déduit la résistance équivalente des résistances R_{1234} et R_5 montées en dérivation :

$$\frac{1}{R_{12345}} = \frac{1}{R_{1234}} + \frac{1}{R_5} \Rightarrow R_{12345} = \frac{R_{1234} \cdot R_5}{R_{1234} + R_5} \rightarrow \boxed{R_{12345} = 2,0\Omega}$$

De la figure (f), on en déduit la résistance équivalente de la résistance R_{12345} et de la résistance interne du générateur montées en série :

$$R_{eq} = R_{12345} + r \rightarrow \boxed{R_{eq} = 2,5\Omega}$$

De la figure (g), on peut à présent calculer l'intensité principale que débite le générateur dans le circuit :

$$I = \frac{e}{R_{eq}} \rightarrow I = 3,6A$$

A partir de ce résultat, et de la figure (g) qui lui correspond, et, en passant par ordre par toutes les figures de (f) jusqu'à (a), on obtient les différentes intensités dans chaque branche du circuit :

Dans la figure (f) : $I = 3,6A$

Dans la figure (e) :

$$U_{CD} = R_5 \cdot I_5 = -rI + e \Rightarrow I_5 = \frac{rI + e}{R_5}$$

$$I_5 = \frac{-0,5 \cdot 3,6 + 9}{6} \rightarrow I_5 = 1,2A$$

Tandis que dans la résistance R_{1234} , c'est-à-dire à travers R_{123} et R_4 , l'intensité est :

$$I_4 = I - I_5 \rightarrow I_4 = 2,4A$$

Dans la figure (c) : l'intensité à travers R_{12} est égale à l'intensité à travers R_3 , puisque les deux résistances sont égales :

$$I_3 = \frac{2,4}{2} \rightarrow I_3 = 1,2A$$

Dans la figure (a), on a représenté les valeurs et les sens des différentes intensités :

$$P = R_{eq} \cdot I^2 = eI \rightarrow P = 32,4W$$

3/ La différence de potentiel entre A et C : on peut la calculer en suivant n'importe quelle branche. En suivant par exemple la branche ADeC, la différence de potentiel demandée est :

$$U_{AC} = R_2 I_3 + rI - e$$

$$U_{AC} = (1 \cdot 1,2) + (0,5 \cdot 3,6 - 9) \rightarrow U_{AC} = -5V$$

Exercice 3.7 :

Puisque : $\rho = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$

Il en résulte : $R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$

On demande de déterminer la variation de la résistance $R - R_0$ correspondant à une variation de température $T - T_0$ de $1,00^\circ C$. Donc :

$$R - R_0 = R_0 \alpha (T - T_0) \Leftrightarrow \Delta R = R_0 \alpha \Delta T$$

$$\Delta R = 25,5 \cdot 0,003927 \cdot 1,00 \Rightarrow \Delta R = 0,001\Omega$$

Cela veut dire que la résistance augmente de $0,001\Omega$, chaque fois que la température augmente de $1K$ ou $1^\circ C$.

Si la résistance atteint la valeur $35,5\Omega$, la température correspondante aura atteint donc :

$$\Delta T = \frac{\Delta R}{R_0 \alpha}$$

$$\Delta T = \frac{35,5 - 25,5}{25,5 \cdot 0,003927} \Rightarrow \boxed{\Delta T \approx 100^\circ C}$$

Exercice 3.8 :

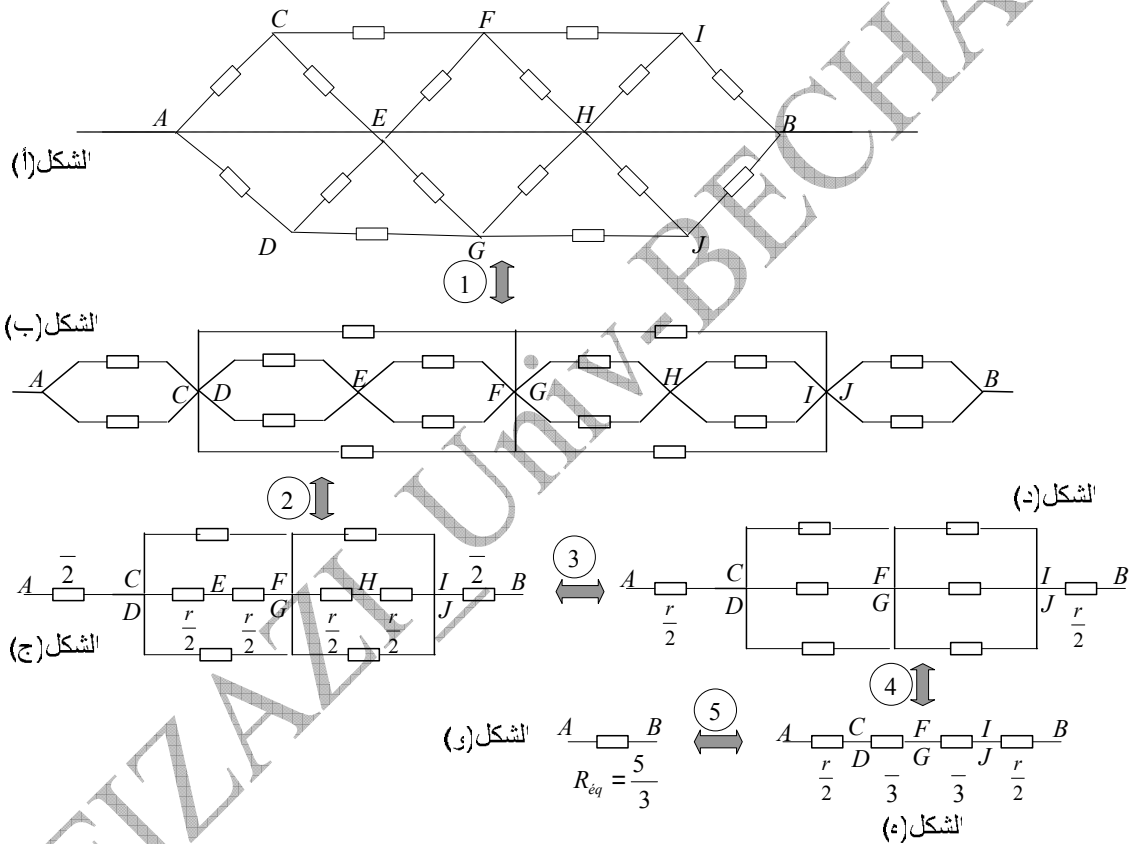
Dans la figure (a), on voit que la ligne $AEHB$ représente une droite de symétrie par rapport aux potentiels, tels que :

$$U_c = U_D$$

$$U_F = U_G$$

$$U_I = U_J$$

C'est ce qui nous permet de simplifier le réseau, comme il est indiqué sur la figure (b), et ça facilite les calculs pour trouver la résistance équivalente en suivant, en toute logique, des étapes successives.

**Exercice 3.9 :**

On suppose que l'ensemble est alimenté par un générateur de force électromotrice $e = 18V$ (on pourra choisir n'importe quelle autre valeur, car la résistance est indépendante de e quelque soit sa valeur). On a représenté sur la figure ci-dessous l'intensité principale et les intensités parcourant les différentes branches.

La loi des mailles de Kirchhoff nous permet d'écrire les équations suivantes :

Maille (e, R_1, R_4, R_5, e) :

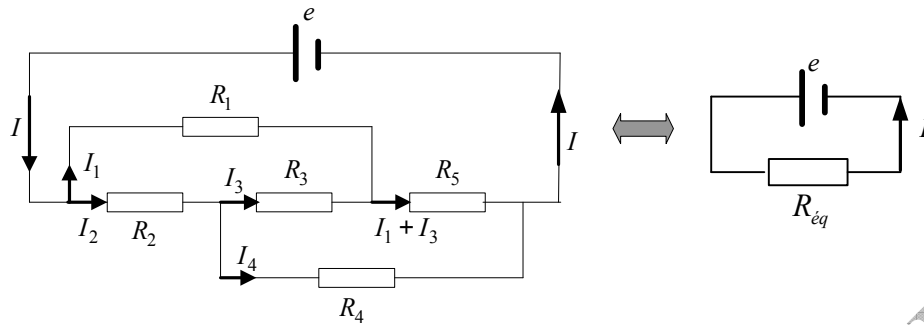
$$R_1 I_1 + R_5 (I_1 + I_3) - e = 0 \rightarrow 12I_1 + 6I_1 + 6I_3 - 18 = 0 \rightarrow 3I_1 + I_3 - 3 = 0 \rightarrow (1)$$

Maille (e, R_2, R_5, e) :

$$R_2 I_2 + R_4 (I_2 - I_3) - e = 0 \rightarrow 6I_2 + 12I_2 - 12I_3 - 18 = 0 \rightarrow 3I_2 - 2I_3 - 3 = 0 \rightarrow (2)$$

Maille (e, R_2, R_3, R_5, e) :

$$R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_5 (I_1 + I_3) - e = 0 \rightarrow 6I_2 + 6I_3 + 6(I_1 + I_3) - 18 = 0 \rightarrow I_1 + I_2 + 2I_3 - 3 = 0 \rightarrow (3)$$



Les trois équations constituent un système à trois inconnues :

$$\begin{cases} 3I_1 + 0I_2 + I_3 = 3 \\ 0I_1 + 3I_2 - 2I_3 = 3 \\ I_1 + I_2 + 2I_3 = 3 \end{cases}$$

Si on choisit la méthode des matrices, on doit procéder de la manière suivante :

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 21$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 \rightarrow I_1 = \frac{18}{21} \rightarrow \boxed{I_1 = \frac{6}{7} A}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 27 \rightarrow I_2 = \frac{27}{21} \rightarrow \boxed{I_2 = \frac{9}{7} A}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \rightarrow I_3 = \frac{9}{21} \rightarrow \boxed{I_3 = \frac{3}{7} A}$$

L'intensité principale est donc : $I = I_1 + I_2 \rightarrow \boxed{I = \frac{15}{7} A}$

On peut à présent déterminer la résistance équivalente telle que :

$$\boxed{R_{eq} = \frac{e}{I}} \rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{42}{5} = 8,4 \Omega}$$

Exercice 3.10 :

1/ L'alimentation du réseau suivant AB : se référer à la figure (a) ci-dessous.

Lorsque le réseau est alimenté entre les points A et B, AB représente un axe de symétrie pour les potentiels.

En A le courant principal I_0 se répartit en trois fois I, en B il arrive aussi trois fois I ($I_0 = 3I$).

Lorsque le courant I arrive à F , il se divise en deux parties égales puisque les deux trajets pour atteindre B sont égaux, et ce en raison de l'égalité des potentiels des points E et H . La répartition des différents courants dans le cube se fait donc de la façon indiquée sur la figure (a).

En suivant le trajet $AFEB$, on a :

$$U_{AB} = U_{AF} + U_{FE} + U_{EB}$$

$$U_{AB} = rI + r \frac{I}{2} + rI = \frac{5}{2} rI$$

$$U_{AB} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{3} r.I = \frac{5}{6} r 3.I \Rightarrow U_{AB} = \frac{5}{6} r I_0 = R_{eq} . I_0$$

D'où la résistance équivalente du réseau :

$$R_{eq} = \frac{5}{6} r$$

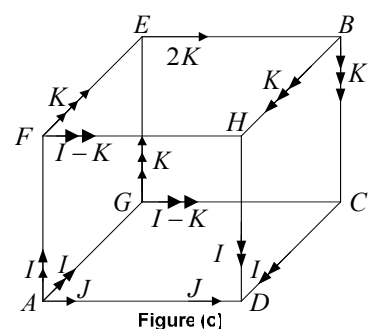
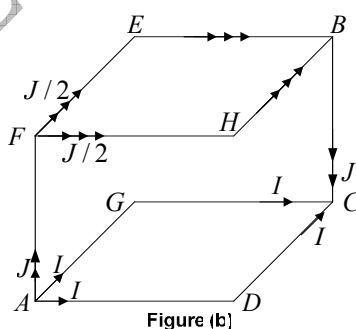
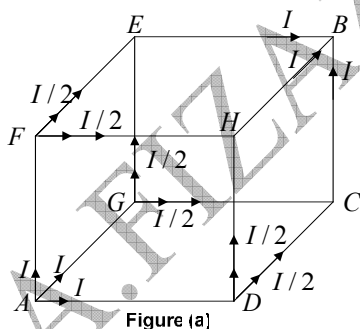
2/ L'alimentation du réseau suivant AC : se référer à la figure (b) ci-dessous :

Quand on alimente le réseau suivant AC , le plan $AFBC$ représente un plan de symétrie des potentiels, et le plan $GDHE$ représente le plan de symétrie entrée-sortie pour la répartition des courants.

Le courant principal I_0 se répartit en I dans les deux branches AD et AG , et J dans la branche AF . En F , le trajet pour aller à B est le même puisque les points E et H sont au même potentiel. En F , le courant J se divise en deux parties égales. Puisque $EHDG$ est un plan de symétrie entrée-sortie, les branches EB et BC sont parcourues par le même courant $J/2$. De ce fait, les branches EG et DH ne sont parcourues par aucun courant, ce qui nous permet de dire que le réseau est ouvert entre E et G , et entre D et H .

Finalement, la branche BC est parcourue par J , et les deux branches GC et DC sont parcourues par I .

On peut simplifier le réseau comme indiqué sur la figure (b).



La résistance équivalente est telle que :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{AC}} + \frac{1}{2r + R_{FB}}$$

Or :

$$\frac{1}{R_{FB}} = \frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} = \frac{1}{r}$$

D'où la résistance équivalente du réseau:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r+r} \Rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{3}{4}r}$$

3/ L'alimentation du réseau suivant AD : Se référer à la figure (c) ci-dessus.

Lorsque le réseau est alimenté entre les points A et D , le plan $AEBD$ représente un plan de symétrie des potentiels. D'autre part, le plan passant par les médiatrices des segments AD et GC est un plan de symétrie entrée-sortie pour la répartition des courants.

Puisque les points F et G sont au même potentiel, les branches AF et AG sont parcourues par le même courant I .

La branche AD est parcourue par le courant J , tel que $I_0 = 2I + J$ (I_0 étant le courant principal).

Puisque la différence de potentiel entre les points F et G est la même, les branches FE et GE sont parcourues par le même courant d'intensité K . La branche FH est parcourue par le courant $I - K$, et la branche EB par le courant $2K$. On obtient une répartition de courant comme indiqué sur la figure (c).

On a :

$$U_{AD} = rJ = r(I_0 - 2I) \rightarrow (A)$$

Suivant le chemin $AFHD$:

$$U_{AD} = r(I + I - K + I) = r(3I - K) \rightarrow (B)$$

En considérant la maille $FEBHF$, on a :

$$0 = R(K + 2K + K - (I - K)) \Rightarrow K = \frac{I}{5} \rightarrow (C)$$

$$(C) \rightarrow (B) : U_{AD} = r\left(3I - \frac{I}{5}\right) \Rightarrow I = \frac{5}{14} \frac{U_{AD}}{r} \rightarrow (D)$$

$$(D) \rightarrow (A) : U_{AD} = rI - \frac{5}{7} U_{AD}$$

En fin de compte, on obtient :

$$U_{AD} = \frac{7}{12} rI = R_{eq} I \Rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{7}{12} r}$$

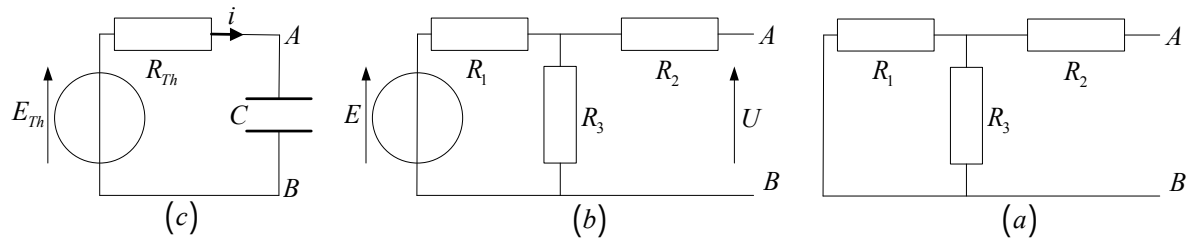
Remarque : On peut utiliser les points F et G d'une part, et les points H et C d'autre part, comme étant au même potentiel et ainsi les relier entre eux pour simplifier le réseau.

Exercice 3.11 :

1/ La figure (a) ci-dessous nous permet de calculer la résistance équivalente du circuit $R_{eq} = R_{Th}$:

Les résistances R_1 et R_3 sont montées en parallèle, et leur résistance équivalente est en série avec R_2 . D'où :

$$\boxed{R_{Th} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2}, \quad \boxed{R_{Th} = 133,3 k\Omega}$$



La figure (b) nous permet de calculer la force électromotrice du générateur de Thévenin :
 $U = E_{Th}$

La résistance R_2 n'est parcourue par aucun courant. Soit i l'intensité qui circule dans R_1 et R_3 :

$$\left. \begin{array}{l} i = \frac{E}{R_1 + R_3} \\ U = R_3 i \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{U = E_{Th} = R_3 \frac{E}{R_1 + R_3}}, \quad \boxed{E_{Th} = 30V}$$

2/ a) Au moment de la fermeture de l'interrupteur, l'intensité du courant que débite le générateur de Thévenin (figure(c)) est :

$$\boxed{i = \frac{E_{Th}}{R_{Th}}}, \quad \boxed{i = 0,075A}$$

b) L'énergie W_E emmagasinée dans le condensateur à la fin de sa charge est égale à :

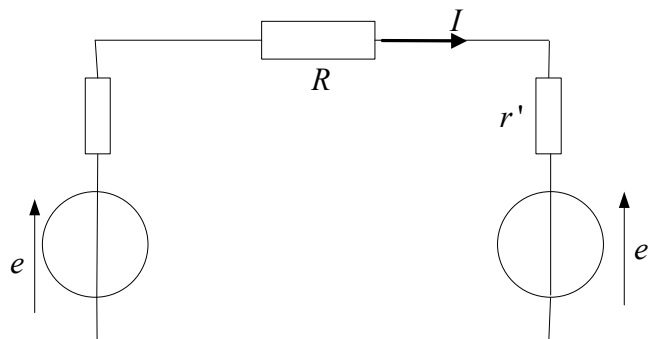
$$\left. \begin{array}{l} W_E = \frac{1}{2} C U^2 \\ U = E_{Th} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{W_E = \frac{1}{2} C E_{Th}^2}, \quad \boxed{W_E = 0,05J}$$

c) La durée nécessaire pour la charge du condensateur est à peu près égale à cinq fois la constante du temps τ (une règle bien connue et vérifiée) :

$$\left. \begin{array}{l} t = 5\tau \\ \tau = R_{Th} C \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{t = 5R_{Th} C}, \quad \boxed{t = 6,65s}$$

Exercice 3.12 :

On se représente le circuit sous la forme suivante :



1/ Si on note par U' la différence de potentiel entre les bornes du moteur, la puissance électrique totale qu'il consomme est :

$$\left. \begin{array}{l} P_T = U'I \\ U' = e' + r'I^2 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{P_T = e'I + r'I^2}$$

La puissance dissipée par effet joule dans le moteur est : $\boxed{P_J = r'I^2}$

Donc la puissance électrique transformée en puissance mécanique est égale à :

$$P_M = P_T - P_J \Rightarrow \boxed{P_M = e'I}$$

2/ a) Le moteur étant bloqué, il se comporte comme un conducteur ohmique, donc $P_M = 0$.

La puissance électrique dissipée dans le moteur par effet joule est RI_1^2 . Cette puissance est réceptionnée par le calorimètre, d'où :

$$Q_1 = RI_1^2 t \Rightarrow \boxed{I_1 = \sqrt{\frac{Q_1}{Rt}}}, \quad \boxed{I_1 = 5A}$$

D'après la loi des mailles : $(r + r' + R)I_1 - (e - e') = 0$

Puisque le moteur ne tourne pas : $e' = 0$. D'où :

$$\boxed{r' = \frac{e}{I_1} - (r + R)}, \quad \boxed{r' = 3\Omega}$$

b) A présent le moteur fonctionne normalement, cela veut dire que $P_M \neq 0$ et $e'' \neq 0$.

On obtient alors :

$$\boxed{I_2 = \sqrt{\frac{Q_2}{Rt}}}, \quad \boxed{I_2 = 1,6A}$$

Pour calculer e'' , on applique la loi des mailles, telle que :

$$(r + r' + R)I_2 - (e - e'') = 0 \Rightarrow \boxed{e'' = e - (r + r' + R)I_2}, \quad \boxed{e'' = 47,6V}$$

3/ a) Le rendement est défini comme étant $\eta = \frac{P_m}{P_T}$

$$\text{Ce qui nous conduit à : } \eta = \frac{e''I}{e''I + r'I^2} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{e''}{e'' + r'I}}$$

b) A présent, la tension aux bornes du générateur est égale à la tension aux bornes du moteur :

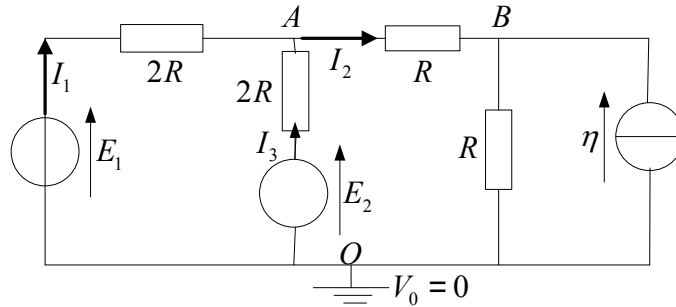
$$\left. \begin{array}{l} U = e - rI \\ U = e'' - r'I \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{I = \frac{e - e''}{r + r'}}, \quad \boxed{I = 5,6A}$$

$$\text{D'où : } \boxed{U = 64,4V}$$

$$\text{c) calcul du rendement : } \eta = \frac{47,6}{47,6 + (3 \times 5,6)} \rightarrow \boxed{\eta = 73,7\%}$$

Exercice 3.13 :

Le circuit comprend trois nœuds. On affecte arbitrairement à l'un d'eux (O par exemple) le potentiel zéro, puis on applique la loi des nœuds en A et B, avec les deux potentiels inconnus V_A et V_B .



Au nœud A : $I_1 - I_2 + I_3 = 0$. donc :

$$\left. \begin{aligned} V_A - V_0 &= -2RI_1 + E_1 \\ V_A - V_0 &= -2RI_3 + E_2 \\ V_A - V_B &= RI_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{E_1 - V_A}{2R} + \frac{V_B - V_A}{R} + \frac{E_2 - V_A}{2R} = 0$$

Au nœud B : $I_2 + I_4 + \eta = 0$. donc :

$$\left. \begin{aligned} V_A - V_B &= RI_2 \\ V_B - V_0 &= -RI_4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_A - V_B}{R} - \frac{V_B}{R} + \eta = 0$$

On obtient un système à deux équations :

$$\begin{cases} 4V_A - 2V_B = E_1 + E_2 \\ -V_A + 2V_B = R\eta \end{cases}$$

On arrive aux solutions :

$$V_A = \frac{E_1 + E_2 + R\eta}{3}, \quad V_B = \frac{E_1 + E_2 + 4R\eta}{6}$$

De là, on en déduit les intensités I_1 et I_2 :

$$I_1 = \frac{E_1 - V_A}{2R} \rightarrow I_1 = \frac{2E_1 - E_2 - R\eta}{6R}$$

$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{R} \rightarrow I_2 = \frac{E_1 + E_2 - 2R\eta}{6R}$$

Exercice 3.14 :

1/ **Calcul de E_{th} en ouvrant la branche AB :**

$$E_{Th} = U_{AB_0} \Rightarrow -R_3 I_3 + R_2 I_2 = R_4 I_3$$

Calculons I_3 en appliquant la loi des nœuds :

$$I_1 = I_2 + I_3 \rightarrow (1)$$

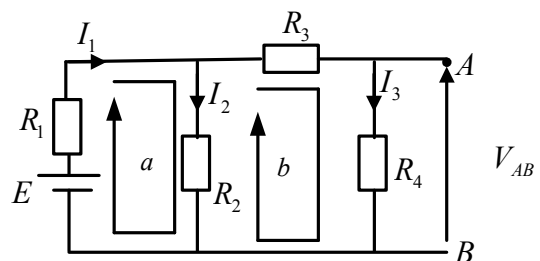
D'après la loi des mailles, nous avons :

Dans la maille (a) : $E = R_1 I_1 + R_2 I_2 \rightarrow (2)$

Dans la maille (b) : $0 = (R_3 + R_4) I_3 - R_2 I_2 \rightarrow (3)$

Remplaçons I_1 dans l'équation (2) pour obtenir :

$$E = R_1 (I_2 + I_3) + R_2 I_2 \Rightarrow E = (R_1 + R_2) I_2 + R_1 I_3 \rightarrow (4)$$



Nous calculons I_2 à partir de l'équation (3) : $I_2 = \frac{R_3 + R_4}{R_2} I_3 \rightarrow (5)$

Remplaçons I_2 dans l'équation (4) pour obtenir :

$$E = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_2} I_3 + R_1 I_3 \Rightarrow E = \left[\frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2}{R_2} \right] I_3$$

Finalement nous obtenons I_3 et E_{Th} :

$$I_3 = \frac{ER_2}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2} ; \quad E_{Th} = \frac{R_2 R_4 E}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2} \Rightarrow E_{Th} = 3.70V$$

2/ Calcul de R_{Th} après suppression du générateur :

La résistance équivalente de tout le circuit sans la résistance R est :

$$R_{th} = [(R_1 \parallel R_2) + R_3] \parallel R_4$$

$$R_1 \parallel R_2 \Rightarrow \frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0.715 \Rightarrow R_{12} = 1.43\Omega$$

La résistance équivalente de R_{12} et R_3 est :

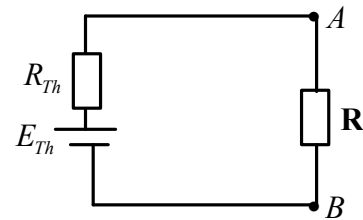
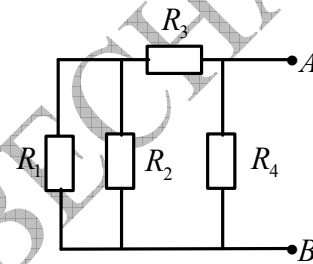
$$R' = R_{12} + R_3 \Rightarrow R' = 5.43\Omega$$

