الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès
Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales
Etdes Sciences De Gestion

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أمحمد بوقرة بومرداس
كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية
و علوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات في الإحصاء 1

موجهة لطلبة: السنة الأولى **تخصص**: الجذع المشترك

من اعداد الدكتور: قرينات محمد **قسم** :علوم التسيير

السنة الجامعية: 2019/2018

مقدمة:

ذكر الإحصاء في كثير من المواضع القرآنية فقد جاء بلفظ " احصاهم " في قوله تعالى: " لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤ مريم﴾ "، وجاء بلفظ "احصاه" في قوله تعالى: " أَحْصَاهُ اللَّهُ وَنَسُوهُ ﴿٦ المجادلة﴾" وفي الحديث النبوي الشريف " عَنْ حُذَيْفَةَ قَالَ: كُنَّا مَعَ رَسُولِ اللهِ صلى الله عليه وسلم فَقَالَ: "أَحْصُوا لِي كَمْ يَلْفِظُ الإِسْلاَمَ" قَالَ: فَقُلْنَا : يَا رَسُولَ اللّهِ، أَتَخَافُ عَلَيْنَا وَنَحْنُ مَا بَيْنَ السِّتِّمِائَةِ إِلَى السَّبْعِمِائَةِ؟ قَالَ: "إِنَّكُمْ لاَ تَدْرُونَ. لَعَلَّكُمْ أَنْ تُبْتَلَوْا " قَالَ، فَابْتُلِينَا ، حَتَّى جَعَلَ الرَّجُلُ مِنَّا لاَ يُصَلِّي إِلاَّ سِرًّا"، وارتبط علم الإحصاء منذ القدم بعمليات العد والحساب التي كانت تجريها الدول المختلفة في عمليات إعداد جيوشها بحساب تعدادهم وتسليحهم وكذا في عمليات تحصيل الضرائب من المزارعين، وجمع المعلومات المختلفة عن الأراضي الخاضعة لسيطرة الدولة وغيرها من العمليات البسيطة.

فالإحصاء هو العلم الذي يبحث في طريقة جمع البيانات عن الظواهر التي تحيط بنا سواء كانت علمية أو اقتصادية أو اجتماعية، وفي كيفية تسجيل هذه الحقائق والبيانات في صورة دقيقة، ثم وصفها بصورة سهلة تبين علاقات واتجاهات هذه الظواهر، وأخيرا يبحث في دراسة هذه العلاقات والاتجاهات ووضعها في صورة يسهل معها فهم الظواهر المراد دراستها.

ولا يقصد بعلم الإحصاء البيانات الإحصائية بل المقصود هو الطريقة الإحصائية التي بفضلها نتمكن من جمع الحقائق عن الظواهر الإحصائية في صورة كمية قياسية رقمية وتصنيفها في جداول تلخص لنا الظاهرة المراد دراستها وعرضها بيانيا بطرق تقودنا لعملية التحليل بطريقة سهلة وبسيطة بغية معرفة اتجاهات الظواهر وعلاقاتها ببعضها وعليه فإننا نقول ان علم الإحصاء هو نظام متكامل يتضمن الأسلوب العلمي الضروري لتقصي حقائق الظوهر واستخلاص النتائج عنها المتضمنة النظرية اللازمة للقياس لتسهل عملية التنبؤ مستقبلا ثم اتخاذ القرارات المناسبة للمسيرين في كافة الميادين. فهو بذلك علم اتخاذ القرارات في جميع نواحي الحياة، وذلك من خلال جمع ودراسة وتحليل البيانات المتوفرة واستخلاص النتائج عن الظواهر المدروسة.

صممت هذه المطبوعة لتمكين طلبة السنوات الأولى من اكتساب المفاهيم الأساسية القاعدية للإحصاء الوصفي بتبسيط كيفية وصف البيانات المتعددة باختلاف أنواعها بوضوح ودقة، الهدف منها تطوير قدرات ابناءنا الطلبة في اكتساب مهارات عن كيفية اختيار الأساليب المناسبة لوصف البيانات، والتعرف على الأساليب الإحصائية التي تساعدهم لاحقا في اتخاذ القرارات.

تأتي هذه المطبوعة كإضافة لما تزخر به المكتبات الجامعية الوطنية من كتابات في مقياس الإحصاء الوصفي مطابقة للبرنامج الوطني المخصص لطلبة السنة الأولى لميدان العلوم الاقتصادية والمعد من طرف اللجنة الوطنية المخصصة لذلك بهدف اعداد الطلبة وتسهيل عملية فهم واستيعاب مقررات الاحتمالات، لاقتصاد القياسي والتحليل الاحصائي، والتي نتطرق فيها في المحور الاول لمفاهيم عامة كمفهوم الإحصاء، المجتمع والعينة والفرد ومصادر البيانات الإحصائية.

ثم في المحور الثاني: عرض البيانات الإحصائية من خلال بناء الجداول الاحصائية وأنواعها (إيجاد الفئة، التكرارات، مركز الفئة، التكرار المتجمع الصاعد والنازل حسب نوع كل متغير...).

نخصص المحور الثالث لمقاييس النزعة المركزية الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال، وكذا للمقاييس الشبيهة بمقاييس النزعة المركزية الربيع، العشير، المئين، والعلاقة بين كل من المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال.

لننتقل في المحور الرابع: مقاييس التشتت في حالة الجداول المغلوقة بالتطرق للانحراف المعياري، والتوزيع المفتوح بنصف المدى الربيعي.

ثم نختم في المحور الأخير بمقاييس الشكل والتي تتضمن كل من العزوم والالتواء والتفلطح.

تمهيد:

من المفاهيم الشائعة بين الناس عن الاحصاء، انه ماهو إلا أرقام وبيانات رقمية فقط، كأعداد السكان، وأعداد المواليد، وأعداد الوفيات، وأعداد المزارعين، وأعداد المزارع، وخلافه، ومن ثم ارتبط مفهوم العامة عن الإحصاء بأنه عد أو حصر الأشياء والتعبير عنها بأرقام، ويبقى هذا المفهوم المحدود لعلم الإحصاء قاصرا عن تفسير الظواهر الاحصائية، حيث أن الإحصاء كعلم هو الذي يهتم بطرق جمع البيانات، تبويبها وتلخيصها بشكل يمكن الاستفادة منها في وصف البيانات وتحليلها للوصول تعطينا القدرة على التنبؤ واتخاذ قرارات سليمة في ظل ظروف عدم التأكد، وهو ما أدى بالتالي إلى البحث في تطوير الأساليب الإحصائية، وابتكار العديد من المبادئ والمناهج الاحصائية الجديدة، فقد تم استحداث العديد من البرامج الاحصائية التي تمكننا من اجراء العمليات المعقدة على كم هائل من البيانات في وقت قصير جدا.

1- علم الإحصاء وقياسه:

لقد استخدم الإنسان منذ القدم الإحصاء في تنظيم بعض الجوانب الحياتية، حيث تثبت الحفريات الى استخدام الإنسان للعد والجرد منذ بدء الحضارة، وهذا يدل على المكانة المركزية للإحصاء بين فروع المعرفة الإنسانية[1] وقد كان مفهوم الإحصاء آنذاك موازيا لمفهوم العد، اذ اقتصر استخدامه على توظيف بعض الأساليب الاحصائية البدائية من أجل خدمة بعض الأغراض.. وتشير الشواهد أن قدماء الفراعنة المصريين والإغريق اليونانيون استخدموا بعض مبادئ الإحصاء مثل عد أو إحصاء الموارد المتاحة، وحصر عدد الجنود، وعدد السكان من أجل تنظيم الميزانية وترتيب الخطط أوقات الحرب والسلم، وبذلك فقد اقتصر استخدام الاحصاء لخدمة أغراض الدولة، فالإحصاء كلمة مشتقة من اللفظ اللاتيني "**ستاتوس**" أو "**ستاتو**" الذي يستعمل بمعنى الدولة كما يستعمل أيضا ليشير للمعلومات المتصلة بنظام الدولة ومؤسساتها وأجهزتها المختلفة وأحوالها. ولذلك أطلق على الاحصاء اسم "استاتستك" " **statistic** " ليدل على مجموعة المعلومات الخاصة بالدولة في وقت من الأوقات، أما المفهوم الحديث له برز بوصفه علما اجتماعيا في الثلاثينيات وهو يستخدم في الرياضيات والاحتمالات مما جعله يشمل تطبيقات متعددة في العلوم كالطب والاقتصاد والتربية