Finalement, la résistance du générateur de Thévenin est :

$$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4} \Rightarrow R_{Th} = 3.52\Omega$$

3/ Calcul de l'intensité I :

$$E_{Th} = (R + R_{Th}) I \Rightarrow I = \frac{E_{Th}}{R + R_{Th}} \Rightarrow I = 0.43A$$



Exercice 3.15 :

Application de la première loi : Il y a quatre nœuds auxquels correspondent quatre équations :

Au nœud A : $I_1 + I_2 = I_3$

Au nœud B : $I_2 = I_5 + I_4$

Au nœud C : $I_5 = I_3 + I_6$

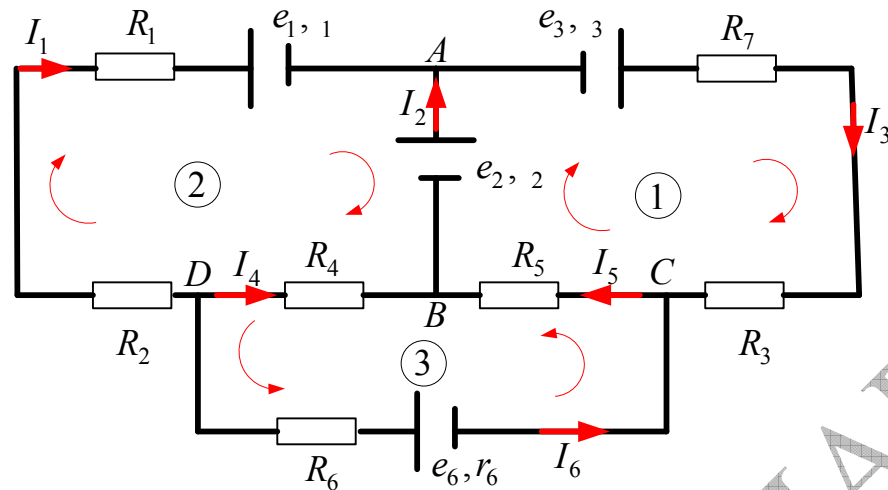
Au nœud D : $0 = I_4 + I_6 + I_1$

Application de la deuxième loi : Il y a trois mailles indépendantes. Après avoir choisi les sens, comme indiqué sur la figure, on peut écrire les différentes équations :

La maille 1 : $e_3 + e_2 = R_7 I_3 + R_3 I_3 + R_5 I_5 + r_2 I_4 + r_3 I_3$

La maille 2 : $-e_1 - e_2 = R_1 I_1 - R_4 I_4 - R_2 I_2 + r_1 I_1 - r_2 I_2$

La maille 3 : $-e_6 = R_6 I_6 - R_4 I_4 + R_5 I_5 + r_6 I_6$

**Exercice 3.16 :**

Il n'y a que deux nœuds, on peut se contenter donc d'une seule équation en appliquant la loi des nœuds : $I_1 + I_2 + I_3 = I$

Aux trois mailles correspondent trois équations qu'on obtient en appliquant la loi des mailles :

$$e_1 - e_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$$

$$e_1 = R_1 I_1 + RI$$

$$e_2 = R_2 I_2 + RI$$

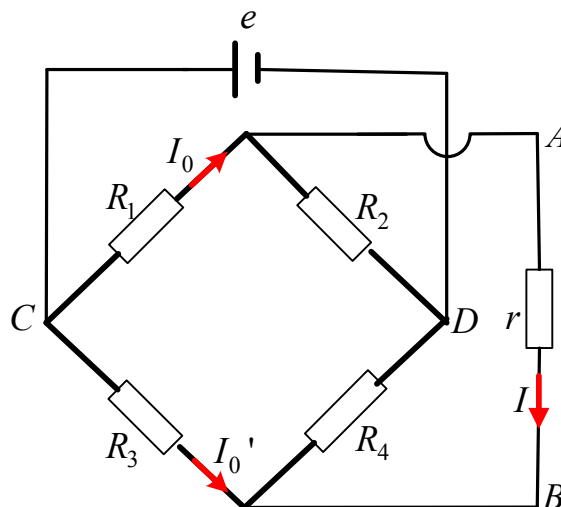
La solution du système des trois équations nous donne en fin de compte l'intensité I :

$$I = \frac{e_1 R_2 + e_2 R_1 + R_1 R_2 I_3}{R_1 R_2 + R R_1 + R R_2}$$

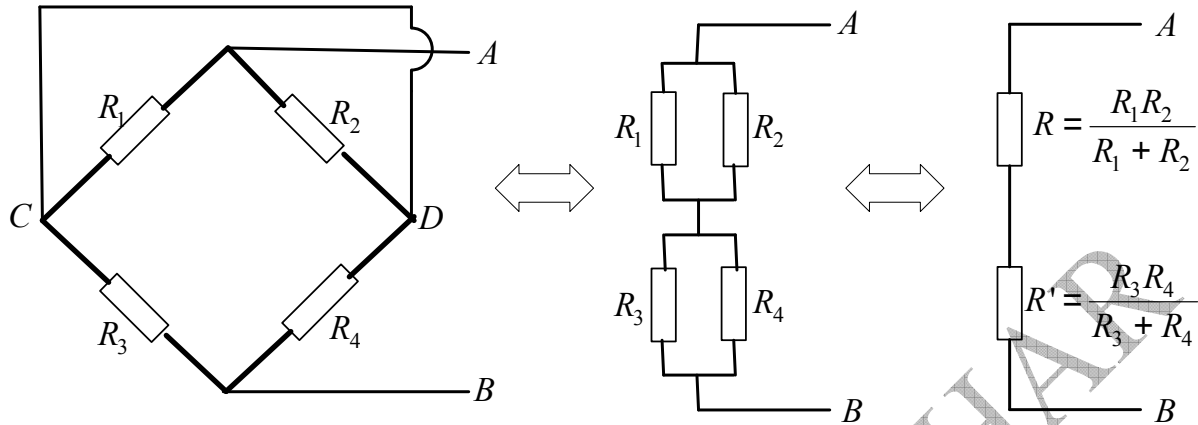
D'où la tension U_3 : $U_3 = RI + R_3 I_3$

Exercice 3.17 :

La figure suivante représente le montage équivalent au montage donné dans l'énoncé.



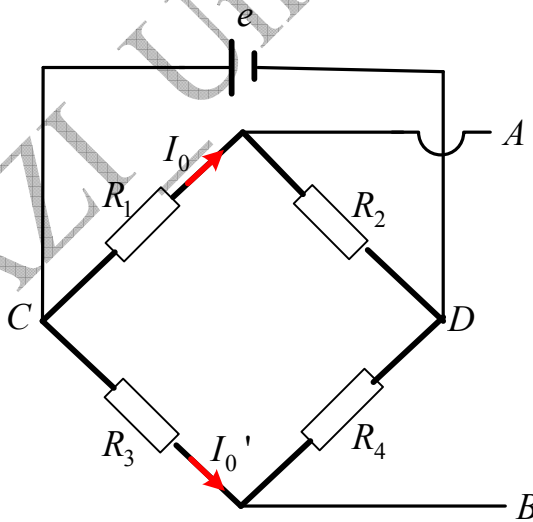
Détermination de R_{Th} : On éteint les sources de tension et on calcule la résistance équivalente R_{Th} de toutes les résistances à l'exception de (figure ci dessous).



$$R' = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad R_{Th} = R + R'$$

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \Rightarrow R_{Th} \approx 15\Omega$$

Détermination de E_{Th} : On considère le circuit ouvert en supprimant la résistance montée entre A et B (figure ci-dessous).



$$e = (R_1 + R_2) I_0 = (R_3 + R_4) I_0'$$

$$E_{Th} = (V_A - V_B)_0 = R_2 I_0 - R_4 I_0' = R_3 I_0' - R_1 I_0$$

$$E_{Th} = U_{AB_0} = R_2 \frac{e}{R_1 + R_2} - R_4 \frac{e}{R_3 + R_4} \quad ; \quad E_{Th} = U_{AB_0} = R_3 \frac{e}{R_3 + R_4} - R_1 \frac{e}{R_1 + R_2}$$

A la fin, on obtient :

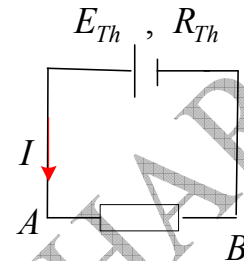
$$E_{Th} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} e$$

$$E_{Th} \approx 12V$$

Calcul de I et U : On utilise la figure suivante :

$$U_{AB} = rI = -R_{Th} + E_{Th} \Rightarrow I = \frac{E_{Th}}{r + R_{Th}} \Rightarrow I = 0,70A$$

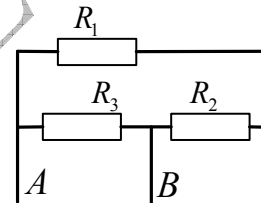
$$U_{AB} = rI \Rightarrow U_{AB} = 1,4V$$



Exercice 3.18 :

Détermination de R_{Th} à partir du montage ci dessous, où nous avons supprimé la branche AB , et on a éteint les sources de tension :

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

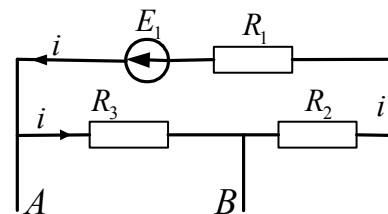


Détermination de E_{Th} à partir de la figure ci-dessous, où nous avons supprimé la branche AB seulement :

$$U_{AB_0} = R_3 i = -(R_1 + R_2) i - (E_1)$$

$$i = \frac{E_1}{R_3 + R_1 + R_2}$$

$$E_{Th} = U_{AB_0} = \frac{R_3 E_1}{R_3 + R_1 + R_2}$$

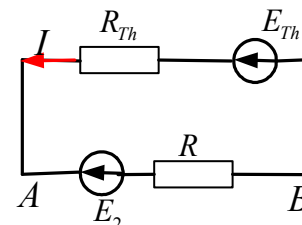


Détermination de I à partir de la figure suivante :

$$E_{Th} = U_{AB_0} = R I - (-E_2) = -R_{Th} I - (-E_{Th})$$

$$I = \frac{E_{Th} - E_2}{R + R_{Th}}$$

$$I = \frac{R_3 E_1 - E_2 (R_1 + R_2 + R_3)}{R (R_1 + R_2 + R_3) + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$



Exercice 3.19 :

Une fois que l'on ait remplacé les générateurs d'intensité par des générateurs de tension équivalente, comme indiqué sur la figure ci-dessous, on détermine alors la force électromotrice E_{Th} du générateur de Thévenin ainsi que sa résistance interne R_{Th} .

Détermination de E_{Th} : On peut calculer U_{AB_0} de trois manières différentes, ce qui conduit à trois équations :

$$\left. \begin{array}{l} U_{AB_0} = E_{Th} = 1000I + 2000I_1 + 10 + 4 \\ U_{AB_0} = E_{Th} = 1000I + 2000I_2 + 10 + 15 \\ U_{AB_0} = E_{Th} = -7000I + 160 \\ I = I_1 + I_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} E_{Th} = 1000I + 2000I_1 + 10 + 4 \rightarrow (1) \\ E_{Th} = 1000I + 2000I_2 + 10 + 15 \rightarrow (2) \\ E_{Th} = -7000I + 160 \rightarrow (3) \\ I = I_1 + I_2 \rightarrow (4) \end{cases}$$

En somme les équations (1) et (2) pour obtenir :

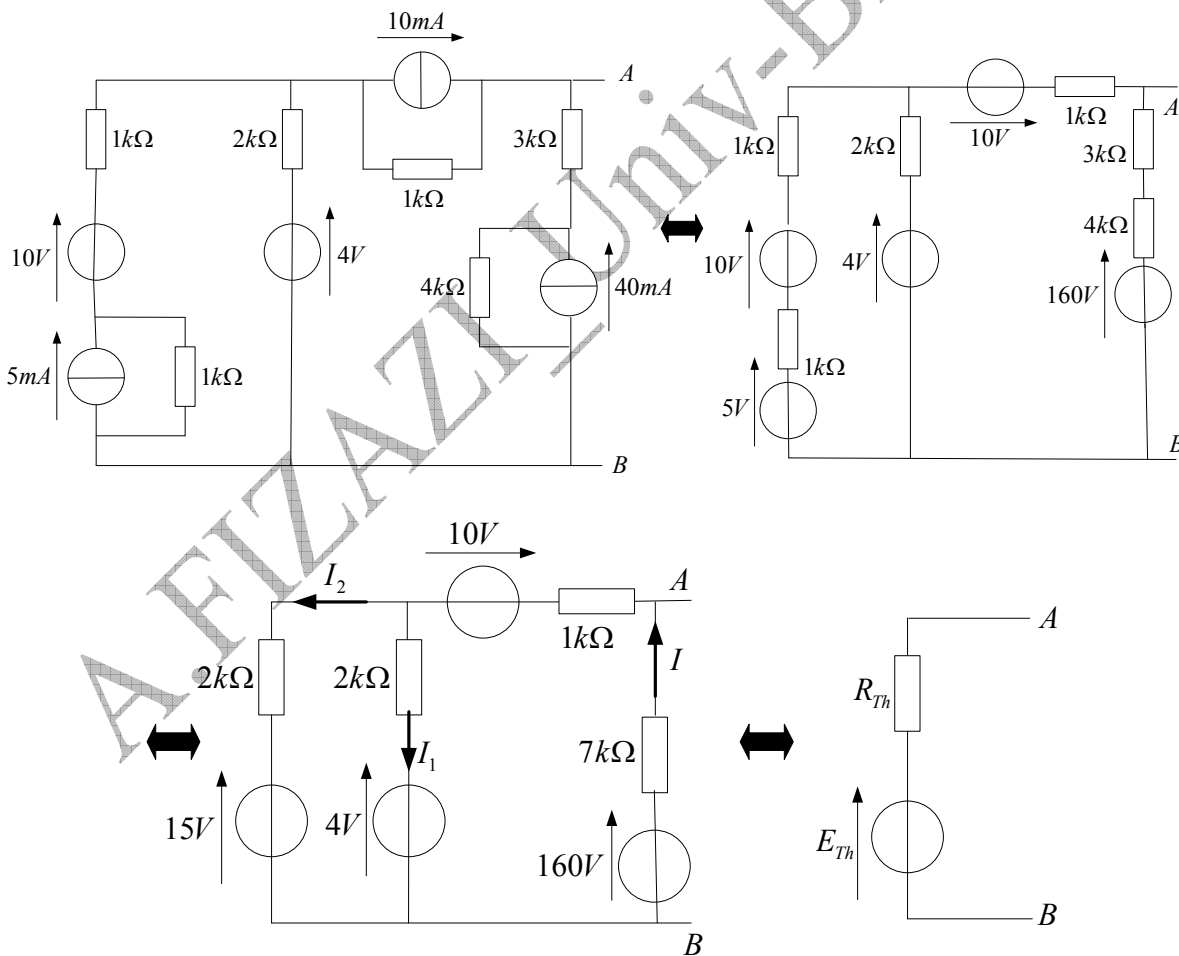
$$2E_{Th} = 2000I + 2000(I_1 + I_2) + 41 \Rightarrow 2E_{Th} = 4000I + 41 \rightarrow (5)$$

On en déduit l'intensité I de l'équation (3) : $I = \frac{160 - E_{Th}}{7000}$

A la fin, on remplace I dans l'équation (5), pour obtenir la force électromotrice du générateur de Thévenin :

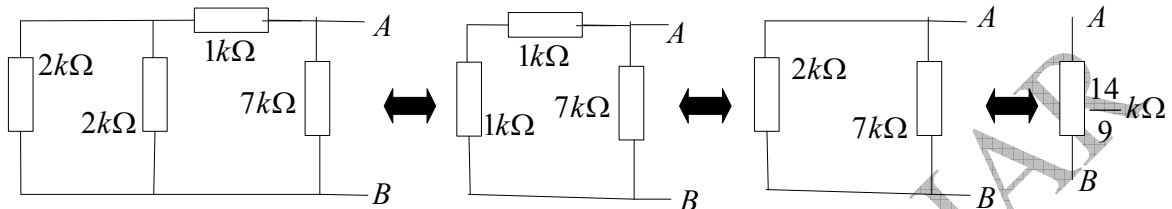
$$2E_{Th} = \frac{4}{7}(160 - E_{Th}) + 41$$

$$18E_{Th} = 927 \Rightarrow \boxed{E_{Th} = 51,5V}$$



Détermination de R_{Th} : Pour calculer la résistance équivalente de tout le circuit, on éteint toutes les sources d'intensité et de tension. Les résistances équivalentes successives sont indiquées sur les figures ci-dessous de gauche à droite. On trouve à la fin :

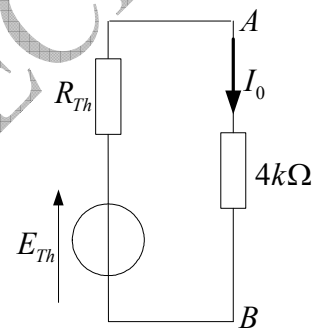
$$R_{Th} = \frac{14}{9} k\Omega$$



Calcul de l'intensité parcourant la résistance $R = 4k\Omega$:

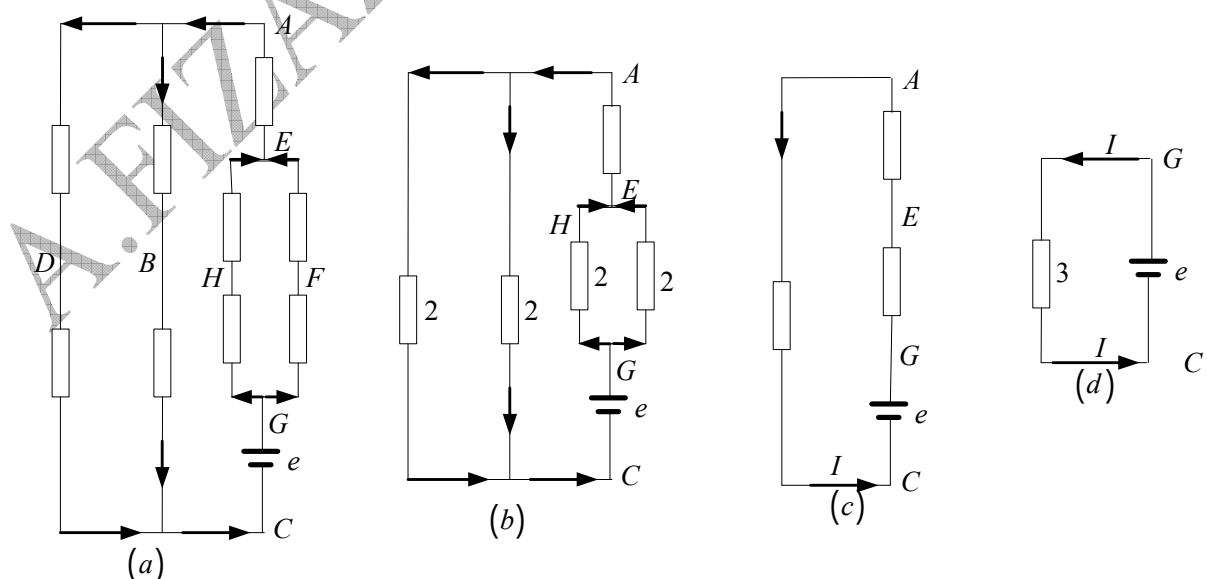
A partir de la figure ci contre on en déduit l'intensité I_0 :

$$I_0 = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R}, \quad I_0 \approx 9,3mA$$



Exercice 3.20 :

1/ Les figures (a), (b), (c) et (d) dans l'ordre donné représentent des simplifications successives du réseau. La figure (d) représente la résistance équivalente $R_{eq} = 3$ de tout le circuit, elle est montée aux bornes d'un générateur de force électromotrice e .



2/ Intensité du courant que débite le générateur :

$$U_{GC} = R_{eq} I = e \Rightarrow I = \frac{e}{R_{eq}} \quad I = 4,0mA$$

3/ La différence de potentiel entre les points C et A :

Puisque les branches GFE et GHE sont semblables, le courant d'intensité $4,0mA$ qui sort du générateur, se divise au point G en deux intensités égales ($2mA$). La branche EA est parcourue par le courant principal $4,0mA$.

D'où la différence de potentiel entre les points C et A qui est égale à :

$$U_{CA} = U_{CG} + U_{GH} + U_{HE} + U_{EA}$$

$$U_{CA} = -e + r \frac{I}{2} + r \frac{I}{2} + rI \Rightarrow U_{CA} = -e + 2rI \quad U_{CA} = -4,0V$$

En suivant la branche CBA :

$$U_{CA} = U_{CB} + U_{BA}$$

$$U_{CA} = -r \frac{I}{2} - r \frac{I}{2} \Rightarrow U_{CA} = -rI \quad U_{CA} = -4,0V$$

IV/ ELECTROMAGNETISME

الكهرومغناطيسية

Le mot « magnétisme » dérive du nom de la région qui porte le nom de « magnésie », située sur la côte ouest de l'actuelle Turquie, où le phénomène magnétique a été observé depuis fort longtemps (600 avant J.C). Cette région renfermait des gisements du minerai appelé « magnétite » qui a des propriétés spécifiques.

En effet, on a observé que deux morceaux de ce minerai s'attirent ou se repoussent, comme ils peuvent donner leurs propriétés à un morceau de fer se trouvant proche d'eux.

Ce phénomène magnétique est resté sans explication jusqu'en l'an 1819. En cette année, le physicien suédois Hans Christian Oersted (1777-1851), a remarqué que le passage d'un courant électrique dans un fil situé tout près d'une aiguille aimantée provoque sa déviation, ce qui prouve l'existence d'une force magnétique résultant du passage du courant électrique. Cette expérience a prouvé qu'un fil parcouru par un courant électrique acquiert des propriétés magnétiques tout à fait semblables à celles que possèdent un aimant naturel.

En temps contemporain, il a été convenu que tous les phénomènes magnétiques sont dus à deux causes :

- Le mouvement de charges électriques (courant électrique)
- Quelques propriétés intrinsèques de la matière.

A/ Le champ magnétique (الحقل المغناطيسي):

1/ Définition du champ magnétique :

Un champ magnétique existe dans une région voisine :

- D'un aimant naturel ou artificiel,
- De la terre, que l'on considère comme étant un énorme aimant,
- D'un conducteur parcouru par un courant électrique.

Par comparaison avec le champ électrique, une charge ou un ensemble de charges en mouvement, créent dans la région où elles se trouvent un champ magnétique. Ce champ magnétique agit sur une charge électrique externe q avec une force $\vec{F}_B$. Il en est de même pour un courant électrique, puisque par définition, c'est un mouvement de charges.

Comme le champ électrique $\vec{E}$, le champ magnétique est lui aussi une grandeur vectorielle, on le note par le vecteur $\vec{B}$. Son nom complet est : **champ d'induction magnétique** (حقل التحريض المغناطيسي).

2/ Superposition de champs magnétiques (مبدأ تركيب الحقول المغناطيسية):

Si plusieurs champs magnétiques $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_n$ agissent simultanément sur une charge électrique en mouvement, ou sur une aiguille aimantée, le champ magnétique $\vec{B}$ équivalent, est égal à la somme vectorielle de tous les champs agissant (figure 4.1) :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n$$

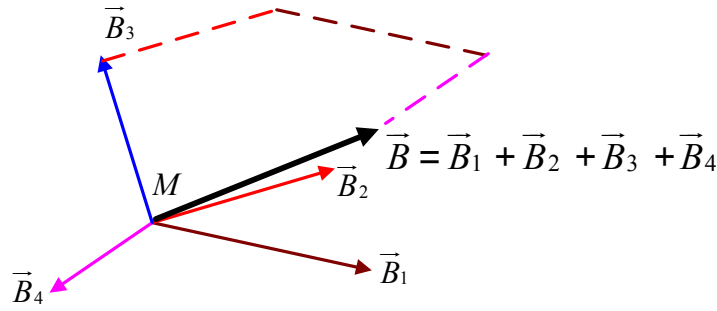


Fig 4.1: Composition des champs magnétiques

B/ Force électromagnétique agissant sur une charge électrique en mouvement (القوة المغناطيسية المؤثرة على شحنة كهربائية متحركة):

La force de Lorentz (Hendrik Antoon Lorentz 1853-1928) :

Comme nous l'avons dit précédemment, un champ électrique existe près de tout corps magnétique ; seulement, un champ pareil n'a aucune influence sur une charge électrique au repos.

Si on considère une charge électrique en mouvement dans un champ magnétique, elle sera soumise alors à une nouvelle force, en plus de la force électrique et de la force de pesanteur.