[1] بوعبد الله صالح، الميسر في الاحتمالات والاحصاء، جامعة المسيلة، دون سنة نشر، ص 03.

وعلم النفس، أما الفائدة الكبرى له فإنه يستخدم في التخطيط، ولا يستغرب أحدا إذا عرف أن الإحصاء هو السلاح الأول الذي تستخدمه الدول المتقدمة والعقل الحاسب هو ثمرة البحث الاحصائي.

أما الاحصائيات فهي البيانات العددية المتعلقة بموضوع ما والمنظمة (في جداول أو رسوم بيانية) حول نشاط أو قطاع معين في الدولة[1].

1-1 : مفهوم الإحصاء:

- الإحصاء هو علم جمع وترتيب معلومات خاصة بظاهرة معينة وقياس الوقائع كأساس للاستقراء[2].
- يقصد بعلم الإحصاء الطريقة الإحصائية التي تمكن من: جمع الحقائق عن الظواهر المختلفة في شكل قياسي، تسجيل بيانات تلك الحقائق في جداول تلخيصية، عرض بيانات تلك الجداول بيانيا وتحليلها بهدف معرفة اتجاهات هذه الظواهر والعلاقات فيما بينها[3].
- علم الإحصاء هو فرع من فروع الرياضيات يشمل النظريات والطرق الموجهة نحو جمع البيانات ووصفها والاستقراء وصنع القرارات[4].

وعليه يمكننا القول أن الإحصاء هو العلم الذي يبحث في طرق جمع البيانات الخاصة بمختلف الظواهر وغيرها وتحليلها للوصول إلى نتائج تساعدنا في عملية اتخاذ القرارات المناسبة، وبالتالي هو اسلوب منطقي منتظم موحد يعالج الموضوعات والخصائص التي يمكن أن يعبر عنها بصورة رقمية. فهو بذلك علم اتخاذ القرارات في جميع نواحي الحياة، وذلك من خلال جمع ودراسة وتحليل البيانات المتوفرة واستخلاص النتائج عن الظواهر المدروسة.

2-1 : أهمية علم الاحصاء ووظائفه.

يساعد علم الاحصاء في:

- التقدير الفعلي لحجم المشكلة المراد دراستها.
- جمع البيانات أو المعطيات أو المعلومات على الظاهرة المقتبسة.

[1] ساعد بن فرحات، عبد الحميد قطوش، الإحصاء 1، مدعمة تمارين وامتحانات محلولة، السنة الجامعية 2013-2014، ص6.

[2] جلاطو جيلالي، "**الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة**"، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثامنة، الجزائر، 2010، ص 03.

[3] مصطفى الخواجة، "**مقدمة في الإحصاء**"، الدار الجامعية الإسكندرية، 2002، ص 03.

[4] طكوش صبرينة، محاضرات في الإحصاء الوصفي، جامعة الجزائر 3، 2015/2014، ص 05.

– القيام بعملية المعاينة على اختلاف صورها وأشكالها وتكراراتها وفئاتها والمتغيرات التي تحويها الظاهرة.

– تحليل الظاهرة واستقراؤها والقيام بعملية الاستنتاج والتنبؤ والاستدلال.

– وصف البيانات وتوزيعاتها وتقسيماتها وتكراراتها وفئاتها والمتغيرات التي تحويها الظاهرة.

– تلخيص نتائج التجارب المعملية وغير المعملية وتقييم الظواهر المختلفة.

– التعرف على الفروق في الأخطاء التي قد تنجم عن القياس أو عن اختيار العينة أو عن الصدفة.

– صياغة دراستنا صياغة علمية منهجية تجريبية قياسية مناسبة.

– التوصل إلى الحقائق العلمية والقوانين التي تحكم الظواهر وصولا إلى إمكانية إجراء تعميمات يمكن في ضوئها تفسير السلوك أو متغيرات الظاهرة المدروسة.

3-1 : فروع علم الاحصاء

ينقسم علم الاحصاء إلى الإحصاء الوصفي والاحصاء الاستدلالي، ويختص الإحصاء الوصفي بتلخيص وتوصيف مجموعة من البيانات، فيما يختص الإحصاء الاستدلالي بالوصول الى تعميم عن خواص الكل (المجتمع) من واقع فحص جزأ من الكل (العينة)[1].

أ– إحصاء وصفي:

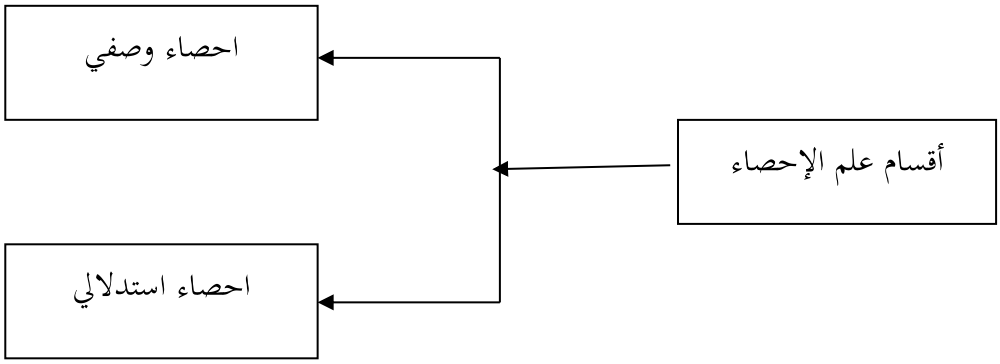
هو ذلك الجزء من الاحصاء الذي يهتم بتلخيص البيانات الاحصائية إلى عدد محدود من الأرقام تسمى مقاييس إحصائية أو في جدول إحصائي يسهل القراءة أو في رسوم بيانية، والغرض من كل ذلك هو اعطاء وصفا أوليا للظاهرة المدروسة بدون تحليل معمق.

ب– إحصاء استدلالي (استنتاجي):

يستند على فكرة إجراء الدراسة الإحصائية (جمع البيانات) على جزء من المجتمع يسمى العينة، يتم اختيارها بطريقة مناسبة، بغرض استخدام بيانات هذه العينة في التوصل إلى نتائج يمكن تعميمها على مجتمع الدراسة، فنقول لقد استدللنا على خواص المجتمع على أساس خواص العينة، وهذا عكس الاستنباط الذي يعني استخراج خواص الجزء انطلاقا من خواص الكل. والتي نلخصها في الشكل الموالي:

[1] دومينيك سلفادور، " **ملخصات شوم، نظريات ومسائل في الإحصاء والاقتصاد القياسي**"، ترجمة سعيد حافظ منتصر، مصر، 1983، ص 01.

الشكل 01: أقسام علم الاحصاء



فإذا كانت لدينا كمية كبيرة من البيانات العددية، فإن الإحصائي سيحاول أن يرتبها في صورة تجعل من السهل قراءتها وفهمها، وقد يتضمن هذا:

- تبويب البيانات وتقديمها في شكل جداول تكرارية، أو في شكل منحنيات بيانية ليسهل فهم معناها.
- حساب بعض المقاييس أو المؤشرات الإحصائية مثل النسب أو المتوسطات.