Ainsi, il a été vérifié expérimentalement que le champ magnétique exerce sur une charge électrique en mouvement une force magnétique proportionnelle à la valeur de la charge, au vecteur vitesse et au vecteur du champ magnétique, et qu'elle est perpendiculaire au vecteur vitesse :

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow F_B = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \theta \quad (4.1)$$

Quand une charge se déplace dans une région de l'espace, où règnent un champ magnétique et un champ électrique, la résultante est égale à la somme des deux forces : électrique et magnétique :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_B = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (4.2)$$

C'est l'expression de la loi de Lorentz

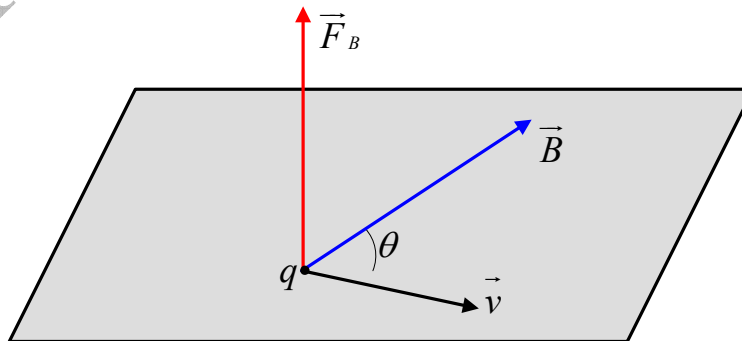


Fig 4.2: Force magnétique appliquée sur une charge mobile dans un champ magnétique

A/ La force électromagnétique exercée sur un élément d'un conducteur rectiligne (القوة المغناطيسية المطبقة على عنصر من ناقل مستقيم):

1/ La force de Lorentz

On sait que la densité de courant électrique qui parcourt un fil est : $\vec{J} = nq\vec{v}$

La relation entre le courant et la densité est : $I = JS$

Si un conducteur se trouve dans un champ magnétique, la force magnétique appliquée à l'unité de volume est :

$$\vec{f} = nq\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{f} = \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (4.3)$$

Quant à la force appliquée à un volume élémentaire du fil elle est égale à :

$$d\vec{F} = \vec{f}.dV = (\vec{J} \wedge \vec{B}).dV \quad (4.4)$$

Si S est la section du fil, et dl la longueur élémentaire considérée, on aura :

$$d\vec{F} = (\vec{J} \wedge \vec{B}).S.dl \quad (4.5)$$

Pour Obtenir la force totale appliquée sur un volume déterminé, on doit intégrer :

$$\vec{F} = \int_{\text{fil}} (\vec{J} \wedge \vec{B}).S.dl \quad (4.6)$$

Puisque $\vec{J} = J\vec{u}_T$, où $\vec{u}_T$ est le vecteur unitaire tangent à l'axe du fil, on a :

$$\vec{F} = \int_{\text{fil}} (J.S)\vec{u}_T \wedge \vec{B}.dl \quad (4.7)$$

$$\vec{F} = \int_{\text{fil}} I\vec{u}_T \wedge \vec{B}.dl \quad (4.8)$$

Si on considère le conducteur rectiligne plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, cela veut dire que $\vec{u}_T$ et $\vec{B}$ sont constants, ce qui nous permet d'écrire :

$$\vec{F} = I\vec{u}_T \wedge \vec{B} \int_{\text{fil}} dl \quad (4.9)$$

Si la longueur du fil baignant dans le champ magnétique est $\int_{\text{fil}} dl = l$, alors :

$$\vec{F} = I.l.\vec{u}_T \wedge \vec{B} \quad (4.10)$$

Puisque $\|\vec{u}_T\| = 1$, et si α est l'angle compris entre le conducteur rectiligne et le vecteur champ magnétique, on obtient :

$$\boxed{F = B.I.l.\sin \alpha} \quad (4.11)$$

Cette relation exprime la loi de Laplace

Pour déterminer la direction et le sens de cette force, on doit utiliser la règle connue de la main droite : l'index indique la force magnétique, le pouce le courant ou le conducteur, et le majeur le vecteur champ magnétique. Figure 4.3

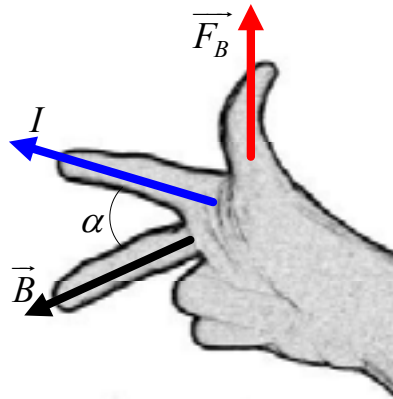


Fig 4.3: Règle de la main droite

1/ Applications :

a/ La balance de Cotton (Aimé Cotton 1869-1951) :

La balance de Cotton est constituée de deux bras mobiles autour d'un axe Δ :

La première section est caractérisée par une forme particulière, constituée d'un secteur circulaire isolant S , fabriqué en matière plastique et limité par deux arcs concentriques sur l'axe de rotation Δ du levier. S Comprend une portion rectiligne CD de longueur l , horizontale quand la balance est en équilibre. Figure 4.4

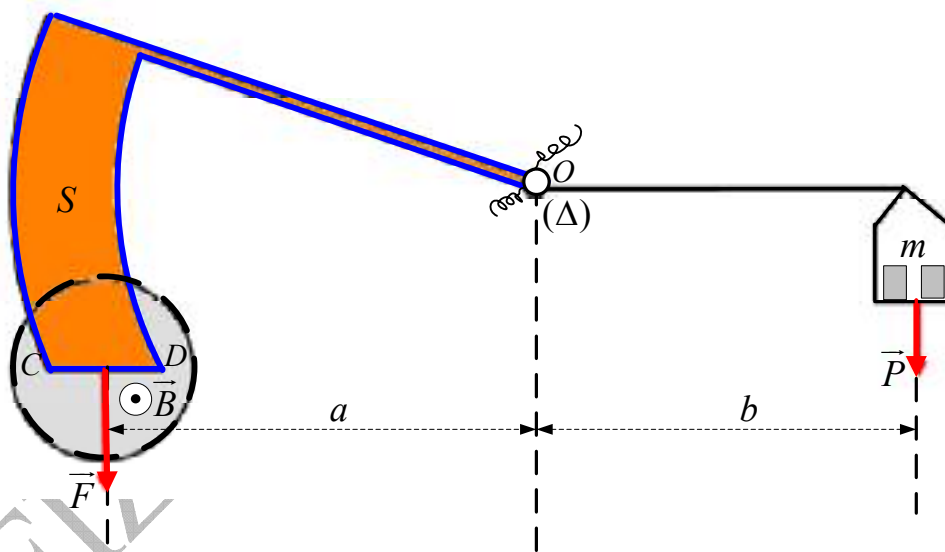


Fig 4.4: Balance de Cotton

Un fil conducteur sort par O , suit le secteur circulaire et la portion rectiligne CD , puis revient en O . L'autre bras du levier porte un plateau. La balance est en équilibre quand il ne passe aucun courant électrique.

Si on plonge la portion CD du secteur S dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, perpendiculaire au plan de la figure et dirigé vers l'avant, on remarque que la balance perd son équilibre lorsqu'un courant traverse le fil. Pour rétablir l'équilibre, il suffit de mettre des masses étalonnées sur le plateau.

Les deux moments, différents de zéro, et agissant sur le système, sont le moment du poids $\vec{P}$ des masses, et le moment de la force de Laplace $\vec{F}_B$.

$$\text{A l'équilibre : } F_B \cdot a = mg \cdot b \Rightarrow F_B = \frac{mg \cdot b}{a}$$

Ainsi on peut calculer l'intensité du champ d'induction magnétique :

$$B \cdot I \cdot l \cdot a = mgb \Rightarrow \boxed{B = \frac{mgb}{I l \cdot a}} \quad (4.12)$$

L'unité de $\underline{B}$ est le **tesla** (T).

b/ L'effet Hall (Edwin Herbert Hall 1855-1938) (فعل هال)

La figure 4.5 représente une plaque en cuivre, de section rectangulaire (quelques millimètres), parcourue par un courant électrique I dans le sens de la longueur.

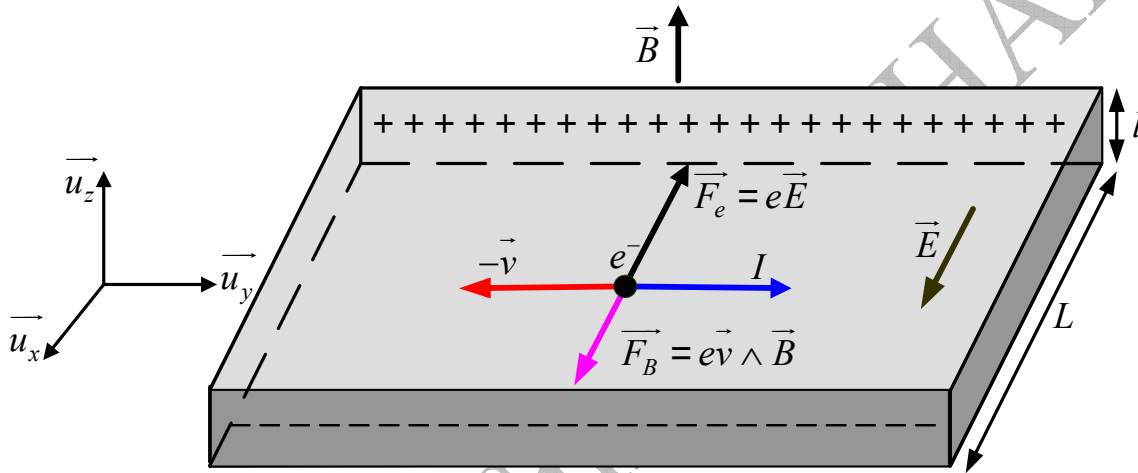


Fig 4.5: Effet Hall

Les électrons suivent des trajectoires parallèles à l'axe Oy , en se déplaçant à la vitesse $-\vec{v}$ dans le sens contraire du sens conventionnel du courant qui circule dans le sens Oy .

Quand on applique un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculairement à la plaque (selon la figure, suivant Oz), Chaque électron est soumis à une force magnétique $\vec{F}_B = -e \cdot -\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_B = e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$. Sous l'action de cette force magnétique, les électrons dévient vers la droite de la plaque, côté qui se charge donc négativement. L'autre coté se charge, quant à lui, positivement, à cause de la diminution du nombre d'électrons qui ont été déviés vers le côté droit. Cela entraîne l'apparition d'un champ électrique $\vec{E}$ parallèle à l'axe Ox .

Les électrons sont soumis à chaque instant à deux forces :

La force magnétique : $\vec{F}_B = e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$, produite par le champ magnétique et dirigée dans le sens de Ox ,

La force électrique : $\vec{F}_e = -e \vec{E}$, produite par le champ électrique et dirigée dans le sens contraire de Ox .

L'égalité des deux forces conduit à un état d'équilibre, ce qui fait apparaître une différence de potentiel transversale entre les bords opposés de la plaque. Cette différence de potentiel est proportionnelle à $\vec{B}$.

Ce phénomène que nous venons de décrire s'appelle **effet Hall ordinaire ou négatif**. Il apparaît sur la plupart des métaux, comme le cuivre, l'argent, l'or, le platine ...etc. Mais dans quelques métaux, comme le zinc, le cobalt, le fer et dans d'autres matériaux, tels que les semi-conducteurs, il se produit **l'effet Hall positif**. Ce dernier s'interprète par le fait que ce sont les charges positives qui se déplacent dans le sens du courant électrique, ce qui inverse totalement le raisonnement que nous avons suivi pour l'effet négatif.

L'effet hall découvert en 1879, offre une méthode très intéressante pour la détermination du signe des porteurs de charges dans un conducteur donné.

Parmi les intérêts de l'effet Hall, la possibilité de déterminer la densité de charge, c'est à dire le nombre de charges par unité de volume, comme le montre les calculs ci après.

$$\text{A l'équilibre : } F_e = F_B \Rightarrow evB = eE \Rightarrow E = vB$$

On appelle **tension Hall**, la différence de potentiel qui apparaît entre les bords de la plaque : $U_H = E.L \Rightarrow E = \frac{U_H}{L}$

$$\text{On sait que : } I = JS = nevS$$

$$\text{Et puisque } S \text{ est la section de la plaque, on a : } I = nevLl \Rightarrow v = \frac{I}{neLl}$$

D'où la densité des porteurs de charges :

$$vB = \frac{U_H}{L} \Rightarrow \frac{I}{neLl} B = \frac{U_H}{L} \Rightarrow \boxed{n = \frac{IB}{eLU_H}}$$

Pour les métaux ordinaires la densité de charges est de l'ordre de $10^{28} / m^3$.

D/ La règle d'Ampère (قاعدة أمبير) :

C'était Oersted, qui le premier a démontré expérimentalement que le courant électrique produit un champ magnétique dans la région qui l'entoure.

Les expériences dans ce domaine se sont succédées durant plusieurs années. Il a fallu attendre l'année 1826 pour qu'Ampère parvienne enfin, en l'espace de quelques jours, à la loi empirique qui porte son nom.

La figure 4.6, représente plusieurs courants électriques passant à travers la courbe fermée (C).

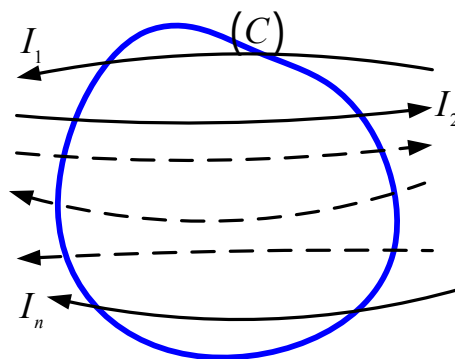


Fig 4.6: Courants à travers une courbe fermée

Enoncé de la règle d'Ampère :

« La circulation du champ magnétique le long d'une courbe fermée qui embrasse les courants $I_1, \dots, I_n, I_1$, est égale au produit de la permittivité magnétique dans le vide (μ_0) par la somme algébrique des intensités de courants embrassés par le contour (C) ».

$$A_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i \quad (4.13)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T.m.A}^{-1}$$

Exemple 4.1 :

Un courant électrique traverse un conducteur cylindrique de longueur infinie et de rayon R . La densité de courant $\vec{J}$ est constante à travers toute la section du cylindre et parallèle à l'axe OZ . On considère I_0 l'intensité totale qui traverse le cylindre. Calculer le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. Représenter graphiquement ses variations.

Réponse :

Considérons un cercle de rayon r entourant le cylindre. Le plan du cercle est perpendiculaire au cylindre (figure 4.7-a-). La section S_0 du cylindre est traversée par des courants d'intensité totale I_0 . La circulation de l'induction du champ magnétique suivant la trajectoire fermée (C) est donc égale à :

$$A_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi \cdot r$$

$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot I_0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi \cdot r}$$

Cette expression représente l'intensité du champ magnétique à l'extérieur du cylindre, et qui résulte du passage de courant électrique dans le cylindre. Comme on peut le voir, ce champ est inversement proportionnel à la distance r ($R < r$).

Quant à l'intérieur du cylindre $r < R$, le courant qui passe à travers le cercle (figure 4.4-b-) est I :

$$J = \frac{I_0}{S_0} = \frac{I}{S} \Rightarrow I = \frac{I_0}{S_0} \cdot S$$

$$S_0 = \pi R^2, \quad S = \pi r^2$$

La circulation est donc égale à :

$$A_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot I$$

$$\mu_0 \cdot I = \mu_0 \cdot I_0 \frac{S}{S_0} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi \cdot R^2} \cdot r$$

Dans ce cas, l'intensité du champ magnétique en un point quelconque à l'intérieur du cylindre est proportionnelle à la distance séparant l'axe du cylindre du point considéré.

La figure 4.7-c- représente les variations de l'intensité du champ magnétique en fonction de la distance .

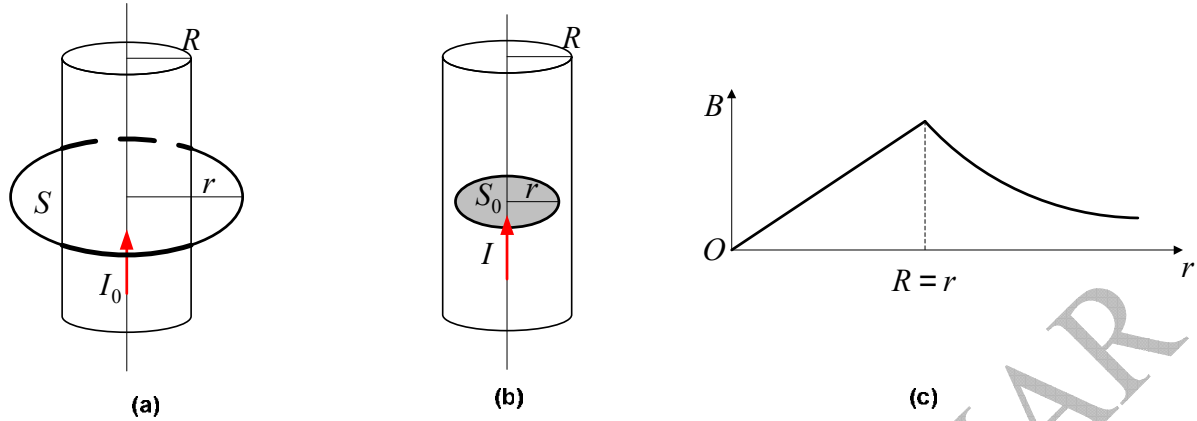


Fig 4.7: Application de la règle d'Ampère

E/ La loi de Biot et Savard (J.Batiste Biot 1774-1862/Félix Savard 1791-1841)

Cette loi expérimentale, établie en 1820, permet le calcul de l'induction magnétique en un point de l'espace, créée par un conducteur, quelque soit sa forme, et traversé par un courant électrique.



Fig 4.8: Champ magnétique élémentaire créé par un courant électrique élémentaire

1/ Enoncé de la loi :

Un courant électrique d'intensité I , parcourant un élément $d\vec{l}$ d'un conducteur, produit un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ égal à :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \cdot d\vec{l} \wedge \vec{u}_r \quad (4.14)$$

$\vec{u}_r$: représente le vecteur unitaire suivant la direction du vecteur position $\vec{r}$. Le sens de $d\vec{B}$ est déterminé par la règle de la vis ou celle de la main droite.

Si on veut calculer l'induction magnétique totale $\vec{B}$, produite par tout le conducteur, il suffit d'intégrer :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_{\text{conducteur}} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \quad (4.15)$$

1/ Application de la loi de Biot et Savard :

a/ Champ d'induction magnétique produit par un courant rectiligne infini

(حقل التحريض المغناطيسي الناتج عن تيار مستقيم لا منتهى الطول) :

La figure 4.9 représente un fil infiniment long, parcouru par un courant électrique d'intensité I . On se propose de déterminer le champ d'induction magnétique produit par tout le fil en un point P situé sur l'axe Oy .

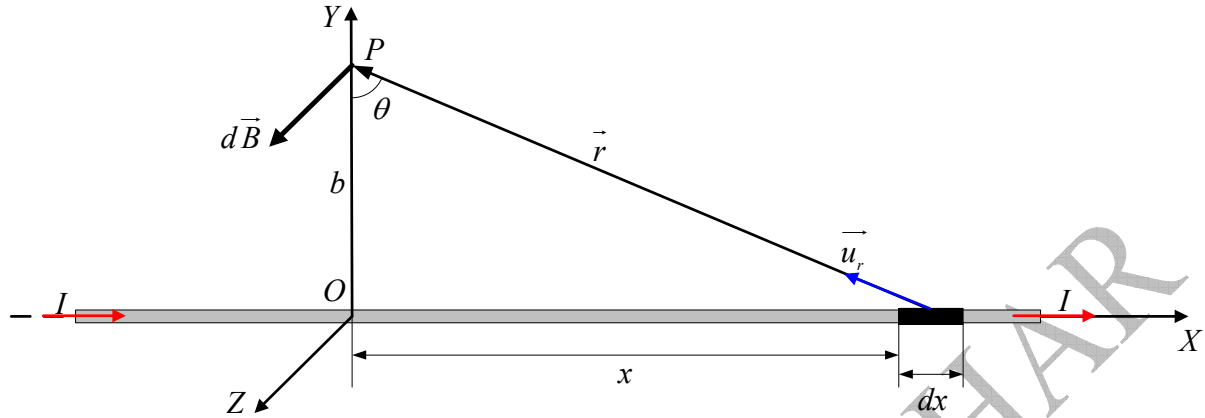


Fig 4.9: Champ magnétique élémentaire créé par un courant électrique élémentaire rectiligne

Pour pouvoir appliquer la loi de Biot et Savard, on doit déterminer les composantes des vecteurs $d\vec{l}$ et $\vec{r}$ dans le repère cartésien $Oxyz$. Et puisque $\vec{r} = r\vec{u}_r \Rightarrow \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, on peut écrire la loi sous la forme :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (4.16)$$

$$d\vec{l} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -x \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & 0 \\ -x & b & 0 \end{vmatrix} = b \cdot dx \cdot \vec{k} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{b \cdot d\vec{l}}{r^3} \vec{k}$$

Puisque :

$$r = \frac{b}{\cos \theta}, \quad x = b \cdot \tan \theta \Rightarrow dx = b \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

Par substitution, on obtient :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot b} \cos \theta \cdot d\theta \cdot \vec{k}$$

En intégrant cette expression de $-\pi/2$ à $+\pi/2$, on obtient:

$$\vec{B} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot b} \vec{k} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta \cdot d\theta$$

Finalement, on arrive à l'expression finale :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot b} \vec{k} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot b}} \quad (4.17)$$

Le vecteur $\vec{B}$ dans ce cas, est perpendiculaire au plan Oxy et dirigé selon l'une des règles d'orientation.

Remarque : Dans le cas d'un conducteur rectiligne, les lignes du champ magnétique, dessinent des cercles dont le centre est le conducteur et auquel elles lui sont perpendiculaires.

b/ Champ d'induction magnétique produit par un courant circulaire

(حقل التحريض المغناطيسي الناتج عن تيار دائري) :

La figure 4.10 représente un anneau parcouru par un courant électrique d'intensité constante I . On se propose de trouver le champ d'induction magnétique sur l'axe Oz de l'anneau.

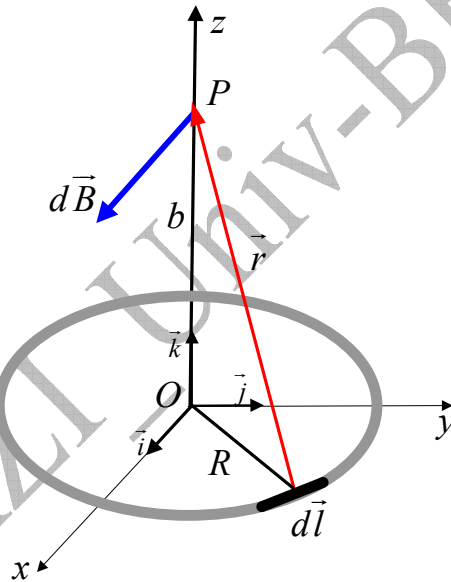


Fig 4.10: Champ magnétique produit par un courant circulaire

On choisit sur l'anneau une longueur élémentaire $d\vec{l}$, puis on calcule le champ magnétique élémentaire produit au point P . Afin d'obtenir le champ total, on doit intégrer.

D'après la figure 4.11, on a :

Les angles α et θ ont des côtés perpendiculaires, donc :

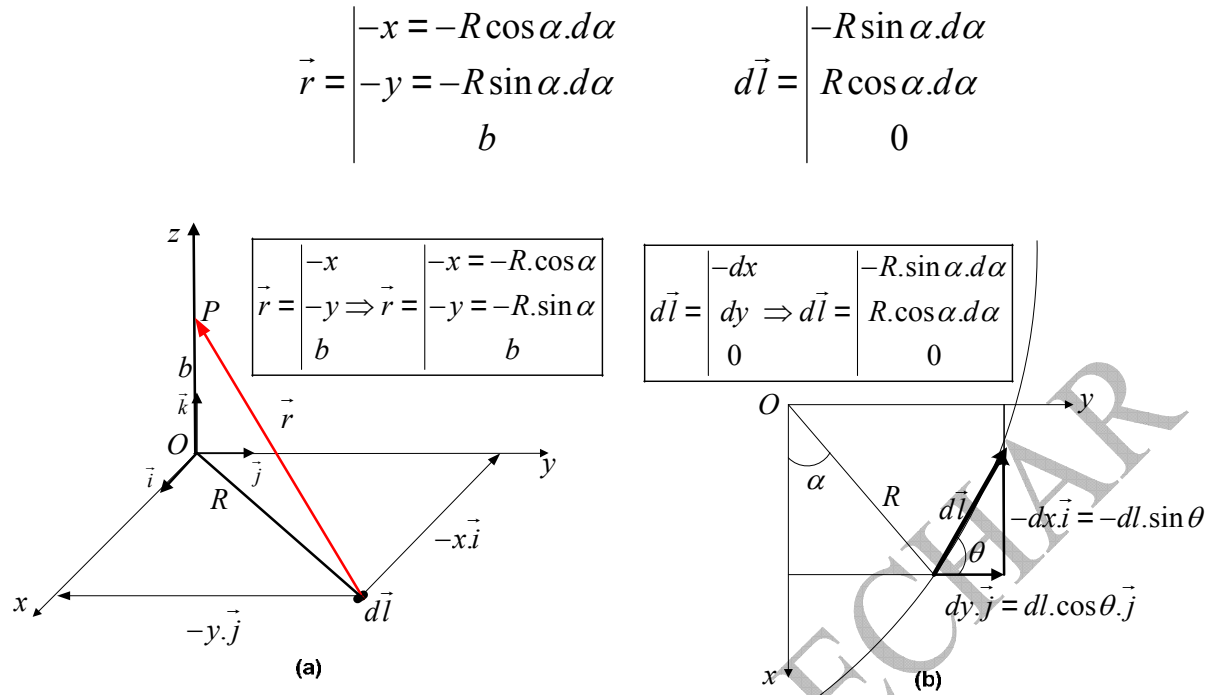
$$\left. \begin{array}{l} Oy \perp Ox \\ dl \perp R \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \theta$$

$$d\vec{l} = -dx\vec{i} + dy\vec{j} \Rightarrow d\vec{l} = -dl \cdot \sin \alpha \vec{i} + dl \cdot \cos \alpha \vec{j}$$

Et puisque $dl = R \cdot d\alpha$

D'où : $d\vec{l} = -R \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \vec{i} + R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \vec{j}$

Donc, les composantes des vecteurs $d\vec{l}$ et $\vec{r}$ sont :

Fig 4.11: Détermination des vecteurs $d\vec{l}$ et $\vec{r}$

On applique la loi de Biot et Savard :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} . d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . r^3} . d\vec{l} \wedge \vec{r}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . r^3} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin \alpha & R \cos \alpha & 0 \\ -R \cos \alpha & -R \sin \alpha & b \end{vmatrix} . d\alpha$$

$$d\vec{B} = \underbrace{\frac{\mu_0 . I}{4\pi . r^3} . (R . b \cos \alpha . d\alpha)}_{dB_x} \vec{i} + \underbrace{\frac{\mu_0 . I}{4\pi . r^3} . (R . b \sin \alpha . d\alpha)}_{dB_y} \vec{j} + \underbrace{\frac{\mu_0 . I}{4\pi . r^3} . (R^2 . d\alpha)}_{dB_z} \vec{k}$$

Il nous apparaît que $d\vec{B}$ a trois composantes : $d\vec{B} = d\vec{B}_x + d\vec{B}_y + d\vec{B}_z$

Maintenant, il suffit d'intégrer les trois composantes de 0 à 2π , pour obtenir les trois composantes du champ magnétique produit par tout l'anneau :

$$B_x = \int_0^{2\pi} dB_x = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 . I . R . b}{4\pi . r^3} \cos \alpha . d\alpha = \frac{\mu_0 . I . R . b}{4\pi . r^3} \cdot \int_0^{2\pi} \cos \alpha . d\alpha = 0$$

$$B_y = \int_0^{2\pi} dB_y = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 . I . R . b}{4\pi . r^3} \sin \alpha . d\alpha = \frac{\mu_0 . I . R . b}{4\pi . r^3} \cdot \int_0^{2\pi} \sin \alpha . d\alpha = 0$$

$$B_z = \int_0^{2\pi} dB_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 . I . R^2}{4\pi . r^3} d\alpha = \frac{\mu_0 . I . R^2}{4\pi . r^3} \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 . I . R^2}{4\pi . r^3} . 2\pi$$

Finalement, on arrive à :

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_z = \frac{\mu_0 R^2 I}{2 \cdot [R^2 + b^2]^{3/2}} \vec{k}} \Rightarrow \boxed{B = B_z = \frac{\mu_0 R^2 I}{2 \cdot [R^2 + b^2]^{3/2}}} \quad (4.18)$$

Cette expression n'est valable que si le point P appartient à l'axe qui est perpendiculaire à l'anneau et passe par son centre.