وتدخل العمليات السابقة في نطاق الإحصاء الوصفي، أما الإحصاء الاستدلالي فهو يختص بإجراء التنبؤات والتقديرات والاستنتاجات عن مجموعة من المتغيرات أكبر من تلك التي تمت ملاحظتها فعلا[1].

2- مفاهيم أساسية في علم الإحصاء.

2-1 : الوحدة الإحصائية:

هي الكائن الواحد أو الخلية الأساسية التي تجرى عليه الدراسة الإحصائية، أي أن أسئلة الاستمارة تدور حوله، سواء كان هذا الكائن إنسانا أو حيوانا أو شيئا مثل إنسان، بقرة، سيارة.....إلخ.[2]

2-2: المجتمع الإحصائي:

هو مجموعة المشاهدات والقياسات الخاصة بمجموعة من الوحدات الإحصائية والتي تخص ظاهرة من الظواهر القابلة للقياس: مجتمع من الطلبة، مجتمع من الاسر، مجتمع من المؤسسات[3]، أو هو مجموع الوحدات الاحصائية المراد دراستها أو المعرفة بشكل دقيق والتي تشترك فيما بينها في الصفة الأساسية محل اهتمام الباحث.

---

[1] موسي عبد الناصر، دروس في الاحصاء الوصفي، جامعة محمد خيضر بسكرة، 2006-2007، ص 01.

[2] جلاطو جيلالي، الإحصاء مع تمارين محلولة، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة 1، 2001، ص 5.

[3] نفس المرجع، ص 05.

2-3: المتغير الإحصائي:

هو الخاصية أو الصفة (نوعية أو كمية) المشتركة لكل الوحدات الإحصائية التي تشكل المجتمع الإحصائي مثل: الطول، السن، المستوى التعلمي، الإنتاج...إلخ، وتنقسم المتغيرات الإحصائية الى نوعين:

2-3-1 المتغير الكيفي:

هي تلك المتغيرات غير قابلة للقياس أي لا تأخذ قيما عددية مثل الألوان، الجنسية، اللغة، الجنس، تقديرات الشهادات...الخ وينقسم بدوره الى نوعان:

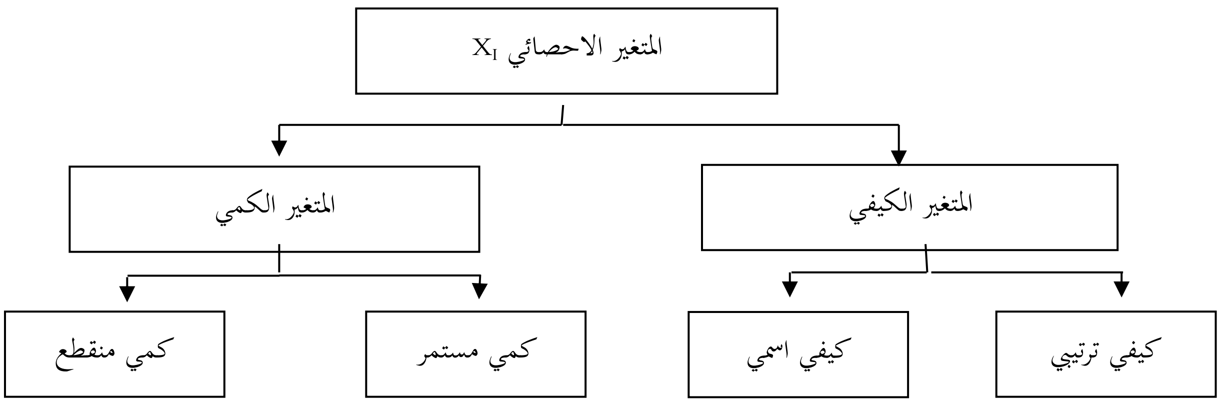
- **متغير كيفي ترتيبي:** كتقديرات الحصول على البكالوريا.
- **متغير كيفي اسمي:** أي غير ترتيبي كالجنسية، لون العيون.