Discussion : le champ magnétique prend des valeurs particulières en certains points de l'anneau parcouru par un courant d'intensité I :

- **Premier cas :** Au centre de l'anneau $b = 0$, et quelque soit son rayon, on aura :

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2b}} \quad (4.19)$$

- **Deuxième cas :** Si l'anneau est de rayon très petit $b \gg R$, on aura :

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2b^3}} \quad (4.20)$$

- **Troisième cas :** dans le cas d'une bobine plate, constituée de N spires, on prend le rayon moyen des spires et on multiplie le résultat précédent par le nombre N :

$$B = B_z = \frac{\mu_0 R^2 I}{2 \cdot [R^2 + b^2]^{3/2}} \cdot N$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2b} \cdot N$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2b^3} \cdot N} \quad (4.21)$$

c/ Champ d'induction magnétique produit par un courant solénoïdal

(حقل التحريض المغناطيسي الناتج عن تيار حلزوني)

Là aussi, on ne s'intéresse qu'à un point situé sur l'axe du solénoïde.

Soit une bobine de longueur l , composée de N spires, parcourue par un courant électrique d'intensité I . On demande de calculer le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ en un point P situé sur l'axe oz de la bobine. Figure 4.12

On choisit le point P comme origine, et on considère la longueur élémentaire dz de la bobine, et qui contient en réalité un nombre de spires égal à $\frac{N}{l} \cdot dz$.

En utilisant le résultat du champ magnétique produit par le courant circulaire, on peut écrire :

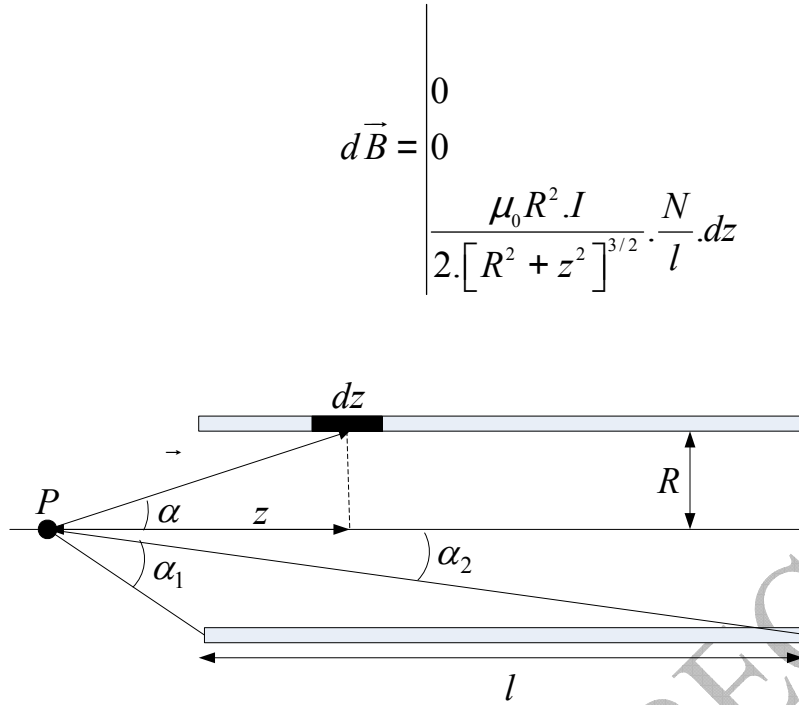


Fig 4.12: Champ magnétique créé par un courant électrique sinusoïdal

Sur la figure 4.12, on voit que :

$$z = R \cot \alpha \Rightarrow dz = -R \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

Afin d'arriver facilement à bout de l'opération d'intégration, on doit faire un changement de variable :

$$R^2 + z^2 = R^2 + R^2 \cot^2 \alpha = R^2 (1 + \cot^2 \alpha) = R^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Par substitution dans l'expression de $d\vec{B}$, on trouve :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2 [R^2 / \sin^2 \alpha]^{3/2}} \cdot \frac{N}{l} \cdot (-R / \sin^2 \alpha) d\alpha \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{N}{l} d\alpha$$

Pour obtenir le champ d'induction magnétique produit au point P , situé sur l'axe oz de la bobine, par le courant électrique parcourant cette bobine, on doit intégrer d'un bord à l'autre de la bobine, soit de α_1 à α_2 , on obtient donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2l} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{k} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2l} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \quad (4.22)$$

Discussion : le champ magnétique prend des valeurs particulières en certains points du solénoïde parcouru par un courant d'intensité I :

- **Premier cas** : Le point O se trouve au centre d'une bobine très longue, tel que $\alpha_1 = \pi$ et $\alpha_2 = \pi/2$. Voir figure 4.13(a). on aura :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} \vec{k} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} \quad (4.23)$$

- **Deuxième cas** : Le point se situe sur l'axe et au bord de la bobine tel que $\alpha_2 = 0$ (figure 4.13 (b)), on aura :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2l} \vec{k} ; B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2l} \quad (4.24)$$

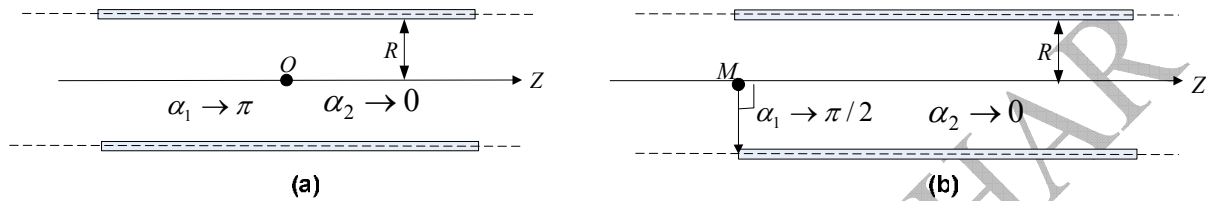


Fig 4.13: Champ magnétique créé par un courant électrique sinusoïdal

E/ Le dipôle magnétique (ثنائي القطب المغناطيسي)

1/ Le couple électromagnétique (المزدوجة الكهرومغناطيسية) :

La figure 4.14 (a) représente un cadre rectangulaire $MNPQ$, parcouru par un courant d'intensité I constante, et de sens comme indiqué sur la figure.

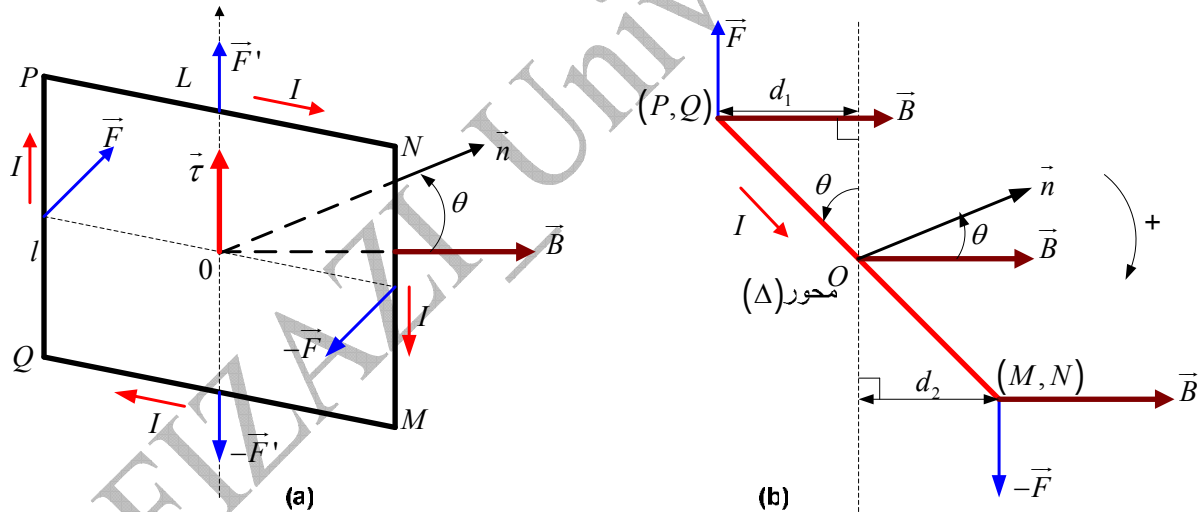


Fig 4.14: Couple électromagnétique

Ce conducteur baigne dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ qui forme avec la normale $\vec{n}$ de la surface du conducteur, l'angle θ . La normale $\vec{n}$ est dirigée par rapport au courant I selon la règle de la vis.

Les deux forces $\vec{F}'$ agissent sur les deux côtés NP et MQ . Ces forces sont directement opposées et non aucune action, puisque le cadre est indéformable ; elles ne produisent aucun moment, donc aucune rotation.

Les deux forces $\vec{F}$ agissent sur les deux côtés MN et PQ , et produisent un couple capable de faire tourner le cadre jusqu'à ce qu'il se stabilise dans une position tel que son

plan soit perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$. Les côtés MN et PQ sont perpendiculaires à $\vec{B}$ quant le cadre atteint sa position d'équilibre.

La figure 4.14 (b) montre la projection du cadre vertical $MNPQ$ sur un plan horizontal. En se basant sur cette figure, on peut déterminer la valeur du couple :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\Delta} &= F.d_1 + F.d_2 \\ d_1 &= d_2 = \frac{L}{2} \cdot \sin \theta \\ F &= B.I.L \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{\Gamma_{\Delta} = BIL.l \sin \theta} \quad (4.25)$$

Puisque l'aire du cadre est égale à $S = Ll$, on a donc :

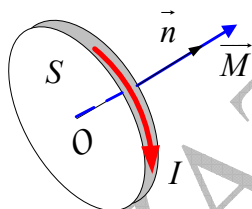
$$\boxed{\Gamma_{\Delta} = BIS \sin \theta} \quad (4.26)$$

Il faut noter ici que ce couple de rappel permet au cadre de regagner sa position d'équilibre, c'est-à-dire revenir à la position perpendiculaire au champ $\vec{B}$ ($\vec{n} // \vec{B}$, $\theta = 0$), et cela dans le cas où il est écarté de sa position d'équilibre. Ce résultat obtenu dans le cas d'une boucle rectangulaire est valable pour n'importe quel circuit, quelle que soit sa forme.

Résultat : Tout circuit plan, parcouru par un courant électrique, et se trouvant dans un champ magnétique uniforme, est soumis à un effet directionnel résultant du couple. Ce couple électromagnétique a pour rôle de placer le plan du cadre perpendiculaire à $\vec{B}$.

1/ Le moment magnétique (العزم المغناطيسي) :

Toute boucle (ou autre forme quelconque) de courant électrique sur laquelle agit un couple électromagnétique est appelé « **dipôle magnétique** ».



Définition : On appelle vecteur moment magnétique, ou moment dipolaire magnétique, du circuit d'un cadre d'aire S , l'expression :

$$\boxed{\vec{M} = I.S.\vec{n}} \quad (4.27)$$

Fig 4.15: Moment magnétique

La figure 4.15 représente le vecteur du moment magnétique dans le cas d'une spire.

Partant de cette définition, on peut écrire l'expression du couple électromagnétique sous la forme :

$$\boxed{\Gamma = MB \sin \theta \Leftrightarrow \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}} \quad (4.28)$$

E/ Induction électromagnétique (التحريض الكهرومغناطيسي)

1/ Le flux magnétique (التدفق المغناطيسي) :

- **Définition :** On appelle flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface élémentaire dS , la grandeur :

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_S B \cos \theta dS} \quad (4.29)$$

$d\vec{S}$ représente le vecteur de la surface élémentaire, qu'on considère toujours perpendiculaire à la surface et quittant la surface selon le sens positif choisi (selon la règle de la vis) sur le contour de la surface. On considère aussi, $\vec{B}$ uniforme à travers la surface élémentaire dS . Le vecteur $\vec{n}$ représente le vecteur unitaire de la normale à la surface.

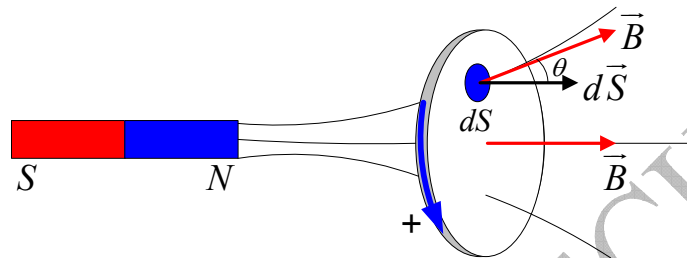


Fig 4.16: Flux magnétique à travers une surface

- **Unité du flux** : le weber (Wb) en mémoire à Wilhelm Edward Weber 1804-1891.
- **Comment varie B quant on approche ou on éloigne l'aimant de la bobine ?**
 - Quand on approche l'aimant de la bobine, B augmente en chaque point de la surface, donc Φ augmente aussi (c'est à dire que le nombre de lignes de champ traversant la surface augmente).
 - Quand on éloigne l'aimant de la bobine, B diminue en chaque point de la surface, donc Φ diminue aussi (c'est-à-dire que le nombre de lignes de champ traversant la surface diminue).

Exemple 2.4 :

1/ On a choisit un sens positif de parcourt sur la bobine plate (C), représentée sur la figure 4.17.

- a) Le flux est-il positif ou négatif ? en éloignant l'aimant droit de la bobine, le flux augmente-t-il ou diminue-t-il ?
- b) Répondre aux mêmes questions en intervertissant les pôles de l'aimant.

2/ Cette bobine est constituée de 20 spires d'aire 10cm^2 , et baigne dans un champ magnétique uniforme d'intensité $0,1\text{T}$. La bobine est perpendiculaire aux lignes de champ.

- a) on déplace la bobine d'un mouvement de translation, le flux varie-t-il ?
- b) On fait tourner la bobine de 180° autour de l'un de ses diamètres. Calculer la variation du flux à travers la bobine.

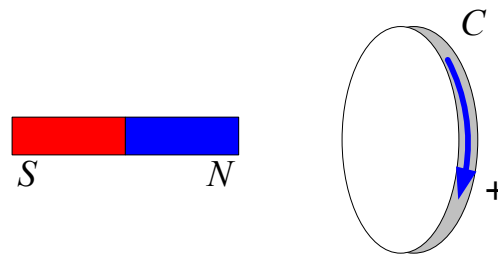


Fig 4.17: Induction électromagnétique

Réponse :

1/ a) Dans la bobine les vecteurs $\vec{n}, \vec{B}$ sont parallèles et de mêmes sens, figure 4.18(a), $(0 \leq \theta < \pi/2)$: $\Phi = B.S.\cos\theta > 0$

Quand on éloigne l'aimant de la bobine, l'intensité de $\vec{B}$ au niveau de sa surface diminue, donc, le flux diminue.

b) Dans la bobine les vecteurs $\vec{n}, \vec{B}$ sont parallèles et de sens contraires, figure 4.18(b), $(\pi \geq \theta > \pi/2)$: $\Phi = B.S.\cos\theta < 0$

Quand on éloigne l'aimant de la bobine, l'intensité de $\vec{B}$ au niveau de sa surface diminue, donc, le flux diminue.

2/ a) Puisque $\vec{B}$ est uniforme, le flux reste invariable.

c) En position initiale : $\Phi_1 = N.B.S \cos 0 = 2 \times 10^{-3} \text{ Wb}$

En position finale : $\Phi_2 = N.B.S \cos 180^\circ = -2 \times 10^{-3} \text{ Wb}$

Donc, la variation du flux est égale à : $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -4 \times 10^{-3} \text{ Wb}$

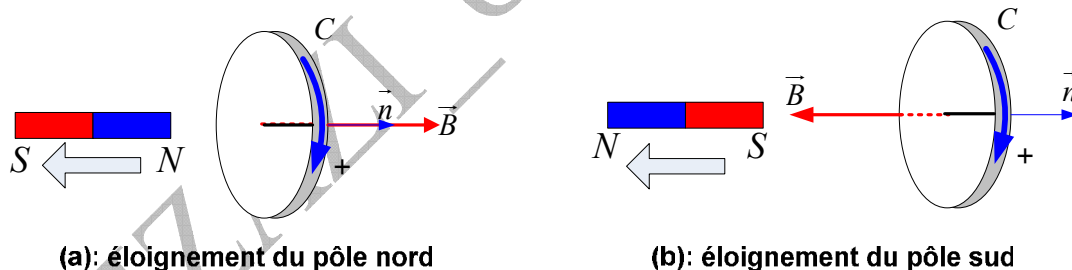


Fig 4.18

1/ L'induction électromagnétique (التحريض الكهرومغناطيسي) :

Jusqu'à présent, nous avons considéré que les champs électrique et magnétique étaient indépendants du temps, ils sont donc au repos. Quand est-il si les deux champs dépendaient du temps ?

En 1830, Henry Joseph (1797-1878) et Michaël Faraday (1791-1867), ont découvert simultanément, le phénomène de l'induction électromagnétique. Ce phénomène est à la base du principe de fonctionnement des moteurs électriques, des transformateurs, et d'un bon nombre d'appareils électromagnétiques que nous utilisons quotidiennement. Mais le plus important, c'est son exploitation pour la production du courant électrique alternatif.

■ Description de l'expérience et terminologie :

La figure 4.19 représente une bobine creuse B , constituée d'un grand nombre de spires, reliée à un galvanomètre très sensible. Au début l'aimant est au repos et orienté selon l'axe de la bobine.

Lorsqu'on approche l'aimant de l'intérieur de la bobine, avec une certaine vitesse, le galvanomètre indique le passage d'un bref courant qui disparaît avec l'arrêt du mouvement de l'aimant.

Lorsque on retire l'aimant de la bobine, le galvanomètre indique le passage d'un bref courant dans le sens contraire signalé précédemment.

Le courant enregistré s'appelle le **courant induit** (تيار تحريضي), l'aimant est l'**inducteur** (المحرز), et la bobine le **circuit induit** (الدائرة المتحيزة).

On peut obtenir un courant induit, en faisant tourner la bobine devant l'aimant fixe.

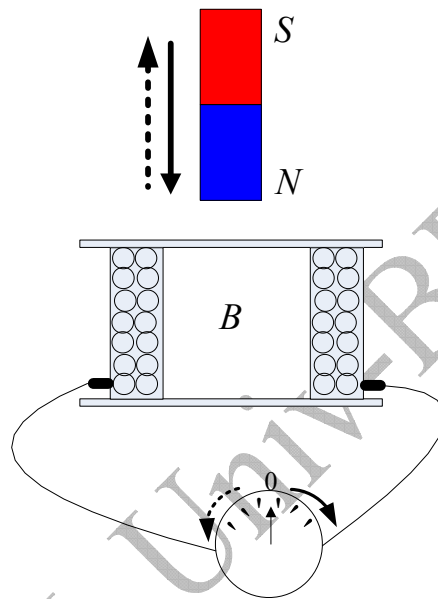


Fig 4.19: Induction électromagnétique

■ Interprétation:

La cause de l'apparition de courant induit est la variation du flux magnétique à travers la surface de la bobine. Le courant induit ne dure que le temps de la **variation du flux**.

L'apparition de ce courant induit prouve la présence d'une force électromotrice dont le siège est la bobine. Cette force électromotrice dépend de la vitesse de variation du flux magnétique $d\Phi_B / dt$.

■ Énoncé de la loi de Faraday-Henry:

Dans tout circuit fermé baignant dans un champ magnétique, il se crée une force électromotrice d'induction égale à la dérivée du flux magnétique, à travers le circuit, par rapport au temps (c'est-à-dire égale à la vitesse de variation du flux) avec changement de signe :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.30)$$

■ La loi de Lenz (Henry Frédéric Lenz 1804-1885):

Cette loi permet la détermination du sens du courant induit.

Enoncé :

« Le sens du courant induit est tel qu'il s'oppose par ses effets à la cause qui lui a donné naissance »

Cette loi trouve son explication dans les exemples représentés sur la figure 4.20. Connaissant le nom de la face, on peut en déduire le sens du courant induit et vis versa.

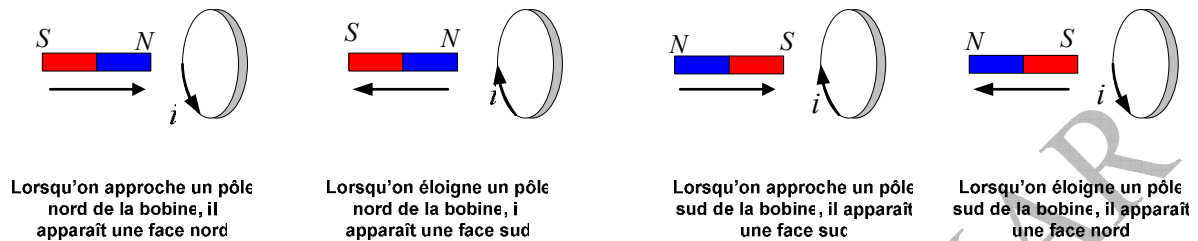


Fig 4.20: détermination du sens du courant induit par application de la loi de Lenz

Exemple 3.4 :

Une bobine plate, constituée de $N = 500$ spires circulaires, de rayon $r = 0,1m$; son axe est initialement parallèle au vecteur $\vec{B}$ d'un champ magnétique uniforme d'intensité $0,2T$ (figure 4.21). En l'espace de $0,5s$, son axe devient perpendiculaire à $\vec{B}$.

Quelle est la force électromotrice d'induction moyenne qui se crée ?

Quel est le sens du courant induit ?

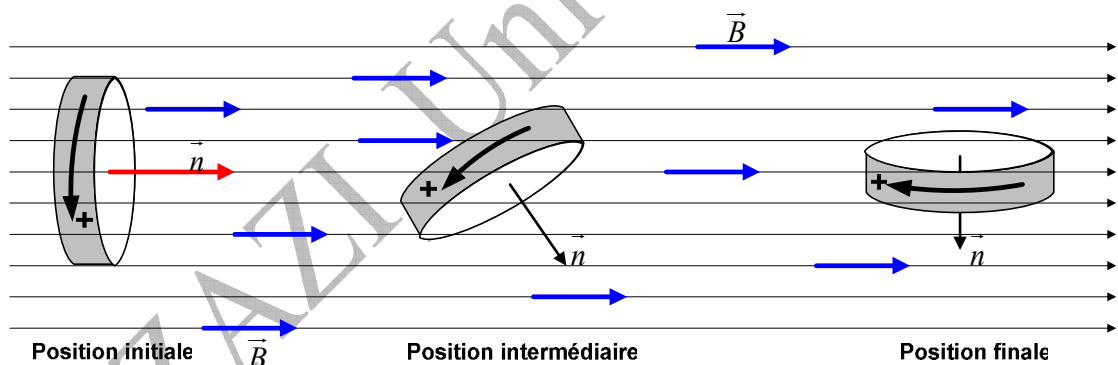


Figure 4.21

Réponse :

Dans sa position initiale, on oriente le vecteur unitaire $\vec{n}$, normal à la surface des spires, dans le même sens que $\vec{B}$. Donc, les spires sont dirigées dans le sens positif montré sur la figure. Dans cette position, le flux est positif et égal à :

$$\Phi_0 = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot S = N \cdot B \cdot S, \quad \Phi_0 = 500 \times 3,14 \times (0,1)^2 \times 0,2 \Rightarrow \boxed{\Phi_0 = 3,14 Wb}$$

Dans la position finale, $\Phi_1 = 0$ car $\vec{B} \perp \vec{n}$. La variation du flux est donc égale à :

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = -3,14 Wb$$

La force électromotrice d'induction moyenne durant $\Delta t = 0,5s$, est égale à :

$$e_{moy} = -\frac{-3,14}{0,5} \Rightarrow \boxed{e_{moy} = 6,28V}$$

Le flux Φ décroît, et le courant induit, durant tout le temps du mouvement, circule dans le sens positif choisi.

Dans ce chapitre, notre attention a été concentrée sur l'un des plus importants effets du courant électrique : c'est l'effet magnétique, qui trouve ses nombreuses applications dans l'industrie, et essentiellement en électromécanique.

AFIZAZI _ Univ-BECHAR

EXERCICES********تمارين****Exercice 4.1**

Un éclair transporte couramment un courant maximum de $20kA$. Quel est le champ magnétique maximum qu'il produit à $1m$? à $300m$?

التمرين 1.4

ينقل برق عادة تيارا أعظميا مقداره $20kA$. ما هو الحقل المغناطيسي الأعظمي الذي ينتجه هذا البرق على بعد $1m$ ؟ على بعد $300m$ ؟

Exercice 4.2

Une ligne rectiligne de tension est située à une hauteur de $12m$ au dessus du sol. Elle transporte un courant de $300A$ dans la direction de l'Ouest.

Décrire le champ magnétique qu'elle produit et calculer sa valeur sous la ligne au niveau du sol.

Comparer le avec le champ magnétique terrestre.

تمرين 2.4

يقع خط مستقيم للتوتر على ارتفاع $12m$ فوق سطح الأرض و ينقل تيارا قدره $300A$ في اتجاه الغرب.

صف الحقل المغناطيسي الذي ينتجه و احسب قيمته تحت الخط على مستوى سطح الأرض. قارنه بالحقل المغناطيسي الأرضي.

Exercice 4.3

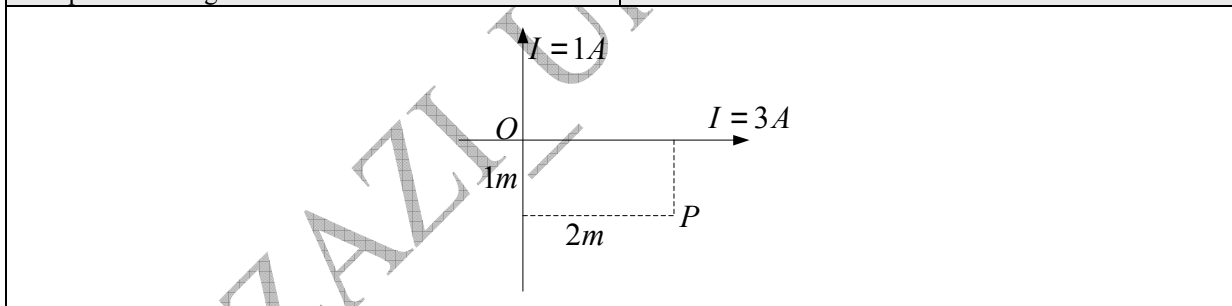
Deux courants électriques perpendiculaires de $1A$ et $3A$ sont orientés comme sur le dessin et se croisent au point O .

Quelles sont l'intensité et l'orientation du champ magnétique au point P situé dans le plan des deux courants, à $1m$ et $2m$ des deux courants comme indiqué dans la figure ?

التمرين 3.4

تياران كهربائيان متعامدان ذي $1A$ و $3A$ موجهان كما هو مبين على الرسم و يتقاطعان في النقطة O .

ما هما شدة و توجيه الحقل المغناطيسي في النقطة P الواقعة في مستوى التيارين، على بعدي $1m$ و $2m$ من التيارين كما هو مبين في الشكل؟

**Exercice 4.4**

Soit une spire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I .

1/ Calculer le champ magnétique créé le long de l'axe OZ , à une distance z du centre O , en fonction de l'angle θ sous lequel on voit la spire (figure ci-dessous).

2/ Retrouver l'expression

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

3/ Quelle est la forme approchée de cette expression à grandes distances de l'axe OZ ?

4/ Exprimer le champ magnétique B_z en fonction du moment magnétique M .

التمرين 4.4

لتكن حلقة نصف قطرها R يجتازها تيار شدته I .

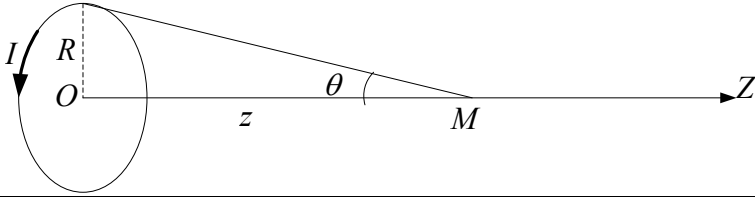
1/ أحسب الحقل المغناطيسي على طول المحور OZ ، على بعد z من المركز O ، بدلالة الزاوية θ التي نرى من خلالها الحلقة (الشكل في الأسفل).

2/ أوجد من جديد العبارة

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

3/ ما هو الشكل التقريبي لهذه العبارة على مسافات كبيرة للمحور OZ ؟

4/ عبّر عن الحقل المغناطيسي B_z بدلالة العزم المغناطيسي M .

5/ En déduire le champ B_o créée au centre O de la spire.	5/ إستنتج الحقل B_o الناتج في المركز O للحلقة.
	

Exercice 4.5

Deux fils conducteurs rectilignes, infinis, parallèles, et distants de $d = 20\text{cm}$, sont traversés l'un par un courant $I_1 = 20\text{A}$, l'autre par un courant $I_2 = 80\text{A}$.

1/ les courants sont de même sens. Calculer l'intensité du champ magnétique résultant en un point M situé dans le plan des conducteurs, à égale distance de chacun d'eux. Trouver dans ce plan la distance par rapport aux conducteurs, de la droite où le champ magnétique est nul.

2/ Même questions avec des courants de sens contraires.

3/ En déduire la définition légale de l'ampère.

التمرين 5.4

سلكان ناقلان مستقيمان، لامتناهين، متوازيان، و متباعداً بـ $d = 20\text{cm}$ ، يجتاز أحدهما تيار $I_1 = 20\text{A}$ ، و يجتاز الآخر تيار $I_2 = 80\text{A}$.

1/ التياران لهما نفس الاتجاه. أحسب شدة الحقل المغناطيسي الناتج في نقطة M الواقعة في مستوى الناقلين، و على نفس البعد من كل منهما. أوجد في هذا المستوى المسافة بالنسبة للناقلين، للمستقيم حيث الحقل المغناطيسي معدوم.

2/ نفس الأسئلة مع تيارين متعاكسي الاتجاهين.

3/ إستنتج التعريف القانوني للأمبير.

Exercice 4.6

Une particule de masse 5.10^{-4}kg porte une charge de $2,5.10^{-8}\text{C}$. On communique à la particule une vitesse initiale horizontale de 6.10^4ms^{-1} .

Quelles sont la grandeur et la direction du champ magnétique minimum qui maintiendra la particule sur une trajectoire horizontale en compensant l'effet de la pesanteur ?

التمرين 6.4:

جسيمة كتلتها 5.10^{-4}kg تحمل شحنة $2,5.10^{-8}\text{C}$. نعطي للجسيمة سرعة ابتدائية أفقية مقدارها 6.10^4ms^{-1} . ما هما شدة و جهة الحقل المغناطيسي الأصغري الذي يبقى الجسيمة على مسار أفقي بتعويض فعل الجاذبية؟

Exercice 4.7

1/ Calculer la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Ox) d'une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant I .

2/ Calculer de même la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Ox) (de $-\infty$ à $+\infty$) d'un solénoïde circulaire de rayon R , de longueur l et comportant N spires jointives parcourues chacune par un courant I .

التمرين 7.4

1/ أحسب تجوال الحقل المغناطيسي على طول المحور (Ox) (من $-\infty$ إلى $+\infty$) لحلقة دائرية نصف قطرها R يجتازها تيار I .

2/ أحسب تجوال الحقل المغناطيسي على طول المحور (Ox) (من $-\infty$ إلى $+\infty$) لحلزون دائري نصف قطره R ، طوله l و يشتمل على N حلقة متلاصقة يجتاز كل واحدة منها تيار I .

Exercice 4.8

Un spectromètre de masse permet la séparation des isotopes d'un même élément chimique. Il est constitué essentiellement d'une chambre d'ionisation, d'une chambre accélératrice et d'une chambre de séparation. (figure ci-dessous).

التمرين 8.4

جهاز قياس الطيف الكتلي يمكن من فصل نظائر نفس العنصر الكيميائي. يتكون أساساً من غرفة للتشريد، غرفة مسرعة و غرفة للفصل. (الشكل في الأسفل).

On veut séparer des ions lithium ${}^7_3\text{Li}^+$ et ${}^6_3\text{Li}^+$ porteurs de la charge $q = 1,6 \cdot 10^{19} \text{ C}$ et de masses respectives $m_1 = 7u.m.a$ et $m_2 = 6u.m.a$. Ces ions pénètrent en O' dans un champ électrique uniforme, créé par une tension $U = V_A - V_C = 4000 \text{ V}$ appliquée entre les 2 plaques horizontales P_1 et P_2 .

Les ions lithium pénètrent alors dans un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0,1 \text{ T}$, leur trajectoire devient circulaire dans la chambre de séparation.

La partie effectivement décrite de chaque trajectoire est un demi-cercle à la fin duquel les particules arrivent sur la plaque photographique dans les collecteurs C_1 et C_2 .

1/ Evaluer les vitesses v_1 et v_2 des deux types d'ions en fonction de q, m_1 ou m_2 et U à la sortie de la chambre d'accélération.

2/ Calculer les distances OC_1 et OC_2 .

$$1u.m.a = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

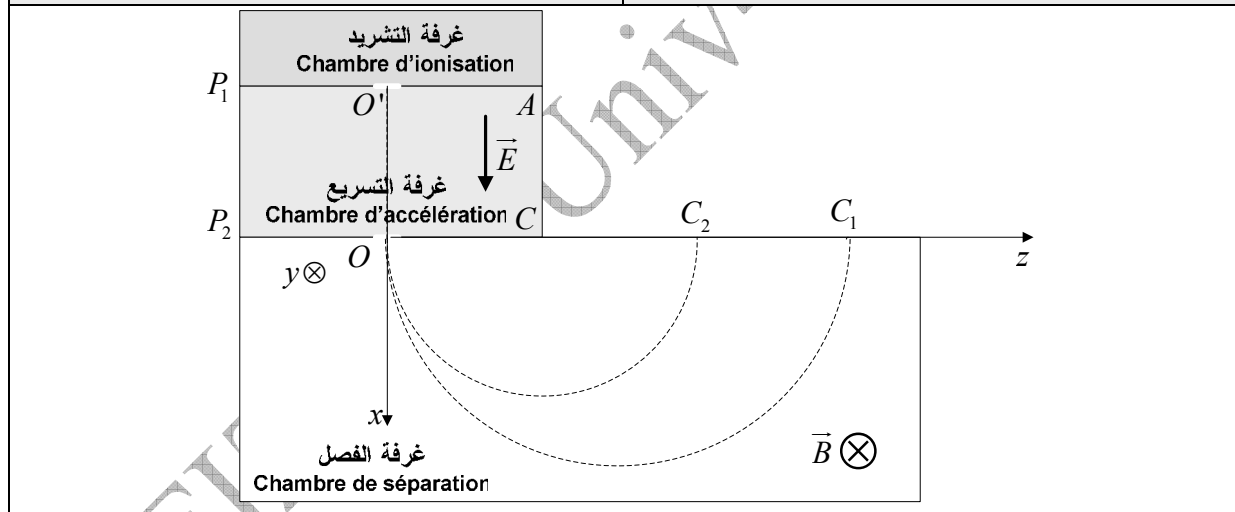
نريد فصل شوارد الليثيوم ${}^6_3\text{Li}^+$ و ${}^7_3\text{Li}^+$ الحاملين للشحنة $q = 1,6 \cdot 10^{19} \text{ C}$ وذاتي الكتلتين على التوالي $m_1 = 7u.m.a$ و $m_2 = 6u.m.a$. تدخل هذه الشوارد عند O' في حقل كهربائي منتظم، ناتج عن توتر $U = V_A - V_C = 4000 \text{ V}$ مطبق بين صفيحتين أفقيتين P_1 و P_2 .

تدخل شوارد الليثيوم بعد ذلك في حقل مغناطيسي شدته $B = 0,1 \text{ T}$ ، يصبح مسارها دائريا في غرفة الفصل. الجزء الموصوف فعليا لكل مسار هو نصف دائرة والذي في نهايته تصل الجسيمات إلى الصفيحة الفوتوغرافية في المجمعين C_1 و C_2 .

1/ أحسب سرعتين v_1 و v_2 لـصنفي الشوارد بدلالة q, m_1 أو m_2 و U عند الخروج من غرفة التسريع.

2/ أحسب المسافتين OC_1 و OC_2 .

$$1u.m.a = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$



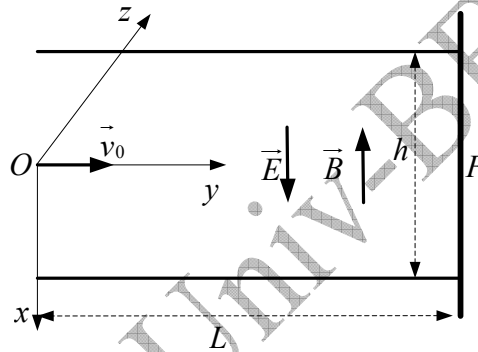
Exercice 4.9

Dans un dispositif expérimental un faisceau homocinétique d'ions pénètre en O , pris comme origine des espaces, entre les armatures d'un condensateur plan avec une vitesse initiale horizontale v_0 suivant la longueur. Un écran fluorescent (F) est positionné immédiatement à la sortie du condensateur. Ce condensateur plan est formé de deux plaques carrées de côté L et distantes de h . Le faisceau est soumis à une différence de potentiel U . Un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme parallèle au champ électrique $\vec{E}$ et de direction opposée, de module B règne dans cet espace. Nous

التمرين 9.4

في تركيب تجريبي تدخل حزمة شوارد في O ، المأخوذة كمبدأ للمسافات، بين لبوسي مكثفة مستوية بسرعة ابتدائية أفقية v_0 وفق الطول. توضع شاشة مستشعة (F) مباشرة عند مخرج المكثفة. تتكون هذه المكثفة المستوية من صفيحتين مربعيتين ضلع كل من هما L و متباعدتين بـ h . تخضع الحزمة لفرق في الكمون U . يسود في هذا المجال حقل مغناطيسي $\vec{B}$ منتظم موازي للحقل الكهربائي $\vec{E}$ و يعاكسه في الاتجاه، شدته B . نفترض أن السرعة الابتدائية كبيرة بالنسبة للسرعات المكتسبة بسبب الحقلين الكهربائي و

ferons l'hypothèse que la vitesse initiale v_0 est grande par rapport aux vitesses acquises à cause des champs électrique et magnétique. 1/ En supposant que le champ électrique agit seul ($B = 0$), trouver la trajectoire des ions dans le condensateur et la position des marques qu'ils laissent sur l'écran fluorescent. 2/ En supposant que le champ magnétique agit seul ($E = 0$), trouver la trajectoire des ions dans le condensateur et la position des marques qu'ils laissent sur l'écran fluorescent. 3/ Sous l'action simultanée des deux champs, montrer que l'équation de la trajectoire du faisceau est indépendante de la vitesse initiale du faisceau. 4/ Quelle est la grandeur qu'on peut déduire de cette expérience ?	المغناطيسي. 1/ بافتراض أن الحقل الكهربائي ينشط وحده ($B = 0$)، أوجد مسار الشوارد في المكثفة و موضع العلامات التي تتركها على الشاشة المستشعة. 2/ بافتراض أن الحقل المغناطيسي ينشط وحده ($E = 0$)، أوجد مسار الشوارد في المكثفة و موضع العلامات التي تتركها على الشاشة المستشعة. 3/ تحت التأثير المتزامن للحقلين معاً، بين أن مسار الحزمة مستقل عن السرعة الابتدائية للحزمة. 4/ ما هو المقدار الذي يمكن تحديده من خلال هذه التجربة؟
--	--

**Exercice 4.10**

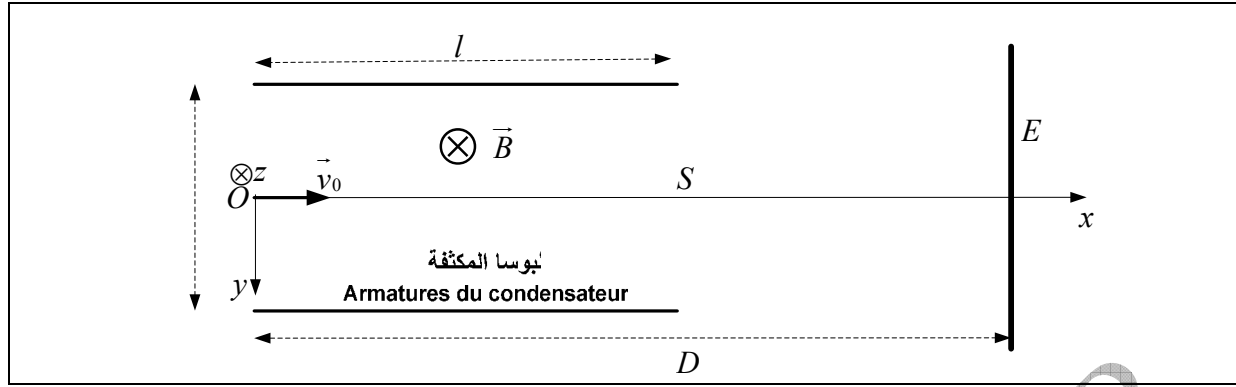
On utilise le dispositif représenté ci-dessous pour dévier un faisceau d'électrons qui ont une vitesse v_0 . Ce faisceau traverse, dans le vide, un champ magnétique uniforme d'induction $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{v}_0$. Le poids de l'électron est négligeable devant la force électromagnétique.

- 1/ Quelle est la trajectoire des électrons dans le champ ?
- 2/ Calculer la déviation α infligée par ce champ au faisceau à sa sortie du champ.
- 3/ Établir l'expression mathématique de la période du mouvement de l'électron.
- 4/ Comment varient le rayon de la trajectoire, la période et la vitesse angulaire si la vitesse d'injection des électrons est doublée?
- 5/ Quelle serait la trajectoire si le faisceau d'électrons entrait dans le champ magnétique avec un vecteur vitesse parallèle au vecteur champ ? Justifier.
- 6/ Décrire la trajectoire si l'angle en O entre $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ est différent de 0° et 90° .

التمرين 10.4

يستعمل التركيب المبين على الشكل في الأسفل من أجل انحراف حزمة إلكترونات لها نفس السرعة $\vec{v}_0$. تعبر هذه الحزمة، في الفراغ، حقلاً مغناطيسياً منتظماً تحريضه $\vec{B}$ عمودياً على $\vec{v}_0$. ثقل الإلكترون مهمل أمام القوة المغناطيسية.

- 1/ ما هو مسار الإلكترونات داخل الحقل؟
- 2/ احسب الانحراف α الناتج عن الحقل و الذي طرأ على الحزمة عند خروجها من الحقل.
- 3/ ضع العبارة الرياضية لدور حركة الإلكترون.
- 4/ كيف يتغير نصف قطر، دور و السرعة الزاوية إذا تضاعفت سرعة ضخ الإلكترونات؟
- 5/ كيف سيكون المسار إذا دخلت حزمة إلكترونات بشعاع سرعة مواز للحقل؟ برّر.
- 6/ صف المسار إذا كانت الزاوية في O بين $\vec{v}_0$ و $\vec{B}$ مختلفة عن 0° و 90° .

**Exercice 4.11**

Le plan infini $P(O, x, y)$ est parcouru par un courant électrique constant de densité surfacique $\vec{J}_S = J \vec{u}_y$. Soit M un point de l'axe Oz de cote z . Figure (a).

1/ Donner, en la justifiant, l'expression vectorielle du champ magnétique $\vec{B}$ en M .

2/ Appliquer le théorème d'Ampère à la boucle $AEDGA$. figure (b), pour calculer la circulation de $\vec{B}$ de part et d'autre du plan. Conclure.

3/ Montrer que ce champ présente une discontinuité à la traversée du plan et vérifier que cette discontinuité peut s'écrire :

$$\Delta \vec{B} = \vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-) = \mu_0 J \vec{u}_x$$

التمرين 11.4

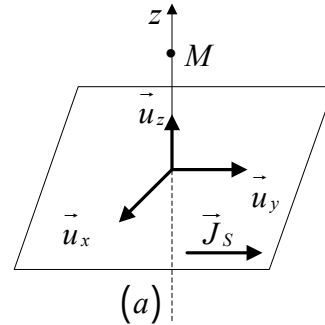
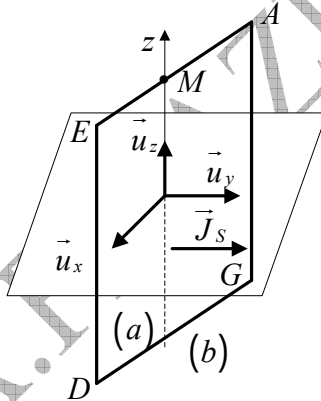
يجتاز المستوى $P(O, x, y)$ اللامتناهي ، تيار كهربائي ثابت كثافته السطحية $\vec{J}_S = J \vec{u}_y$. لتكن نقطة M من المحور Oz علوها z . الشكل (a).

1/ إعط، مبرراً لها، العبارة الشعاعية للحقل المغناطيسي $\vec{B}$ في M .

2/ طبق نظرية أمبير على الحلقة $AEDGA$ (الشكل (b))، لحساب شدة الحقل المغناطيسي على جانبي المستوى. ماذا تستنتج؟

3/ بين أن هذا الحقل عديم الاستمرارية عند عبور المستوى و تحقق أن عدم هذه الاستمرارية يمكن كتابته:

$$\Delta \vec{B} = \vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-) = \mu_0 J \vec{u}_x$$

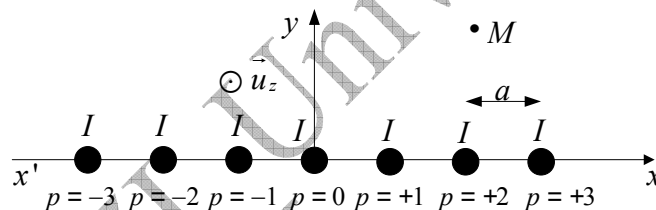
**Exercice 4.12**

Une infinité de fils infiniment longs, tous parallèles à l'axe Oz et équidistants de a , sont parcourus par le même courant I . Ils coupent l'axe Ox aux points d'abscisses $x_p = pa$ avec p entier. On cherche à déterminer le champ magnétique en un point M d'ordonnée y positive. Figure ci-dessous.

التمرين 12.4

عدد لامتناهي من الأسلاك لامتناهية الطول، كلها موازية للمحور Oz ومتباعدة بنفس المسافة a ، يجتازها نفس التيار I . تقطع الأسلاك المحور Ox في النقاط ذات الفواصل $x_p = pa$ مع p عدد طبيعي. نبحث عن تعيين الحقل المغناطيسي في نقطة M ترتيبها y موجب.

1/ Dans le cas où l'ordonnée y de M est suffisamment grande devant a on peut remplacer les fils par une nappe de courants surfaciques. Soit $\vec{J}$ la densité de ce courant par unité de longueur (le long de l'axe Ox). a/ Déterminer $\vec{J}$, b/ en utilisant le théorème d'Ampère, montrer que $B = \frac{1}{2} \mu_0 J$, c/ déterminer la valeur $\vec{B}_0(M)$ du champ avec ce modèle continu. 2/ A présent on ne fait plus l'approximation de la répartition continue. Pour un point d'abscisse $x = 0$, calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$. On l'écrira sous la forme $\vec{B}(M) = \vec{B}_0(M) f(y)$, $f(y)$ étant exprimée par la somme d'une infinité de termes. On utilisera le résultat connu du champ créé par un fil de longueur infinie. 3/ Reprendre ce calcul pour un point d'abscisse $-\frac{a}{2}$.	الشكل في الأسفل. 1/ في حالة ما إذا كان الترتيب y لـ M كبيراً بقدر الإمكان أمام a يمكن استبدال الأسلاك بحزام عريض سطحي. لتكن $\vec{J}$ كثافة هذا التيار لوادة الطول (على طول المحور Ox). ا/ عين $\vec{J}$, ب/ باستعمال نظرية أمبير، برهن أن $B = \frac{1}{2} \mu_0 J$, ج/ عين القيمة $\vec{B}_0(M)$ للحقل بهذا النموذج المستمر. 2/ الآن لا نفترض التوزيع المستمر. من أجل نقطة $x = 0$, أحسب الحقل المغناطيسي $\vec{B}(M)$. أكتبه على الشكل $\vec{B}(M) = \vec{B}_0(M) f(y)$ $f(y)$ تمثل مجموع عدد لامتناهي من الحدود. نستعمل النتيجة المعروفة للحقل الناتج عن سلك لامتناهي الطول. 3/ أعد هذه الحسابات لنقطة M فاصلتها $-\frac{a}{2}$.
--	--

**Exercice 4.13**

On considère un solénoïde idéal, infini, comportant N spires jointives par mètre de longueur et compte plusieurs couches. Le rayon intérieur est noté R_1 et le rayon extérieur est noté R_2 . On admet que le champ magnétique est nul à l'extérieur. L'intensité du courant dans une spire est I .

1/ Donner l'expression du champ magnétique en un point de l'axe du solénoïde.

2/ Montrer que le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

3/ Donner l'expression du champ à l'intérieur des enroulements à une distance de l'axe.

4/ Donner l'expression du flux du champ magnétique à travers une section droite du solénoïde.

التمرين 13.4

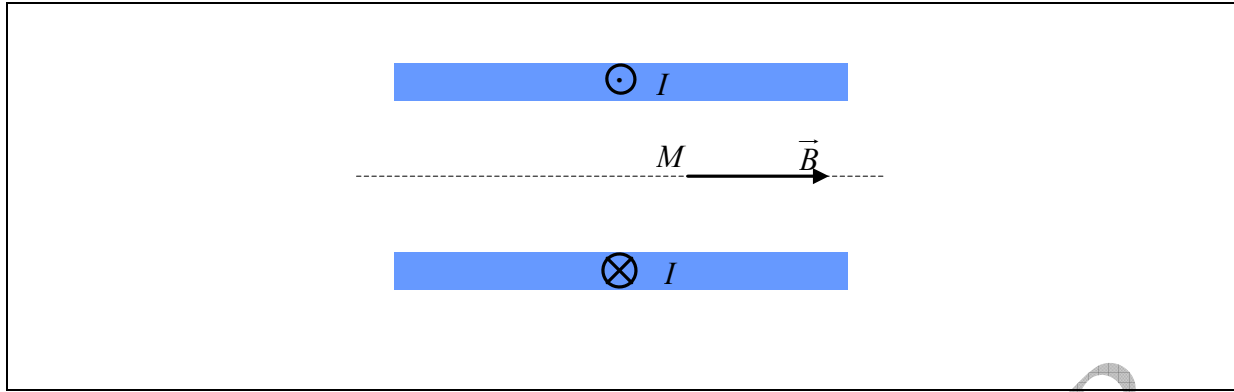
نعتبر حلزوناً مثالياً لامتناهي الطول مكوناً من N حلقة متلاصقة لوادة الطول و يشتمل على عديد من الطبقات. نرمز لنصف القطر الداخلي بـ R_1 و لنصف القطر الخارجي بـ R_2 . نقبل أن الحقل المغناطيسي معدوم في الخارج. شدة التيار داخل الحلقة الواحدة هي I .