2-3-2 المتغير الكمي:

هي تلك المتغيرات القابلة للقياس وهي الأكثر استعمالا، حث يعبر عنها بصفة بأرقام تمثل القيمة الحقيقية للظاهرة كعدد افراد الاسرة، عدد غرف المنزل، الربح، رقم الاعمال...الخ، بدوره ينقسم الى نوعين:

- **متغير كمي منفصل: (متقطع)**: وهي تلك المتغيرات التي تأخذ قيما صحيحة ولا يمكن تجزئتها كعدد الأطفال، وعدد غرف المنازل.
- **متغير كمي مستمر**: نقصد بها تلك المتغيرات التي تأخذ كل القيم الممكنة لمجال الدراسة، ونظرا لان القيم في هذه الحالة لا متناهية يتم تقسيم هذه القيم الى فئات، والشكل الموالي يلخص ذلك.

الشكل 02: أنواع المتغيرات.



المصدر: من اعدادنا

3- مصادر جمع البيانات:

3-1 جمع البيانات:

يقصد بجمع البيانات عملية الحصول على معلومات رقمية أو وصفية تتسم بالصحة والدقة عن ظاهرة من أحد المصادر المعروفة محدودة الفترة الزمنية، كون البنات الإحصائية يتم جمعها خدمة لهدف معين قد يكون في الغالب حل مشكلة من المشاكل التي تعترضنا في حياتنا اليومية، ولدراسة أي مشكلة لا بد من توافر مجموعة من البيانات التفصيلية في صورة رقمية تساعد على تحديد حجم المشكلة والعناصر المكونة لها بغية اتخاذ قرارات لاحقا بهدف تصحيح الأوضاع.

إن دقة البيانات المستخدمة تجعل من مصداقية النتائج الناجمة عن التحليل الاحصائي على مستوى عال من الدقة، و تعد البيانات المادة الأساسية الرئيسية للدراسات الاحصائية، وعليها تتوقف دقة الوصف والتحليل وسلامة الاستنتاج ومنطقيته، فإذا كانت هذه البيانات والمعلومات دقيقة وشاملة وواقعية، كان الوصف والاستنتاج والقرار الذي نحصل عليه سليما وصحيحا، وعليه وجب توخي الدقة والاهتمام البالغ والحرص الشديد في الحصول على بيانات سليمة وواقعية حول الظواهر محل الدراسة لأنها تشكل العمود الفقري والحجر الأساسي في علم الإحصاء، وهناك عدة مصادر للحصول على البيانات تختلف باختلاف موضوع الدراسة والغرض منها، من أهم هذه المصادر ما يلي:

-النشريات، الدوريات والسجلات.

-التجارب.

-الاستبيان.

- التعدادات العامة.

وهناك طرق عدة للحصول على البيانات الإحصائية والتي يمكننا الحصول عليها من خلال قسمين من المصادر:

3-2 المصادر التاريخية:

وتصنف باحتوائها للبيانات الثانوية التي قد تم جمعها في تواريخ سابقة أحيانا بصورة دورية لتخدم أغراضا معينة. وهي البيانات التي يمكن التوفر عليها في الاحصاءات الرسمية والبيانات المنشورة. التي يتولى جمعها وتصنيفها ونشرها دوائر حكومية متخصصة، وكذا الوكالات والهيئات الاحصائية المختصة والبيانات المتوفرة

ايضا عبر شبكة الانترنت. ونشير أن هده المصادر توفر مشقة جمع البيانات من الميدان وما يترتب عليه من جهد وتكاليف مادية. ونعيب عنها أنها قد تكون قديمة وغير متجددة وقد لا تفي تماما لغرض البحث كما قد يكون بها بعض التحيز التي هي مساوئ تعيق من الاستفادة من البيانات بصورة كاملة[1].