1/ إعط عبارة الحقل المغناطيسي في نقطة من محور الحلزون.

2/ بين أن الحقل منتظم داخل الحلزون.

3/ إعط عبارة الحقل داخل اللفات على بعد من المحور.

4/ إعط عبارة تدفق الحقل المغناطيسي عبر مقطع مستقيم للحلزون.

**Exercice 4.14**

Un câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique central de rayon R_1 parcouru par un courant d'intensité I . Il est entouré d'un isolant cylindrique de rayon extérieur R_2 . Le retour du courant se fait par un conducteur cylindrique de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 .

La densité volumique J de courant est uniforme dans les conducteurs ; la longueur est bien supérieure aux rayons.

1/ Déterminer en tout point M de l'espace le champ magnétique.

2/ Etudier la continuité du champ.

3/ Représenter B en fonction de la variable dont il dépend.

التمرين 14.4

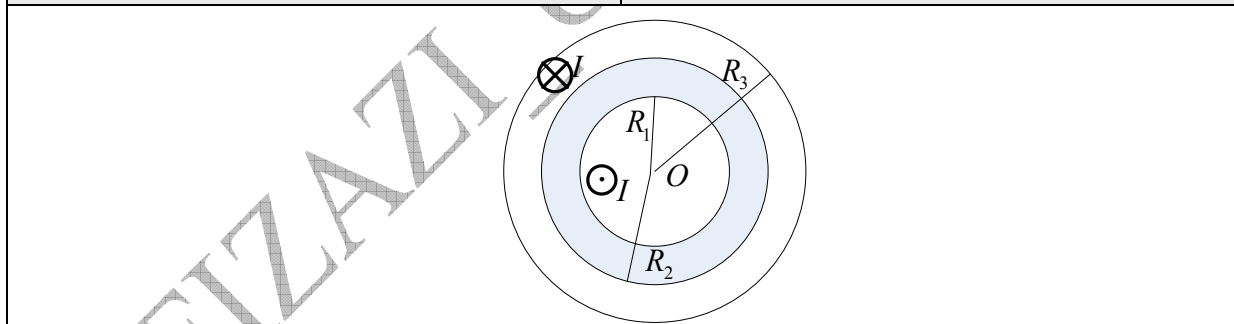
حبل متحد المحور مكون من ناقل اسطواني مركزي نصف قطره R_1 يمر فيه تيار شدته I . يحيط به عازل اسطواني نصف قطره الخارجي R_2 . عودة التيار تتم عبر ناقل اسطواني نصف قطره الداخلي R_2 و نصف قطره الخارجي R_3 .

الكثافة الحجمية J للتيار منتظمة في الناقلين؛ طول الحبل كبيرة جدا بالنسبة لأنصاف القطر.

1/ حدد في كل نقطة M من الفضاء الحقل المغناطيسي.

2/ أدرس استمرارية الحقل.

3/ مثل B بدلالة المتغير الذي تتعلق به.

**Exercice 4.15**

A l'instant pris pour origine des temps, une particule de masse m et de charge q est au repos dans le vide en un point pris comme origine des espaces. On établit à cet instant un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$ et un champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_y$.

1/ Ecrire les équations différentielles régissant le mouvement de la particule. On posera $\omega = \frac{q}{m}B$.

2/ Trouver les équations paramétriques de la trajectoire. On posera $A = \frac{E}{B\omega}$.

3/ Dessiner l'allure de la trajectoire.

التمرين 15.4

في اللحظة التي نتخذها كمبدأ للأزمنة، توجد جسيمة كتلتها m و شحنتها q في سكون في نقطة نأخذها كمبدأ للفضاءات. ننشئ في هذه اللحظة حقلا مغناطيسيا ثابتا $\vec{B} = B\vec{u}_z$ و حقلا كهربائيا $\vec{E} = E\vec{u}_y$.

1/ أكتب المعادلات التفاضلية المسيرة لحركة الجسيمة. نضع $\omega = \frac{q}{m}B$.

2/ أوجد المعادلات الزمنية للمسار. نضع $A = \frac{E}{B\omega}$.

3/ أرسم شكل المسار.

4/ Exprimer l'intensité de la vitesse à l'instant t en fonction de E, B, t et ω . Calculer la valeur de celle-ci pour $t = \frac{\pi}{\omega}$.	4/ عبر عن شدة السرعة في اللحظة t بدلالة E, B, t و ω . أحسب قيمة هذه السرعة من أجل $t = \frac{\pi}{\omega}$.
5/ Retrouver le résultat précédent en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.	5/ أوجد من جديد النتيجة السابقة باستعمال نظرية الطاقة الحركية.

Exercice 4.16

Une particule de masse m et de charge $q > 0$ est soumise à l'action d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$, uniforme et constant. Elle se déplace dans un liquide en subissant une force de frottement $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule par rapport au référentiel du laboratoire.

À l'origine des instants la particule se trouve à l'origine du repère $Oxyz$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$.

1/ Déterminer la position M_Ω de la particule lorsque t tend vers l'infini.

On pose $\tau = \frac{m}{\lambda}$ et $\omega = \frac{q}{m}B$.

2/ On repère la particule dans le plan xOy grâce à des coordonnées polaires : la distance $r = M_\Omega M$ et l'angle $\theta = (\overrightarrow{M_\Omega O}, \overrightarrow{M_\Omega M})$. Déterminer l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire de la particule. Représenter l'allure de cette trajectoire. Quel est le nom d'une pareille courbe?

التمرين 16.4

تخضع جسيمة كتلتها m و شحنتها $q > 0$ لحقل مغناطيسي $\vec{B} = B\vec{u}_z$ ، منتظم و ثابت. تنتقل في سائل و هي خاضعة لقوة احتكاك $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ ، حيث $\vec{v}$ هي سرعة الجسيمة بالنسبة لمرجع المختبر.

في مبدأ الأزمنة توجد الجسيمة في مبدأ المعلم $Oxyz$ بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$.

1/ عيّن الموقع M_Ω للجسيمة حين يؤول t إلى ما لا نهاية.

نضع $\tau = \frac{m}{\lambda}$ و $\omega = \frac{q}{m}B$.

2/ نحدد موقع الجسيمة في المعلم المستوي xOy بفضل الإحداثيات القطبية: المسافة $r = M_\Omega M$ و الزاوية $\theta = (\overrightarrow{M_\Omega O}, \overrightarrow{M_\Omega M})$. عيّن المعادلة القطبية $r(\theta)$ لمسار الجسيمة. مثل شكل هذا المسار. ما هو اسم مثل هذا المنحنى؟

Exercice 4.17

Un électroaimant produit entre ses pôles un champ magnétique $B(t)$ dépendant du temps. Entre ses pôles on place une bobine de 100 tours, d'aire 4cm^2 , orientée perpendiculairement au champ magnétique. La force électromotrice induite est initialement nulle. Elle passe subitement à la valeur $+3V$ pendant 4ms , puis à la valeur opposée $-3V$ pendant 4ms (voir figure).

1/ Quelle est l'intensité du champ magnétique $B(t)$ entre les pôles de l'électroaimant en fonction du temps (initialement B est nul) ?

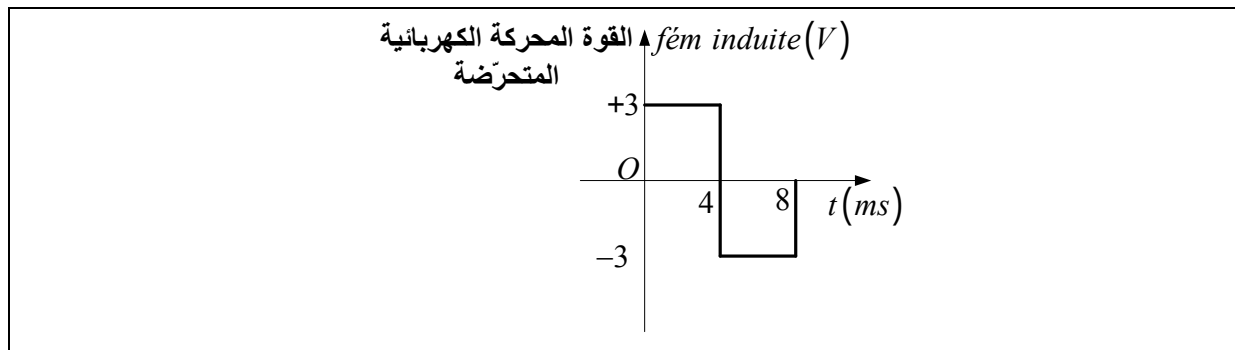
2/ Représenter graphiquement $B(t)$.

التمرين 17.4

ينتج كهرومغناطيس بين قطبيه حقلًا مغناطيسيًا $B(t)$ تابع بالزمن. نضع بين قطبيه وشيعة متكونة من 100 لفة، مساحتها 4cm^2 ، موجهة عموديا على الحقل المغناطيسي. القوة كهرومغناطيسية المتحرّضة معدومة في البداية. تقفز فجأة إلى القيمة $+3V$ خلال 4ms ، ثم إلى القيمة المعاكسة $-3V$ خلال 4ms (أنظر الشكل).

1/ ما هي شدة الحقل المغناطيسي بين قطبي الكهرومغناطيس بدلالة الزمن (في البداية B معدوم)؟

2/ مثل بيانيا $B(t)$.

**Exercice 4.18**

Une bobine comptant N_2 spires de section S_2 est centrée sur l'axe d'un solénoïde infiniment long comptant n_1 spires par mètre. Son axe fait un angle θ avec celui du solénoïde. Calculer le coefficient d'inductance mutuelle des deux circuits.

التمرين 18.4

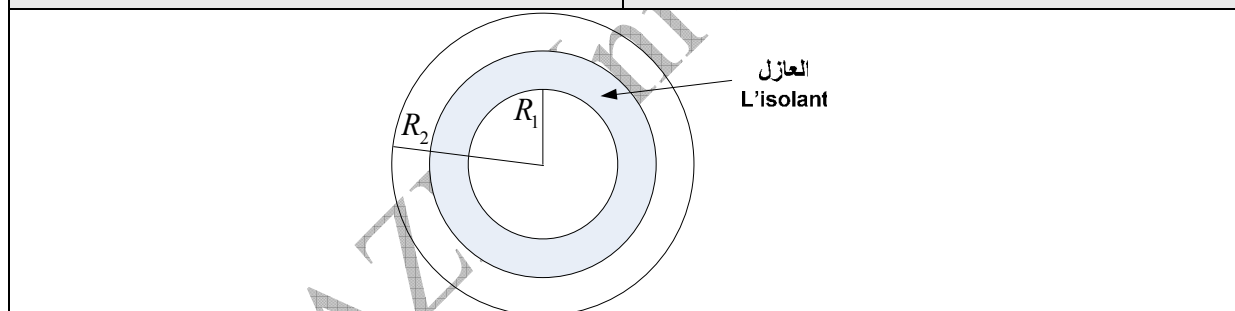
وشيجة تشتمل على N_2 حلقة ذات مقطع S_2 و متمركزة على محور حلزون لا متناهي الطول يحتوي على n_1 حلقة في المتر. يصنع محورها الزاوية θ مع محور الحلزون. أحسب معامل التحريض الذاتي المتبادل للدائرتين.

Exercice 4.19

Calculer l'inductance propre d'une longueur h d'un câble coaxial de longueur infinie de rayons R_1 et R_2 .

التمرين 19.4

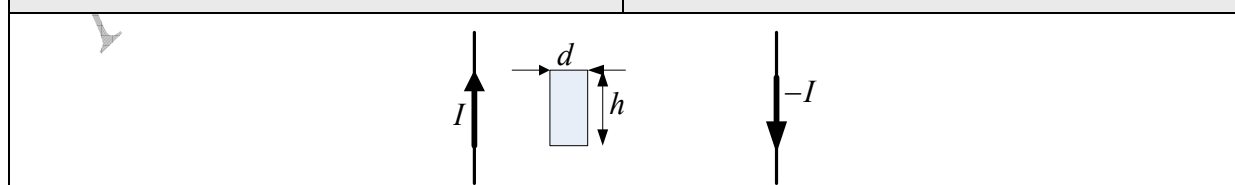
أحسب التحريض الذاتي لطول h لحبل متحد المحور طوله لا متناهي و نصف قطريه R_1 و R_2 .

**Exercice 4.20**

On considère deux conducteurs identiques parallèles, de longueur infinie de rayon a dont les axes sont distants de $b \gg a$. Calculer l'inductance propre de ce système.

التمرين 20.4

نعتبر ناقلين متماثلين و متوازيين، طولهما لا متناهي و نصف قطرهما a و بحيث يكون محوراها متباعدين بـ $b \gg a$. أحسب التحريض الذاتي لهذه الجملة.



Solution des exercices 4.1 à 4.20 :**حلول التمارين من 1.4 إلى 20.4****Exercice 4.1 :**

En admettant qu'une partie de l'éclair est rectiligne, on peut utiliser la loi :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \rightarrow B = \frac{4\pi 10^{-7} \times 20 \cdot 10^3}{2\pi \times 1} \Rightarrow B = 4 \cdot 10^{-3} T$$

Cette valeur est pour la distance de un mètre de l'éclair, mais à la distance de 300m le résultat est :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \rightarrow B = \frac{4\pi 10^{-7} \times 20 \cdot 10^3}{2\pi \times 300} \Rightarrow B = 1,33 \cdot 10^{-5} T$$

Exercice 4.2 :

D'après la règle de la main droite : si le courant circule vers l'ouest, le vecteur du champ magnétique produit par ce courant est dirigé vers le sud.

Pour un courant rectiligne, l'intensité du champ magnétique est obtenue par l'application de la loi :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \rightarrow B = \frac{4\pi 10^{-7} \times 300}{2\pi \times 12} \Rightarrow B = 5 \cdot 10^{-6} T$$

Comparons le au champ magnétique terrestre $\vec{B}_0$:

$$\frac{B}{B_0} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-5}} = 10^{-1} \Rightarrow \frac{B}{B_0} = 10^{-1}$$

Le champ produit par la ligne électrique ne représente que 10% du champ magnétique terrestre

Exercice 4.3 :

Le champ magnétique produit par un courant rectiligne d'intensité I situé à une distance du conducteur est donné par la loi :

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

La direction du champ magnétique est déterminée par la règle de la main droite.

Le courant d'intensité 1A crée un champ magnétique perpendiculaire au plan des deux conducteurs (entrant dans la feuille) :

$$B_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1}{2\pi \times 1} \rightarrow B_1 = 2 \cdot 10^{-7} T$$

Le courant d'intensité 3A crée un champ magnétique perpendiculaire au plan des deux conducteurs (entrant dans la feuille) :

$$B_2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{3}{2\pi \times 2} \rightarrow B_2 = 3 \cdot 10^{-7} T$$

Le champ magnétique total est égal à la somme des champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$. Puisque les deux champs ont même direction et même sens, le champ magnétique résultant est perpendiculaire au plan des deux conducteurs et d'intensité :

$$B = B_2 + B_1 \rightarrow B = 5 \cdot 10^{-7} T$$

Exercice 4.4 :

1/ D'après la loi de Biot et Savard, le champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ produit par une longueur élémentaire dl de la spire parcourue par un courant électrique d'intensité I est :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{l} \wedge \vec{u}$$

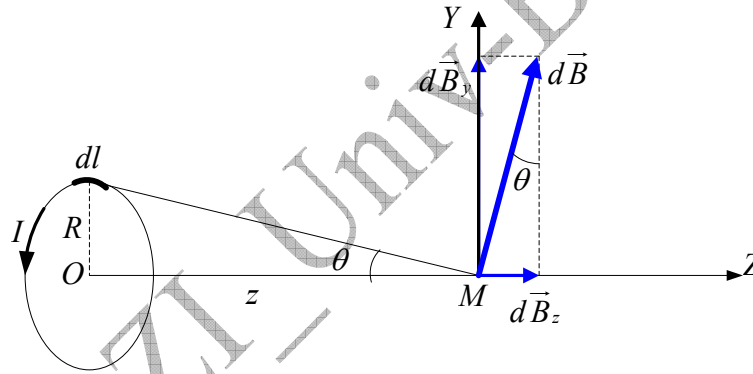
Puisque $\vec{u}_r = -\vec{u}$, on peut écrire la loi sous la forme :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \wedge \vec{r}$$

On remarque que $d\vec{l} \perp \vec{r}$, ce qui implique $|d\vec{l} \wedge \vec{r}| = dl.r$, d'où :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl$$

On peut décomposer $d\vec{B}$ en deux composantes $d\vec{B}_z$ et $d\vec{B}_y$, de telle façon que lors de l'intégration, toutes les composantes $d\vec{B}_y$ s'annulent deux à deux en raison de la symétrie. Le champ total est la résultante de toutes les composantes $d\vec{B}_z$, et donc $\vec{B}_z$ résultant est parallèle à l'axe OZ .



Par projection (voir figure), on obtient : $dB_z = dB \cdot \sin \theta \rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta dl$

Pour trouver B_z , on intègre l'expression précédente par rapport à la seule variable l , pour arriver à :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta \oint dl$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta \cdot 2\pi R \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R}{r^2} \sin \theta$$

Puisque $\sin \theta = \frac{R}{r}$, on peut donc obtenir l'expression finale du champ :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^2}{r^2} \sin \theta \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \Leftrightarrow \vec{B}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \cdot \vec{u}_z$$

2/ En remplaçant cette fois $\sin \theta$ par $\frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$, on obtient l'expression proposée :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

3/ La forme approximative de cette expression à de grandes distances de l'axe OZ , est obtenue en négligeant le rayon de la spire devant la grande distance z , le résultat est :

$$B_z \approx \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{z^3}$$

4/ Expression de B_z en fonction du moment magnétique M :

$$\begin{aligned} M &= IS \\ S &= \pi R^2 \end{aligned} \rightarrow M = I\pi R^2$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{I\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

5/ On obtient le champ magnétique produit au centre de la spire en prenant $z = 0$:

$$B_o = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Exercice 4.5 :

1/ Le champ magnétique produit par un conducteur rectiligne situé à une distance d est $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$.

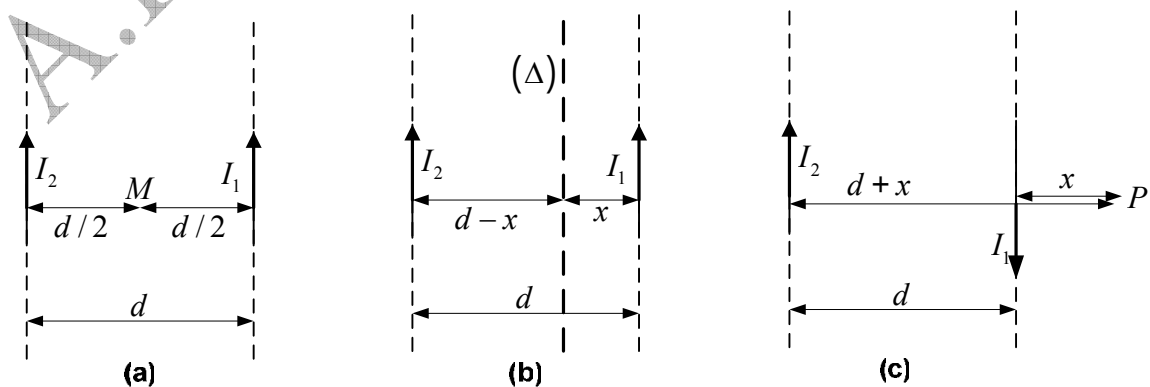
Le champ magnétique produit au point M (figure (a)) est égal à la résultante des deux champs magnétiques créés par les deux conducteurs rectilignes : $\vec{B}_M = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

D'après la règle de la main droite, $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont de sens contraires : $B_M = B_2 - B_1$

$$B_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{d/2} - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d/2} \Rightarrow B_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{d/2} (I_2 - I_1) \rightarrow B_M = 1,2 \cdot 10^{-4} T$$

L'annulation de $\vec{B}$, veut dire que $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{0}$. Cette condition ne peut être satisfaite à l'extérieur de l'espace compris entre les deux conducteurs, car $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ ont même sens, et par conséquent $B_0 = B_2 + B_1 \neq 0$. Donc, la droite (Δ) où $B = 0$ se situe entre les deux conducteurs tel que $B_0 = B_2 - B_1 = 0$. Au vu de la figure (b), on a :

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{d-x} - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{I_1}{I_2 - I_1} d \rightarrow x = \frac{d}{3}$$



2/ Dans ce cas $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ ont même sens : $B_p = B_2 + B_1$

D'après la figure (a), mais en intervertissant le sens de I_1 , on aura :

$$B_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{d/2} + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d/2} \Rightarrow B_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{d/2} (I_2 + I_1) \rightarrow B_M = 2.10^{-4} T$$

Il est impossible pour que le champ magnétique entre les deux conducteurs s'annule, car $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ ont même sens. Donc, le point P est situé à l'extérieur des deux conducteurs $B_p = B_2 + B_1 \neq 0$. La droite où $B_p = 0$ est située obligatoirement à l'extérieur des deux conducteurs tel que $B_p = B_2 - B_1 = 0 \Leftrightarrow B_2 = B_1$. De ce fait, et au vu de la figure (c), on aura :

$$B_p = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_2}{d+x} - \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{I_1}{I_2 + I_1} d \rightarrow x = \frac{d}{5}$$

Exercice 4.6 :

On sait qu'une charge qui se déplace dans un champ magnétique est soumise à une force magnétique $\vec{F} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$, telle que son intensité soit égale à $F = qv_0 B \sin \alpha$, avec $\alpha = (\vec{v}_0, \vec{B})$.

La particule chargée est soumise à deux forces : la force magnétique $\vec{F}$ et son poids $\vec{P} = m\vec{g}$. Pour que sa trajectoire reste horizontale, il faut que les deux forces soient directement opposées $\vec{F} = -\vec{P}$.

$$\vec{B} \perp \vec{v}_0 \Rightarrow \sin \alpha = 1 \Rightarrow F = qv_0 B \Rightarrow B = \frac{mg}{qv_0}$$

Application numérique :

$$B = \frac{5.10^{-4} \times 9,8}{2,5.10^{-8} \times 6.10^4} \rightarrow B \approx 3,27 T$$

Quant à la direction de $\vec{B}$, elle est horizontale et perpendiculaire au plan vertical formé par la vitesse $\vec{v}_0$ et la force $\vec{F}$.

$\vec{v}_0$ est horizontale, et a pour direction l'axe $x'x$,

$\vec{F}$ est verticale et a pour direction l'axe $z'z$,

$\vec{B}$ est horizontale et a pour direction l'axe $y'y$.

Exercice 4.7 :

1/ On a vu en cours, et dans un exercice précédent que le vecteur champ magnétique produit par une spire circulaire (de rayon R et parcourue par un courant d'intensité I) en un point de son axe est donné par l'expression :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2R} \sin^3 \theta \vec{u}_x$$

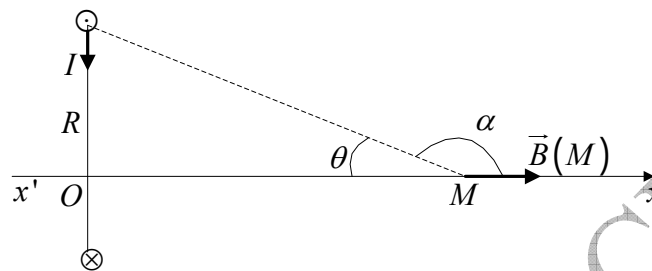
La circulation du vecteur $\vec{B}$ sur l'axe $(x'Ox)$ est égale à :

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx$$

Sachant que $x = -\frac{R}{\tan \alpha} \Rightarrow dx = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$, et puisque $\alpha + \theta = 180^\circ$, on a $\sin \theta = \sin \alpha$.

D'où :

$$C = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{2R} \frac{\sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} R d\alpha \Rightarrow \boxed{C = \mu_0 I}$$



2/ Le conducteur solénoïdal est constitué de N spires circulaires, pour obtenir la circulation du champ, il suffit de multiplier le résultat précédent par N , on trouve :

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx = \boxed{C = N \mu_0 I}$$

Exercice 4.8 :

1/ L'ion de charge q , en passant de O' à O sous l'action de la tension U reçoit le travail : $W = qU$

On applique le théorème de l'énergie cinétique pour calculer la vitesse finale avec laquelle l'ion arrive en O :

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU \Rightarrow v = \sqrt{2 \frac{q}{m} U}$$

La vitesse des ions ${}^7_3\text{Li}^+$ est :

$$\boxed{v_1 = \sqrt{2 \frac{q}{m_1} U}}$$

La vitesse des ions ${}^6_3\text{Li}^+$ est :

$$\boxed{v_1 = \sqrt{2 \frac{q}{m_2} U}}$$

2/ L'ion se déplace à l'intérieur de la chambre de séparation à la vitesse $\vec{v}$, il est soumis à la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

On a les grandeurs vectorielles suivantes :

$$\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases}, \quad \vec{v} \begin{cases} v \\ 0 \\ 0 \end{cases}, \quad \vec{B} \begin{cases} 0 \\ B \\ 0 \end{cases}$$

Ecrivons à présent l'accélération du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} = \frac{q}{m} \left\{ \begin{matrix} v \\ 0 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} 0 \\ B \end{matrix} \right\} \\ \ddot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{q}{m} v B \end{cases}$$

D'après les données, ces résultats nous indiquent que :

$$\ddot{x} = a_x = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = v_x = C^{te}$$

$$\ddot{y} = a_y = 0 \Leftrightarrow \dot{y} = v_y = 0$$

$$\ddot{z} = a_z = \frac{q}{m} v B \Leftrightarrow \dot{z} = v_z = 0$$

On remarque que l'accélération est portée par l'axe Oz , ce qui veut dire que la force magnétique qui agit sur la charge est perpendiculaire au plan xOy , donc perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$ et à la trajectoire. Les ions restent dans le plan xOz au cours de leur mouvement dans le champ magnétique. L'accélération est donc normale.

Dans le repère de Frenet $(O, \vec{N}, \vec{T})$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_N + \vec{a}_T \rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

Puisque la vitesse est constante, la composante tangentielle de l'accélération est nulle.