3-3 المصادر الميدانية أو الأصلية:

والتي يلجأ الباحث إليها غالبا حين لا تتوفر بيانات من المصادر التاريخية حيث نتحصل من خلالها على البيانات الأولية التي يتم تجميعها من مصادرها الأصلية مناسبة لغرض معين ومخصص ومحدد مسبقا. ومعنى دلك أن يتصل الباحث بموضوع بحث مباشرة. فهي تضع الباحث وجها لوجه أمام الظواهر التي يدرسها. فالحصول على بيانات أولية يتطلب انتاج طرق الملاحظة أو التجربة أو المسح وعلى العموم يتم جع البيانات من الميدان باتباع أحد الأسلوبين التاليين:

3-3-1 اسلوب الحصر الشامل:

والذي يعتمد على جمع البيانات عن جميع الوحدات الإحصائية المكونة للمجتمع محل البحث، ويتم استخدام هدا الأسلوب في الحالات التالية:

1- البيانات المطلوبة بصفة فردية من مفردات المجتمع وعلى حدى؛
2- الجصول على نتائج البحث على مستوى عالي الدقة؛
3- عدم تجانس مفردات المجتمع وادا ما كان المجتمع صغير نسبيا.

3-3-2 أسلوب العينات:

ويعتمد على جمع البيانات من مجموعة مختارة من مفردات المجتمع المراد دراسته، ثم يتم دراسة صفات هده العينة من المفردات التي اختيرت، بطريقة معينة لتمثل أحسن تمثيل المجتمع محل الدراسة. ويتم تعميم النتائج التي يحصل عليها الباحث من بيانات العينة على المجتمع بأكمله. وهناك كثير من الأبحاث والدراسات التي تتم بواسطة هدا الأسلوب باعتباره من الأساليب الأكثر شيوعا في الدراسات الاحصائية الميدانية. ويستخدم اسلوب العينات كدلك عندما يكون المجتمع لا نهائي. إلا أن هناك اخطاء يتعرض لها الباحث

[1] سياغ احمد رمزي، محاضرات في الإحصاء الوصفي، جامعة ورقلة، 2015، ص 04.

عند استخدام أسلوب العينات منها خطأ الصدفة الذي يحدث نتيجة عدم التجانس في مفردات المجتمع أو لحجم العينة وخطأ التحيز الذي ينشأ نتيجة لعوامل إنسانية بحتة بسبب سوء اختيار العينة.

وفي هذا السياق فإن التعامل مع العينات لا يكمن فقط في جمع بيانات في حد ذاتها بل أيضا في معرفة كيفية الحصول عليها وكيفية اختيار العينة بطريقة المناسبة التي تبنى على اعتبارات معينة، مثل طبيعة التباين والاختلاف بين مفردات المجتمع المراد دراسته، وكذلك التكاليف التي يتحملها الباحث. وعموما في عملية اختيار العينات يمكن للباحث تبني طرق الاختيار العشوائي المبني على الاحتمالات. ونذكر من أهمها: العينة العشوائية البسيطة، العينة الطبقية، العينة المرحلية، العينة المنظمة، العينة العنقودية، المعاينة المتتابعة[1].

3-4 : العينة الإحصائية: هي جزء من المجتمع محل الدراسة مثل مجموعة من سكان مدينة، أو مجموعة من طلبة جامعة بومرداس، أو بعض المساحات الزراعية في الجزائر ...الخ. ويتم استخراجها بطرق احصائية معينة حتى تكون ممثلة للمجتمع الإحصائي أحسن تمثيل، ويتم الاعتماد عليها في الدراسة بدل المجتمع للأسباب التالية:

أ- كبر حجم المجتمع؛

ب- ربحا للوقت والجهد والمال؛

ت- الفحص قد يكون مؤذيا أو متلفا للوحدات؛

ث- قد تكون الدراسة الشاملة مستحيلة في حالة حجم المجتمع غير محدود.