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{T} = \vec{0} \\ \vec{v} = C^{te} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{le mouvement est uniforme}$$

L'accélération est normale, d'où :

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{N} \rightarrow a_N = \frac{v^2}{R} = v \frac{e}{m} B$$

Le rayon de courbure est constant, d'où :

$$R = \frac{mv}{eB} = C^{te} \Rightarrow \text{le mouvement est circulaire}$$

En conclusion le mouvement est circulaire uniforme.

En reportant l'expression de la vitesse trouvée précédemment dans l'expression de R , on trouve :

$$R_1 = \frac{m_1}{qB} v_1 \Rightarrow R_1 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_1 U}{q}} \rightarrow OC_1 = 2R_1 \approx 4,8 \text{ cm}$$

$$R_2 = \frac{m_2}{qB} v_2 \Rightarrow R_2 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_2 U}{q}} \rightarrow OC_2 = 2R_2 \approx 4,5 \text{ cm}$$

Exercice 4.9 :

On néglige dans cette solution le poids des particules devant les autres forces.

1/ Déviation produite par le champ électrique seul :

Equation de la trajectoire :

Suivant l'axe Ox, la seule force qui agit sur le faisceau d'ions est la force électrique $\vec{F} = qE\vec{u}_x$. Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a}_x = qE\vec{u}_x \Rightarrow a_x = \frac{q}{m} E$$

Le condensateur étant plan, donc $E = \frac{U}{h}$, d'où :

$$a_x = \frac{qU}{mh}$$

L'accélération suivant l'axe Ox étant constante, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré dont l'équation horaire est :

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 \rightarrow x = \frac{1}{2} \frac{qU}{mh} t^2$$

Suivant l'axe Oy, aucune force n'agit sur le faisceau qui se déplace à vitesse constante $\vec{v} = \vec{v}_y = v_y \vec{u}_y$. Le mouvement est donc rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$y = v_0 t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0}$$

La déviation finale marquée sur l'écran, à la sortie du faisceau du condensateur (où $y = L$), après la durée $\Delta t = \frac{L}{v_0}$ est :

$$x = \frac{1}{2} \frac{qU}{mh} \left(\frac{L}{v_0} \right)^2 = \Delta x \rightarrow (1)$$

2/ Déviati on produite par le champ magnétique seul :

Equation de la trajectoire :

Suivant l'axe Oz, la seule force agissant sur le faisceau d'ions est la force magnétique perpendiculaire à l'axe Ox qui porte le vecteur du champ magnétique :

$$\vec{F} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$$

Le principe fondamental de la dynamique nous permet d'écrire :

$$m\vec{a}_z = \frac{q}{m} v_0 \vec{u}_y \wedge -B \vec{u}_x \Rightarrow \vec{a}_z = \frac{q}{m} v_0 B \vec{u}_z$$

$$a_z = \frac{q}{m} v_0 B$$

L'accélération est constante suivant l'axe Oz. Le mouvement est donc rectiligne uniformément varié d'équation horaire :

$$z = \frac{1}{2} a_z t^2 \rightarrow z = \frac{1}{2} \frac{q}{m} v_0 B t^2$$

Suivant l'axe Oy aucune force n'agit sur le faisceau d'ions qui chemine avec une vitesse constante $\vec{v} = \vec{v}_y = v_y \vec{u}_y$: le mouvement est rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$y = v_0 t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0}$$

La déviation finale indiquée sur l'écran à la sortie du faisceau du condensateur (où $y = L$) après le temps $\Delta t = \frac{L}{v_0}$ est :

$$\Delta z = \frac{1}{2} \frac{q}{m} B v_0 \left(\frac{L}{v_0} \right)^2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2} \frac{q}{m} B \frac{L^2}{v_0} = \Delta z} \rightarrow (2)$$

3/ La marque laissée par le faisceau sur l'écran est déviée suivant l'axe Oz (c'est-à-dire dans le plan du mouvement initial), tandis que dans le premier cas la marque est déviée perpendiculairement à ce plan.

La déviation totale produite est égale à la composition des deux déviations produites par les champs électrique et magnétique. En éliminant la vitesse entre les équations (1) et (2), on obtient la valeur de cette déviation :

$$v_0 = \frac{1}{2} \frac{q}{m} B \frac{L^2}{z} \Rightarrow \boxed{x = 2 \frac{m U}{q h} \frac{1}{B^2 L^2} z^2}$$

Remarquons que l'expression est indépendante de la vitesse initiale.

4/ Cette expérience permet le calcul de la charge massique $\frac{q}{m}$ des ions qui constituent le faisceau dévié. En effet les grandeurs U, B, L, h sont connues d'avance et il ne reste plus qu'à déduire le rapport entre la masse de l'ion et sa charge.

Historiquement : Par sa célèbre expérience, R.A. Millikan a pu calculer la charge de l'électron grâce au résultat auquel est parvenu, bien avant lui, J.J Thomson qui a calculé justement la charge massique $\frac{q}{m}$. Il ne restait plus qu'à déduire la masse de l'électron.

Exercice 4.10 :

1/ Chaque électron du faisceau, à son entrée dans le champ magnétique, est soumis à une force magnétique :

$$\vec{F} = q \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$m \vec{a} = -e v_0 \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_z \rightarrow \vec{a} = \frac{e}{m} v_0 B \vec{u}_y \Rightarrow \vec{a} = a \vec{u}_y \Leftrightarrow \vec{F} = F \vec{u}_y$$

La force magnétique à laquelle est soumis l'électron est perpendiculaire à $\vec{v}_0$ (c'est-à-dire à la trajectoire) et à $\vec{B}$. On va étudier le mouvement dans le repère de Frenet $(O, \vec{N}, \vec{T})$. l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_N + \vec{a}_T \rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

Puisque la vitesse est constante, la composante tangentielle de l'accélération est donc nulle, d'où :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{T} = \vec{0} \\ \vec{v} = \vec{v}_0 = C^{te} \end{array} \right| \Rightarrow \text{le mouvement est uniforme}$$

L'accélération normale a pour expression :

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{N} \rightarrow a_N = \frac{v_0^2}{R} = v_0 \frac{e}{m} B$$

Le rayon de courbure est constant, donc :

$$R = \frac{mv_0}{eB} = C^{te} \Rightarrow \text{le mouvement est circulaire}$$

En conclusion, dans le champ magnétique le mouvement du faisceau d'électrons est circulaire uniforme. La trajectoire dans le condensateur est un arc de cercle de rayon R . Voir figure ci-dessous.

2/ l'angle de déviation α est égal à l'angle au centre de l'arc $\widehat{OA}$ (voir figure ci-dessous), et par conséquent :

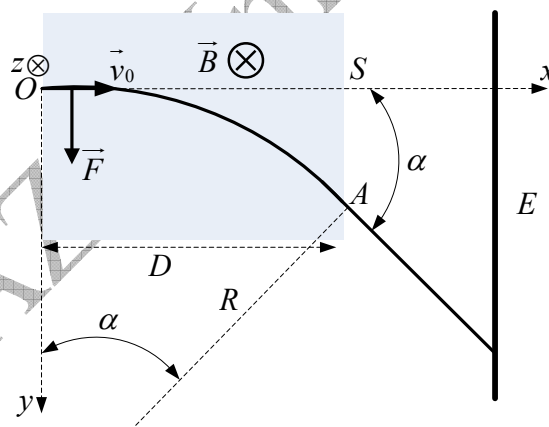
$$\alpha = \frac{\widehat{AO}}{R} \approx \frac{l}{R} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{e}{mv_0} Bl}$$

3/ le mouvement étant circulaire, la vitesse angulaire est :

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{v_0}{R} \\ R = \frac{mv_0}{eB} \end{array} \right| \Rightarrow \omega = \frac{eB}{m}$$

La période est égale à :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi m}{eB}}$$



4/ Si on double la vitesse v_0 :

Seule le rayon double, tandis que la période et la vitesse angulaire restent invariables puisqu'elles sont indépendantes de la vitesse initiale.

5/ Si un faisceau d'électron pénètre avec une vitesse parallèle au champ magnétique, il ne sera soumis à aucune force, à condition de négliger son poids, de ce fait sa trajectoire reste rectiligne.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} = m\vec{a} = -ev_0 \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_x \\ \vec{u}_x \wedge \vec{u}_x = \vec{0} \end{array} \right| \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = C^{te} \Rightarrow \text{mouvement rectiligne uniforme}$$

6/ Dans ce cas, décrit dans l'énoncé, la vitesse et l'accélération ont deux composantes chacune.

$\vec{v}_{\parallel}$ et $\vec{a}_{\parallel}$: projetées sur la direction de $\vec{B}$,

$\vec{a}_\perp$ et $\vec{v}_\perp$: projetées sur le plan perpendiculaire à $\vec{B}$.

Par application de la relation fondamentale de la dynamique, on a :

$$\vec{F} = m\vec{a} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \Rightarrow m(\vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp) = q(\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp) \wedge \vec{B}$$

En développant, on remarque que le produit vectoriel $q.\vec{v}_\parallel \wedge \vec{B}$ est nul car $\vec{v}_\parallel$ et $\vec{B}$ sont parallèles, il en résulte :

$$\underbrace{m.\vec{a}_\parallel}_0 + m.\vec{a}_\perp = \underbrace{q.\vec{v}_\parallel \wedge \vec{B}}_0 + q\vec{v}_\perp \wedge \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} m.\vec{a}_\parallel = 0 \\ q.\vec{v}_\perp \wedge \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Ces deux résultats nous montrent que le mouvement de la charge est la résultante d' :

- un mouvement rectiligne uniforme parallèle au champ : $m.\vec{a}_\parallel = 0 \Rightarrow \vec{v}_\parallel = \vec{C}^{te}$
- un mouvement circulaire uniforme autour du vecteur $\vec{B}$ de rayon $R = \frac{m.v_\perp}{eB}$ et de vitesse angulaire $\omega = \frac{eB}{m}$.

La trajectoire a la forme hélicoïdale. Le rayon de l'hélice que décrit le faisceau d'électron est égale à $R = \frac{m.v_\perp}{eB}$.

Exercice 4.11 :

1/ Le plan $O\vec{u}_y\vec{u}_z$, parallèle à $\vec{J}_S$, est un plan de symétrie des courants, donc le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire à ce plan, soit $\vec{B} = B\vec{u}_x$.

Par translation suivant $\vec{u}_x$, la distribution de ce courant est invariable ; de même, par translation suivant $\vec{u}_y$, la distribution de ce courant est invariable. L'intensité du champ magnétique ne dépend que de z .

La règle de la main droite, ou la règle d'ampère, donne le sens du champ magnétique : Si $z > 0$, alors $\vec{B}$ est dirigé suivant $\vec{u}_x$, mais si $z < 0$, $\vec{B}$ est dirigé vers $-\vec{u}_x$.

2/ La circulation de $\vec{B}$ sur la boucle $AEDGA$ est égale à la somme des circulations pour chaque segment (figure) :

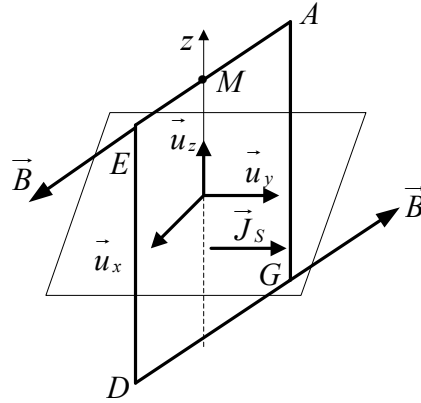
$$C = C_{AE} + C_{ED} + C_{DG} + C_{GA}$$

$C_{ED} = \int_E^D \vec{B}.ED = 0$, $C_{GA} = \int_G^A \vec{B}.GA = 0$ car $\vec{B}$ est perpendiculaire aux deux côtés (les deux déplacements). Sur les deux autres côtés on a $C_{AE} = C_{ED}$. La circulation totale est donc $C = C_{AE} + C_{DG}$:

$$C = \int_A^E \vec{B}.AE + \int_D^G \vec{B}.DG = \mu_0 I$$

$$2B.AE = \mu_0 . J . AE \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2} \mu_0 . J}$$

En conclusion, on peut dire que le champ magnétique est constant de part et d'autre du plan quelque soit l'altitude du point M .



3/ A la traversée du plan, c'est-à-dire $z \rightarrow 0$, la continuité du champ magnétique s'annule à cause du changement de signe du positif au négatif.

$$\Delta \vec{B} = \vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(z = 0^+) &= \left(\frac{1}{2} \mu_0 J \vec{u}_x \right) \\ -\vec{B}(z = 0^-) &= -\left(-\frac{1}{2} \mu_0 J \vec{u}_x \right) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{B} = \mu_0 J \vec{u}_x}$$

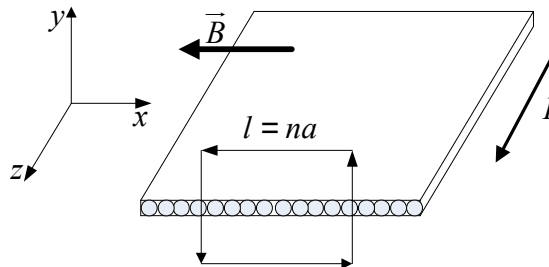
Exercice 4.12 :

1/ a) Un segment du ruban de longueur $l = na$ est parcouru, suivant l'axe Ox , par un courant d'intensité nI . On en déduit la densité du courant électrique :

$$\vec{J} = \frac{\text{intensité du courant}}{\text{longueur du conducteur}} = \frac{I}{a} \vec{u}_z$$

b) D'après la règle de la main droite, le champ magnétique créé, et en raison de la symétrie du problème, a une seule composante suivant l'axe Ox mais de sens contraire, c'est-à-dire $\vec{B} = -\vec{B}_x$.

Soit le contour carré indiqué sur la figure suivante :



La circulation C de $\vec{B}$ sur les deux côtés parallèles à l'axe Oz est nulle, car $\vec{B}$ est perpendiculaire à chacun d'eux, et la circulation sur les deux côtés parallèles à l'axe Ox ne fait intervenir que la composante $\vec{B}_x$. d'après la règle d'Ampère, on a :

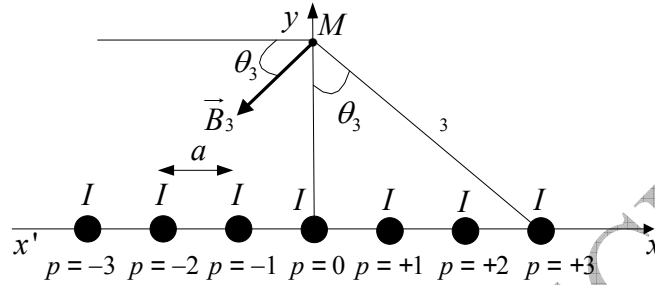
$$C = \sum B \Delta l = \mu_0 \sum_{Jl} I \Rightarrow C = Bl + Bl = \mu_0 J l \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2} \mu_0 J}$$

c) Le champ magnétique produit par ce courant dans le cas cité est :

$$\vec{B}_0(M) = -\frac{\mu_0 I}{2a} \vec{u}_x$$

Le signe – provient du fait que $\vec{B}_0(M)$, et d'après la règle de la main droite, est situé sur l'axe Ox mais de sens contraire.

2/ le plan $x=0$, qui contient M , est un plan de symétrie pour les courants ; la seule composante qui s'annule est B_x . Voir figure suivante :



Les fils p et $-p$, situés à la distance $r_p = \sqrt{p^2 a^2 + y^2}$ de M , produisent chacun d'eux un champ, telles que les composantes $\vec{B}_{py}$ sont directement opposées, donc elles s'annulent, et les composantes $\vec{B}_{px}$ sont :

$$\vec{B}_{px} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_p} (-\cos \theta_p) \vec{u}_x ; B_{px} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_p} (-\cos \theta_p) \Rightarrow B_{px} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_p} \frac{y}{r_p}$$

Le champ total est la somme de toutes les composantes $\vec{B}_{px}$, d'où :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_p \frac{y}{r_p^2} \vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi} \sum_p \frac{1}{r_p^2} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0(M) f(y)$$

La fonction $f(y)$ doit être égale à :

$$-\frac{\mu_0 I y}{2\pi} \sum_p \frac{1}{r_p^2} = -\frac{\mu_0 I}{2a} f(y) \Rightarrow f(y) = \frac{a y}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p^2 a^2 + y^2}$$

$$f(y) = \frac{a}{y \pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p^2 \frac{a^2}{y^2} + 1}$$

3/ Dans ce cas, le champ reste toujours dirigé suivant Ox . Par des calculs semblables à peu près aux précédents, on obtient :

$$r_p = \sqrt{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 a^2 + y^2}$$

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_p \frac{y}{r_p^2} \vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi} \sum_p \frac{1}{r_p^2} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0(M) f(y)$$

La fonction doit être égale à :

$$-\frac{\mu_0 I y}{2\pi} \sum_p \frac{1}{r_p^2} = -\frac{\mu_0 I}{2a} f(y) \Rightarrow f(y) = \frac{a \cdot y}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 a^2 + y^2}$$

$$f(y) = \frac{a}{y \cdot \pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{a^2}{y^2} + 1}$$

Exercice 4.13 :

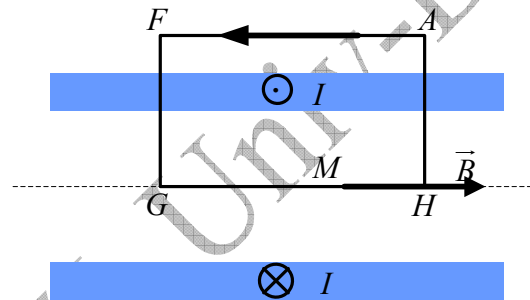
1/ le champ magnétique du solénoïde est parallèle à l'axe de la bobine. Il reste invariable pour une translation suivant $z'z$, ou par rotation autour de cet axe.

On choisit le contour $AFGHA$ afin d'appliquer le théorème d'Ampère.

Suivant le trajet AF : le champ est nul car il est à l'extérieur du solénoïde (d'après l'énoncé).

Suivant les trajets FG et AH : le vecteur champ est perpendiculaire aux deux trajets : la circulation du champ est nulle.

$$GH = L : C = \int_G^H \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} \Rightarrow C = B(r) L$$



Intensité des courants entrelacés :

La longueur L comprend NL spires. Dans l'épaisseur $R_2 - R_1$ se trouvent $N(R_2 - R_1)$ spires. Donc, l'intensité du courant qui parcourt cet ensemble de spires entrelacées est :

$$NL \cdot N(R_2 - R_1) = N^2(R_2 - R_1) L I$$

On applique le théorème d'Ampère :

$$C = B(r) L = \mu_0 N^2 (R_2 - R_1) L I$$

Finalement l'intensité du champ magnétique en un point de l'axe est égale à :

$$B(r) = \mu_0 N^2 (R_2 - R_1) I$$

2/ Un contour semblable au précédent, passant par P quelque soit sa position à l'intérieur du solénoïde conduit au même résultat : le champ est uniforme dans le solénoïde.

3/ On suit les mêmes étapes que précédemment, quand le point M est dans les enroulements à une distance r de l'axe. Il suffit de remplacer R_1 par r pour trouver :

$$B(r) = \mu_0 N^2 (R_2 - r) I$$

4/ Le flux à travers une section droite du solénoïde nécessite la somme de deux flux :

- Le flux à l'intérieur du solénoïde et qui est égal à :

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_i = SB \\ S = \pi R_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\Phi_i = \pi R_1^2 \mu_0 N^2 (R_2 - R_1) I}$$

- Le flux à travers les enroulements et pour lequel on choisit une couronne de rayon et d'épaisseur d , telle que sa surface élémentaire soit $dS = 2\pi r dr$. On intègre l'expression que nous avons trouvée dans 3/, de R_1 à R_2 . on obtient :

$$\Phi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mu_0 N^2 (R_2 - r) I \cdot 2\pi r dr \Rightarrow \Phi_2 = \mu_0 \pi N^2 I \left(\frac{1}{3} R_2^3 - R_2 R_1^2 + \frac{2}{3} R_1^3 \right)$$

Le flux total est donc :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{1}{3} \pi \mu_0 N^2 I (R_2^3 - R_1^3)}$$

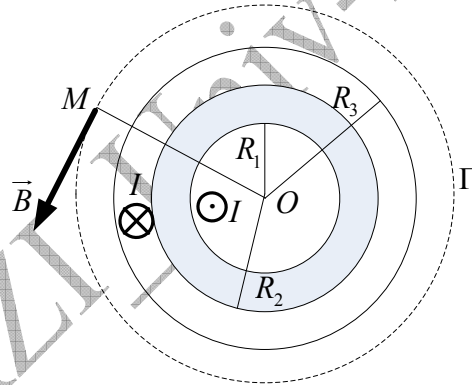
Exercice 4.14 :

Le champ est radial et ne dépend que de la distance r qui est le rayon du cercle (voir figure).

La circulation du champ magnétique sur toute la courbe Γ circulaire de rayon r est:

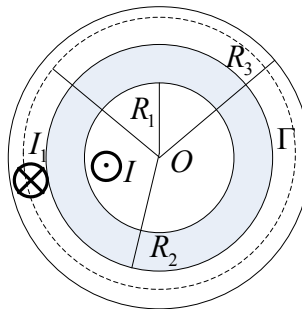
$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} \Rightarrow C = 2\pi r B(r)$$

On applique le théorème d'Ampère : $2\pi r B(r) = \mu_0 \sum_i I_i$



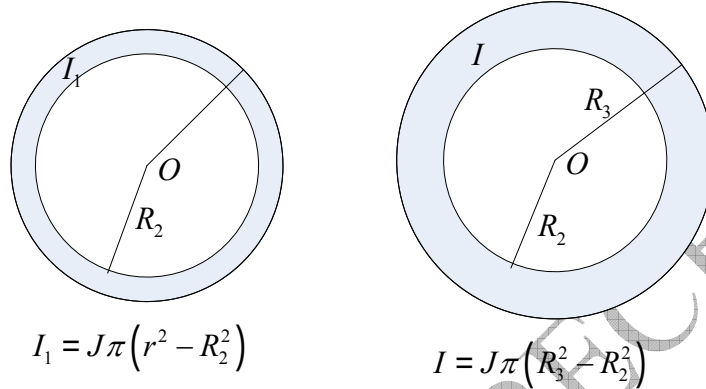
Le point M est hors du câble ($r > R_3$) : l'intensité du courant entrant est égale à l'intensité du courant sortant, la somme est donc nulle, d'où $\mu_0 \sum_i I_i = 0 \Rightarrow B(r) = 0$.

Le point M est entre les deux conducteurs $R_2 < r < R_3$:



L'intensité du courant entrant et traversant le contour Γ est I . On détermine l'expression de l'intensité I_1 du courant sortant, c'est-à-dire le courant qui revient en traversant le contour Γ ; autrement dit le courant passant dans l'espace compris entre R_2 et $(r > R_2)$.

$$\begin{aligned} I_1 &= J\pi(r^2 - R_2^2) \\ I &= J\pi(R_3^2 - R_2^2) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{I_1 = I \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}}$$



En appliquant le théorème d'Ampère, on trouve :

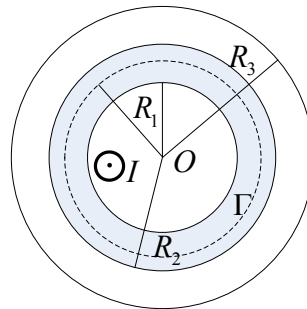
$$2\pi r B(r) = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 (I - I_1)$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}}$$

Discussion :

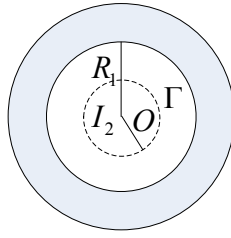
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \rightarrow \begin{cases} r \rightarrow R_3 : B(r) \rightarrow 0 \\ r \rightarrow R_2 : B(r) \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi} \end{cases}$$

Le point M à l'intérieur de l'isolant ($R_1 < r < R_2$) : Dans ce cas, le courant entrant est le seul qui passe à travers le contour Γ .



$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

$$r \rightarrow R_2 : B(r) \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

Le point M à l'intérieur du conducteur $r < R_1$:

L'intensité du courant entrant qui traverse le contour Γ à l'intérieur de la région comprise entre R_1 et $(r < R_1)$ est égale à :

$$\begin{aligned} I_2 &= J\pi r^2 \\ I &= J\pi R_1^2 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{I_2 = I \frac{r^2}{R_1^2}}$$

On applique le théorème d'Ampère pour obtenir :

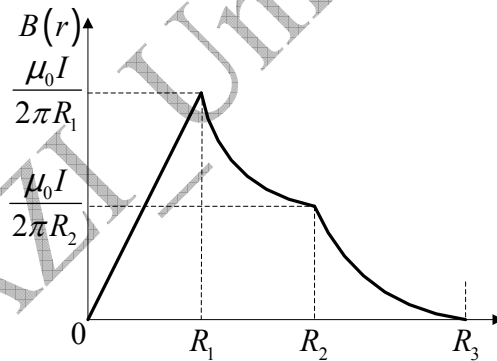
$$2\pi r B(r) = \mu_0 I_2$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R_1^2}}$$

$$r \rightarrow R_1 : B(r) \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$$

Suite aux résultats obtenus dans les deux questions précédentes, le champ est continu sur toutes les surfaces qui séparent les différentes composantes du câble.

4/ Représentation graphique du champ magnétique $B(r)$ en fonction de la distance :

**Exercice 4.15 :**

I/ Les équations différentielles régissant le mouvement du système.

Pour étudier le mouvement de la particule, on choisit le repère galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

La particule est soumise à son poids (qu'on néglige) et la force de Lorentz. La deuxième loi de Newton nous permet d'écrire :

$$\vec{F} = m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

On dispose des grandeurs vectorielles suivantes :

$$\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases}, \quad \vec{v} \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases}, \quad \vec{B} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ B \end{cases}, \quad \vec{E} \begin{cases} 0 \\ E \\ 0 \end{cases}$$

L'accélération s'écrit alors :

$$\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases} = \frac{q}{m} \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right] \begin{cases} 0 \\ E \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ B \\ B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases} = \begin{cases} \frac{q}{m} B \dot{y} \\ \frac{q}{m} E - \frac{q}{m} B \dot{x} \\ 0 \end{cases}$$

On posant $\omega = \frac{q}{m} B$, on obtient un système d'équations différentielles qui régissent le mouvement de la particule :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \rightarrow (1) \\ \ddot{y} = \frac{q}{m} E - \omega \dot{x} \rightarrow (2) \\ \ddot{z} = 0 \rightarrow (3) \end{cases}$$

2/ Les équations horaires de la trajectoire.

Vu les conditions initiales, l'équation (3) conduit à $z = 0$.

Le mouvement s'effectue donc dans le plan xOy . L'intégration de l'équation (1) donne :

$$\dot{x} = \omega y + \dot{x}(0)$$

Puisque la composante initiale de la vitesse est nulle ($\dot{x}(0) = 0$), on obtient : $\dot{x} = \omega y$

En reportant ce dernier résultat dans l'équation (2), on obtient l'équation différentielle suivante : $\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{q}{m} E$

La solution de cette équation est :

$$y = \frac{q}{m\omega^2} E + C \cos \omega t + D \sin \omega t = \frac{q}{m\omega \cdot \omega} E + C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

Puisque :

$$\omega = \frac{q}{m} B \Rightarrow B = \frac{m\omega}{q}$$

On a donc :

$$\frac{q}{m\omega \cdot \omega} E = \frac{E}{B\omega} = A$$

Dès lors, on peut écrire la solution de l'équation différentielle précédente sous la forme :

$$y = A + C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

C et D sont les constantes d'intégration que nous devons déduire à partir des conditions initiales. En effet :

$$y(0) = A + C = 0 \Rightarrow C = -A$$

$$\dot{y}(0) = D\omega = 0 \Rightarrow D = 0$$

Finalement, on obtient :

$$y = A(1 - \cos \omega t)$$

Et puisque $\dot{x} = \omega y$, on arrive à $\dot{x} = A\omega(1 - \cos \omega t)$

L'intégration de cette dernière équation, en prenant en compte les conditions initiales $x(0) = 0$, nous donne :

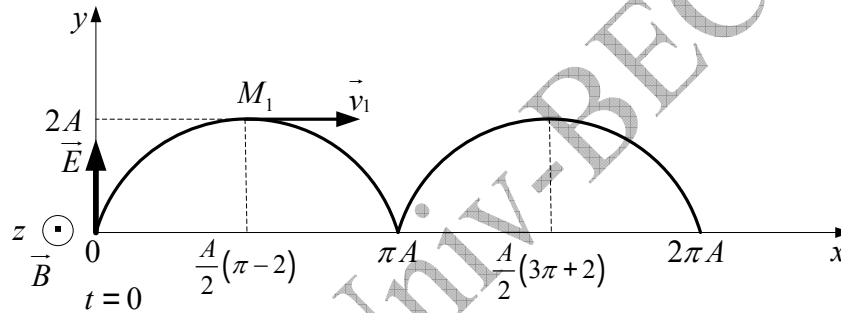
$$x = A(\omega t - \sin \omega t)$$

3/ Forme de la trajectoire.

On dresse le tableau suivant :

ωt	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$A/2(\pi - 2)$	πA	$A/2(3\pi - 2)$	$2\pi A$
y	0	A	$2A$	A	0

Vu la périodicité des deux fonctions utilisées, on se contente dans notre étude de l'intervalle que nous avons défini.



4/ L'intensité de la vitesse est :

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = A\omega[2(1 - \cos \omega t)]^{1/2} = 2A\omega \sin \frac{\omega t}{2}$$

A l'instant $t = \frac{\pi}{\omega}$, la vitesse est égale à :

$$v = 2A\omega = 2\frac{E}{B}$$

5/ Utilisation du théorème de l'énergie cinétique.

On applique le théorème de l'énergie cinétique ($\Delta E_c = \sum W_i$) entre les instants 0

et $t = \frac{\pi}{\omega}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \int_0^{M_1} q(\vec{B} + \vec{v} \wedge \vec{B}) d\vec{l} = \int_0^{M_1} q\vec{E} d\vec{l} = \int_0^{M_1} qE dy \\ \frac{1}{2}mv^2 &= qE2A \end{aligned}$$

D'où :

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{E}{B\omega} \\ \omega &= \frac{qB}{m} \end{aligned} \right| \Rightarrow v^2 = 4 \left(\frac{q}{m} \right) E \left(\frac{Em}{BqB} \right) = 4 \frac{E^2}{B^2} \Rightarrow \boxed{v = 2 \frac{E}{B}}$$

Exercice 4.16 :

1/ La position M_Ω .

On étudie le mouvement de la particule dans le repère terrestre supposé galiléen. La particule est soumise à trois forces : son poids (négligeable), la force magnétique et la force de frottement. Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\lambda\vec{v} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On a les grandeurs vectorielles suivantes :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

Ecrivons à présent l'accélération du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases} = -\frac{\lambda}{m} \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases} + \frac{q}{m} \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{q}{m} B \dot{y} \\ -\frac{\lambda}{m} \dot{y} - \frac{q}{m} B \dot{x} \\ -\frac{\lambda}{m} \dot{z} \end{cases}$$

En introduisant ω et τ , on obtient un système d'équations différentielles qui régissent le mouvement de la particule :

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{\tau} + \omega \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{\tau} - \omega \dot{x}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\dot{z}}{\tau}$$

En intégrant les trois équations on obtient :

$$\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \omega y + v_0$$

$$\dot{y} = -\frac{y}{\tau} - \omega x$$

$$\dot{z} = -\frac{z}{\tau}$$

La solution de la dernière équation différentielle, en tenant compte des conditions initiales, et puisque le mouvement s'effectue dans le plan xOy , est :

$$\dot{z} + \frac{1}{\tau} z = 0 \Rightarrow \boxed{z = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 0}$$

La force magnétique est perpendiculaire au plan de la trajectoire de la particule, son travail est donc nul. La force de frottement est la seule qui a un travail qui est résistant donc négatif. L'énergie cinétique de la particule décroît et sa vitesse tend vers zéro. On a donc :

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_\infty = 0 \\ \dot{y}_\infty = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$\dot{x}_\infty = -\frac{x_\infty}{\tau} + \omega y_\infty + v_0 = 0$$

$$\dot{y}_\infty = -\frac{y_\infty}{\tau} - \omega x_\infty = 0$$

Finalement on a :

$$\begin{cases} -\frac{x_\infty}{\tau} + \omega y_\infty + v_0 = 0 \\ -\frac{y_\infty}{\tau} - \omega x_\infty = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}_\Omega \begin{cases} x_\infty = \frac{\tau v_0}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ y_\infty = \frac{-\tau^2 \omega v_0}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ z_\infty = 0 \end{cases}$$

2/ L'équation polaire.

En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \overrightarrow{M_\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_\Omega} = r\vec{u}_r \\ \vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} - \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM_\Omega}}{dt}}_{0(t \rightarrow \infty)} = \frac{d\overrightarrow{M_\Omega M}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \rightarrow (1) \end{aligned}$$

Au début de cette solution, on a écrit la relation fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= -\lambda\vec{v} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{\lambda}{m}\vec{v} + \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B} \\ \vec{a} &= -\frac{\lambda}{m}\vec{v} + \frac{q}{m}\vec{v} \wedge B\vec{u}_z = -\frac{\lambda}{m}\vec{v} + \frac{q}{m}B\vec{v} \wedge \vec{u}_z \end{aligned}$$

L'intégration de la dernière expression nous donne :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\frac{\lambda}{m}\overrightarrow{OM} + \frac{q}{m}B(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}_z) + \vec{v}_0 \\ \vec{v} &= -\frac{1}{\tau}\overrightarrow{OM} + \omega(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}_z) + \vec{v}_0 \rightarrow (2) \end{aligned}$$

Quand $t \rightarrow \infty$, cette dernière équation s'écrit :

$$\vec{0} = -\frac{1}{\tau}\overrightarrow{OM}_\Omega + \omega(\overrightarrow{OM}_\Omega \wedge \vec{u}_z) + \vec{v}_0 \rightarrow (3)$$

En soustrayant l'équations (2) de (3) membre à membre, on obtient:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -\frac{1}{\tau}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}_\Omega) + \omega(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}_\Omega) \wedge \vec{u}_z \\ \vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\vec{r}}{\tau} + \omega\vec{r} \wedge \vec{u}_z \end{aligned}$$

Par la suite on obtient :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \vec{r} + \omega \vec{r} \wedge \vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{r}{\tau} \vec{u}_r + \omega r \underbrace{\vec{u}_r \wedge \vec{u}_z}_{\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{v} = -\frac{r}{\tau} \vec{u}_r + \omega r \vec{u}_\theta \rightarrow (4)$$

Par identification des équations (1) et (4), membre à membre, on arrive à :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{r}{\tau} \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

Après intégration on obtient :

$$\begin{cases} r = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

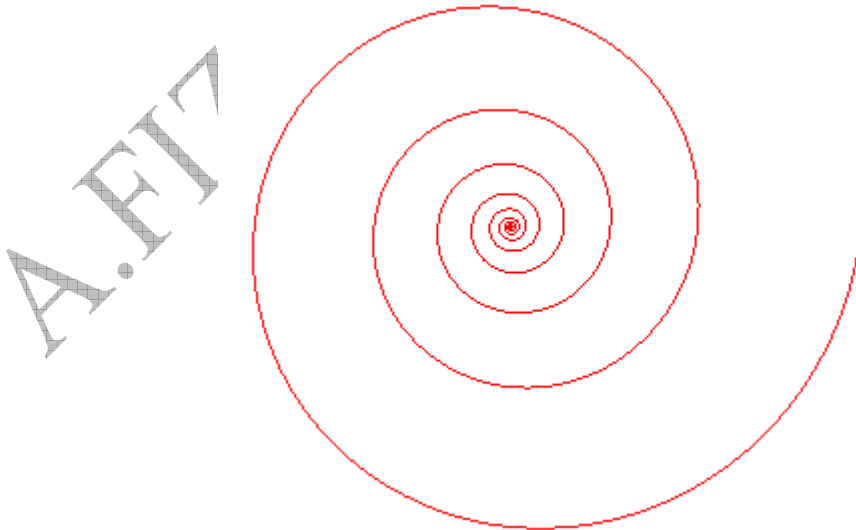
Pour déterminer K , on sait qu'au temps $t=0$, la particule se trouve à l'origine du repère. Cette origine se trouve à l'infini de la position M_Ω . Autrement dit, par rapport au point M_Ω de coordonnées (x_∞, y_∞) , les coordonnées de l'origine du repère sont $(-x_\infty, -y_\infty)$. Nous avons donc :

$$r(t=0) = \sqrt{x_\infty^2 + y_\infty^2} = \frac{v_0 \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = K$$

A la fin, on obtient :

$$r = \frac{v_0 \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \exp\left(-\frac{\theta}{\omega \tau}\right)$$

Ce résultat représente l'équation polaire d'une spirale logarithmique.



Exercice 4.17 :

1/ La force électromotrice d'induction à l'intérieur de la bobine est $e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$, le flux total du champ magnétique à travers la bobine est $\Phi(t) = NSB(t)$, où N représente le nombre de spires, et S l'aire de la bobine. Donc :

$$e(t) = -NS \frac{dB(t)}{dt} \rightarrow \frac{dB(t)}{dt} = -\frac{e(t)}{NS} \Rightarrow B(t) = -25 \int e(t) dt$$

Pour $t \leq 0$, $e_0 = 0$ et $B_0 = 0$, donc $B(t) = 0$

$$\text{Pour } 0 < t < 4\text{ms} : B(t) = -25e \int_0^t dt = -25(+3) \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{B(t) = -75t}$$

$$\text{A l'instant } t = 4\text{ms}, \boxed{B(4 \cdot 10^{-3}\text{s}) = -0,3\text{T}}$$

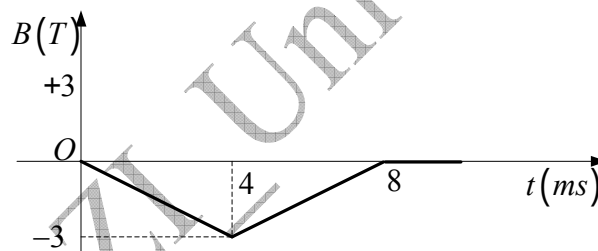
Pour $4 < t < 8\text{ms}$:

$$B(t) - B(4 \cdot 10^{-3}\text{s}) = -25e \int_{4 \cdot 10^{-3}}^t dt = -25(-3) \int_{4 \cdot 10^{-3}}^t dt \Rightarrow B(t) - B(4 \cdot 10^{-3}\text{s}) = 75t - 0,3$$

A la fin, l'expression du champ magnétique instantané est : $\boxed{B(t) = 75t - 0,6}$

Pour $t > 8\text{ms}$: $e = 0$ et $B(8 \cdot 10^{-3}) = 0$, d'où $B(t) = 0$

2/ La figure suivante représente les variations du champ magnétique en fonction du temps.

**Exercice 4.18 :**

Le champ magnétique B produit par un solénoïde parcouru par un courant électrique I est égale à :

$$B = \mu_0 n_1 I$$

Le flux qui traverse la bobine est égal à :

$$\Phi = N_2 B S_2 \cos \theta$$

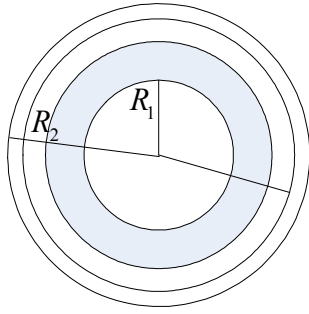
Après remplacement de B , on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi &= N_2 S_2 \mu_0 n_1 \cos \theta I \\ \Phi &= LI \end{aligned} \Rightarrow \boxed{L = N_2 S_2 \mu_0 n_1 \cos \theta}$$

Exercice 4.19 :

On suppose que le conducteur interne soit parcouru par le courant I_0 , dirigé vers l'avant ; et le conducteur externe soit parcouru par le courant I_0 dirigé vers l'arrière.

Le champ magnétique produit en un point situé à la distance de l'axe est, d'après la règle d'Ampère, égal à :



$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

I est égal à la somme des courants dans la spire de rayon r .

On obtient le flux à travers une section droite de largeur d et de hauteur h , de la façon suivante :

$$d\Phi = B dS = B h dr = \mu_0 I h \frac{dr}{2\pi r} \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

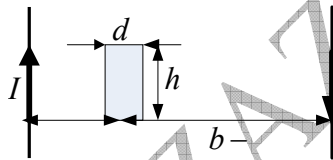
$$\Phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

On sait que le flux est proportionnel à l'induction propre $\Phi = LI$. Par identification des deux expressions du flux obtenues, on arrive à l'expression de l'induction propre du câble :

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Exercice 4.20 :

Le champ magnétique produit par les deux conducteurs rectilignes en un point, situé à la distance r du premier et à la distance $b-r$ du second, est égal à :



$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} + \mu_0 \frac{I}{2\pi (b-r)}$$

Le flux élémentaire de ce champ à travers un ruban d'épaisseur d et de hauteur h , parallèle au conducteur est :

$$d\Phi = BS = B h dr \Rightarrow d\Phi = \mu_0 \frac{hI}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right) dr$$

Pour obtenir le flux complet, on doit intégrer de a à $b-a$:

$$\Phi = \mu_0 \frac{hI}{2\pi} \int_a^{b-a} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right) dr \Rightarrow \Phi = \mu_0 \frac{hI}{2\pi} \left[\ln r \Big|_a^{b-a} - \ln (b-r) \Big|_a^{b-a} \right]$$

$$\Phi = \mu_0 \frac{hI}{\pi} \ln \frac{b-a}{a}$$

Dans le cas général, le flux d'un champ magnétique à travers une surface donnée est $\Phi = LI$, tel que L représente le coefficient d'induction. Par identification, on obtient l'induction propre de ce système qui est égal à :

$$L = \mu_0 \frac{h}{\pi} \ln \frac{b-a}{a}$$

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

ANNEXE 1

ALPHABET GREC

Prononciation	Majuscule	Miniscule
Alpha	A	α
Bêta	B	β
gamma	Γ	γ
delta	Δ	δ
epsilon	E	ε
dzêta	Z	ζ
éta	H	η
thêta	Θ	θ
iota	I	ι
kappa	K	κ
lambda	Λ	λ
mu	M	μ
nu	N	ν
xi	Ξ	ξ
oméga	Ω	ω
omicron	O	ο
pi	Π	π
rhô	P	ρ
sigma	Σ	σ
tau	T	τ
upsilon	Υ	υ
phi	Φ	φ
Khi	X	χ
Psi	Ψ	ψ

ANNEXE2**GRADIENT, DIVERGENCE, ROTATIONNEL ET LAPLACIEN
DANS DIFFERENTES COORDONNEES
(cartésiennes, cylindriques et sphériques).**

Soit :

F : Une fonction scalaire

$\vec{V}$: Une fonction vectorielle

Gradient d'un scalaire en coordonnées :

Cartésiennes : $F = F(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} F = \left[\frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} \right]$$

Cylindriques : $F = F(r, \theta, z)$

$$\vec{\nabla} F = \left[\frac{\partial F}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{u}_z \right]$$

Sphériques : $F = F(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{\nabla} F = \left[\frac{\partial F}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \right]$$

Divergence d'un vecteur en coordonnées :

Cartésiennes : $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z), V_x = V_x(x, y, z), V_y = V_y(x, y, z), V_z = V_z(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Cylindriques : $\vec{V} = \vec{V}(r, \theta, z), V_r = V_r(r, \theta, z), V_\theta = V_\theta(r, \theta, z), V_z = V_z(r, \theta, z)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(V_r + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Sphériques : $\vec{V} = \vec{V}(r, \theta, \varphi), V_r = V_r(r, \theta, \varphi), V_\theta = V_\theta(r, \theta, \varphi), V_\varphi = V_\varphi(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r} V_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cos \theta V_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotationnel d'un vecteur en coordonnées :

Cartésiennes : $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z), V_x = V_x(x, y, z), V_y = V_y(x, y, z), V_z = V_z(x, y, z)$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

Cylindriques : $\vec{V} = \vec{V}(r, \theta, z), V_r = V_r(r, \theta, z), V_\theta = V_\theta(r, \theta, z), V_z = V_z(r, \theta, z)$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left[\frac{\left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right)}{r} \vec{u}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{V_\theta + r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}}{r} \vec{u}_z \right]$$

Sphériques : $\vec{V} = \vec{V}(r, \theta, \varphi), V_r = V_r(r, \theta, \varphi), V_\theta = V_\theta(r, \theta, \varphi), V_\varphi = V_\varphi(r, \theta, \varphi)$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left[\frac{r \cos \theta V_\varphi + r \sin \theta \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} \right) - r \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right)}{r^2 \sin \theta} \vec{u}_r + \frac{\left(\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) - \sin \theta V_\varphi - r \sin \theta \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right)}{r \sin \theta} \vec{u}_\theta + \frac{V_\theta + r \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)}{r} \vec{u}_\varphi \right]$$

Laplacien d'un scalaire en coordonnées :

Cartésiennes : $F = F(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (F) = \vec{\nabla}^2 (F) = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right]$$

Cylindriques : $F = F(r, \theta, z)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (F) = \vec{\nabla}^2 (F) = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Sphériques : $F = F(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (F) = \vec{\nabla}^2 (F) = \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cos \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

Laplacien d'un vecteur en coordonnées :

Cartésiennes : $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z), V_r = V_r(r, \theta, z), V_\theta = V_\theta(r, \theta, z), V_z = V_z(r, \theta, z)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(\vec{V}) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}$$

Cylindriques : $\vec{V} = \vec{V}(r, \theta, z)$, $V_r = V_r(r, \theta, z)$, $V_\theta = V_\theta(r, \theta, z)$, $V_z = V_z(r, \theta, z)$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{V} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) \vec{u}_r \\ & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right) \vec{u}_\theta \\ & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

Sphériques : $\vec{V} = \vec{V}(r, \theta, \varphi)$, $V_r = V_r(r, \theta, \varphi)$, $V_\theta = V_\theta(r, \theta, \varphi)$, $V_\varphi = V_\varphi(r, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(\vec{V}) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = & \left(\frac{2}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} \right) \vec{u}_r \\ & + \left(\frac{2}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \varphi^2} \right) \vec{u}_\theta \\ & + \left(\frac{2}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

Gradient d'un vecteur (matrice 3*3) :

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z), V_x = V_x(x, y, z), V_y = V_y(x, y, z), V_z = V_z(x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

ANNEXE 3

FORMULES DE DERIVATION

1/ Principales règles pour le calcul des dérivées :

Si c est une constante et $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ deux fonctions dérivables, alors :

$$\begin{array}{lll}
 1/ (c)' = 0 & 2/ (x)' = 1 & 3/ (u \pm v)' = u' \pm v' \\
 4/ (cu)' = cu' & 5/ (uv)' = u'v + v'u & 6/ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2} \\
 7/ \left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{-cv'}{v^2}
 \end{array}$$

2/ Table des dérivées des principales fonctions:

$$\begin{array}{lll}
 1/ (x^n)' = nx^{n-1} & 2/ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} & 3/ (\sin x)' = \cos x \\
 4/ (\cos x)' = -\sin x & 5/ (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & 6/ (\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \\
 7/ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1) & 8/ (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1) \\
 9/ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} & 10/ (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2} \\
 11/ (a^x)' = a^x \ln a & 12/ (e^x)' = e^x \\
 13/ (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0) & 14/ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x} \quad (x > 0, a > 0) \\
 15/ (\sinh x)' = \cosh x & 16/ (\cosh x)' = \sinh x \\
 17/ (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} & 18/ (\operatorname{cosech} x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x} \\
 19/ (\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & 20/ (\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1) \\
 21/ (\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1) & 22/ (\operatorname{Arcth} x)' = \frac{-1}{x^2-1} \quad (|x| > 1)
 \end{array}$$

3/ Règles de dérivation des fonctions composées :

Si $y = f(u)$ et $u = \varphi(x)$ c'est-à-dire $y = f[\varphi(x)]$, telles que y et u sont dérivables, alors :

$$y'_x = y'_u u'_x, \text{ ou e utilisant la notation de Leibnitz } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ahmed FIZAZI _ Univ-BECHAR

ANNEXE 4

FORMULES D'INTEGRATION

1/ Principales règles d'intégration :

a/ Si $F'(x) = f(x)$, alors $\int f(x) dx = F(x) + C$ où C est une constante arbitraire.

b/ $\int Af(x) dx = A \int f(x) dx$ où A est une constante.

c/ $\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$

d/ Si $\int f(x) dx = F(x) + C$ et $u = \varphi(x)$, alors $\int f(u) du = F(u) + C$

En particulier, $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, sachant que $(a \neq 0)$

2/ Table d'intégrales types :

$$I/ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$II/ \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$III/ \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$IV/ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$V/ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$VI/ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{-x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$VII/ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0) ; \int e^x dx = e^x + C$$

$$VIII/ \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$IX/ \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$XIII/ \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = \ln |\tan x + \sec x| + C$$

$$XIV/ \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$XV/ \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$XVI / \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$$

$$XVII / \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$$

3/ Méthode de substitution

a/ Changement de variable dans une intégrale indéfinie

En posant $x = \varphi(t)$ où t est une nouvelle variable et φ une fonction continue dérivable, on a :

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (1)$$

On doit veiller à bien choisir la fonction de manière que le deuxième membre de la formule (1) ait une forme commode pour l'intégration.

b/ La substitution trigonométrique :

-Si l'intégrale contient le radical $\sqrt{a^2 - x^2}$, on pose en général $x = a \sin t$, d'où $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$.

- Si l'intégrale contient le radical $\sqrt{x^2 - a^2}$, on pose alors $x = a \sec t$, d'où $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$.

-Si l'intégrale contient le radical $\sqrt{x^2 + a^2}$, on pose alors $x = a \tan t$ d'où $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec t$

4/ Intégration par partie

Si $u = \varphi(x)$ et $v = \psi(x)$ sont deux fonctions dérivables, on a :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

ANNEXE 5

QUELQUES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Soit l'équation différentielle du second ordre : $y'' + ay' + by = c$

a , b et c sont des constantes.

Premier cas : $a = 0, c = 0 \Rightarrow y'' + by = 0$

Si $b = 0$, la solution est $y = C_1x + C_2$

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales.

Si $b > 0$, la solution est $y = C_1 \sin \sqrt{b}x + C_2 \cos \sqrt{b}x$

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration..

Si $b < 0$, la solution est $y = C_1 \exp(\sqrt{b}x) + C_2 \exp(-\sqrt{b}x)$

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Deuxième cas : $a \neq 0, c = 0 \Rightarrow y'' + ay' + by = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 + ar + b = 0$, son déterminant est $\Delta = a^2 - 4b$, ses deux racines sont r_1 et r_2 :

Si $\Delta > 0$, la solution est $y = C_1 \exp(r_1x) + C_2 \exp(r_2x)$:

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Si $\Delta = 0$, alors $r_1 = r_2 = r_0$, la solution est $y = (C_1x + C_2) \exp(r_0x)$

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Si $\Delta < 0$, alors $r_{1,2}$ sont deux nombres imaginaires $r_{1,2} = \alpha + i\beta$, et la solution est $y = \exp(\alpha x) [C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x]$

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Troisième cas : $y'' = 0, c = 0 \Rightarrow ay' + by = 0$

L'équation devient du premier ordre et la solution est $y = C \exp\left(-\frac{b}{a}x\right)$

C est une constante d'intégration déterminées par les conditions initiales.

Quatrième cas : $y'' = 0 \Rightarrow ay' + by = c$

L'équation devient du premier ordre et la solution est $y = C \exp\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + \frac{c}{b}$

C est une constante d'intégration déterminées par les conditions initiales.

Quatrième cas : $y' = 0 \Rightarrow y'' + by = c$

La solution est

$$y = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{b}{c}}x\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{b}{c}}x\right) + \frac{c}{b}$$

Ahmed FIZAZI _ Univ-BECHAR

ANNEXE 6

FORMULAIRE TRIGONOMETRIQUE

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$ $\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
---	---	---

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
--	--	---

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$	$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$ $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$	$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$ $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$ $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ $\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \left(t = \tan \frac{a}{2} \right)$ $\sin a = \frac{2t}{1 + t^2}$ $\tan a = \frac{2t}{1 - t^2}$
--	---	--

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$	$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$	$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$	$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
	$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}$

$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$
$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$