ج- الحاجة لنتائج دراسة سريعة نسبيا.

كما للباحث حرية اختيار العينة الغير احتمالية التي تعبر عن وجهة نظره دون التقيد بتحديد إطار للعينة ويتم اختيار مفرداتها باستخدام الطرق الذاتية أو حسب قناعة الباحث ومعرفته بالمجتمع، ومن أهم العينات:

- عينة الحصص.
- العينة القائمة على الحكم الشخصي.
- العينة الميسرة.

[1] المرجع السابق، ص 05.

فبمجرد أن يتم جمع وتحليل وعرض البيانات الأولية فإنها تصبح بيانات ثانوية قابلة للمعالجة ونستطيع إبتداءا من هنا المرور إلى مرحلة التحليل والتلخيص ووصف وترتيب البيانات[1].

2-4 -1: أنواع أهم العينات الإحصائية:

- **العينة العشوائية البسيطة:** هي العينة الأكثر استخداما وتستعمل في حالة المجتمعات المتجانسة، ونقصد بالتجانس هنا ان الوحدات الإحصائية تشترك في الصفة المراد دراستها بشكل متقارب جدا.

مثال 01: مجتمع من الطلبة يشكل مجتمعا متجانسا من ناحية العمر، كون اغلب الطلبة بدؤوا دراستهم في نفس السن ومروا عبر نفس المراحل.

- **العينة العشوائية ذات مراحل:** هي نفسها العينة العشوائية غير أنها تتم بمراحل متعددة، أي هي كذلك تستخدم في حالة المجتمعات المتجانسة الكبيرة جدا.

مثال 02: أردنا دراسة تقديرات الحصول على البكالوريا في الجزائر، في المرحلة الأولى نختار عشوائيا ولاية من الولايات المشكلة للوطن، ثم نختار عشوائيا دائرة من دوائر الولاية في مرحلة ثانية، في مرحلة ثالثة نختار بلدية من البلديات المشكلة للدائرة، ثم في مرحلة رابعة نختار ثانوية من ثانويات البلدية.

- **العينة الطبقية:** تستخدم في حالة المجتمعات غير المتجانسة أي تلك المجتمعات التي تتشكل من طبقات وفئات متباينة فيما بينها.

مثال03: يضم أحد المصانع 1000 عامل، نسبة العمال الذين تقل أعمارهم عن 20 سنة هو 20%، فيما تبلغ نسبة العمال الذين تتراوح أعمارهم بين 20 و 50 سنة 75% والباقي أعمارهم اكثر من خمسون سنة، أراد المدير تشكيل لجنة حجمها خمس عشر عدد العمال للتفاوض معها في حالة وجود مشاكل، بصفتك طالب متربص في المصنع طلب منك المدير تشكيل اللجنة حتى تكون ممثلة للمجتمع الاحصائي احسن تمثيل.

الحل:

نرمز ب n لحجم العينة و n_1، n_2، n_3 للعمال المشكلين للجنة من الفئات العمرية أقل من 20 سنة، بين 20 و 50 سنة، أكثر من 50 سنة على التوالي و N لعدد عمال المصنع.

---

[1] سياغ احمد رمزي، سبق ذكره، ص 06.

نلاحظ ان المجتمع غير متجانس من ناحية العمر فهو يتشكل من ثلاث فئات عمرية مختلفة وبالتالي يجب استخدام العينة الطبقية وحتى تكون ممثلة للمجتمع الاحصائي يجب المحافظة على نفس التركيبة

1- **تحديد حجم العينة n**

$$n = \frac{1}{5} * \frac{1}{10} N = \frac{1000}{50} = 20$$

اذن سنشكل مكونة من 20 عامل.

2- **إيجاد كل من** n_1، n_2، n_3

$$n1 = \frac{20 * n}{100} = 4$$

$$n2 = \frac{75 * n}{100} = 15$$

$$n3 = \frac{5 * n}{100} = 1$$

اذن سنختار خمسة عمال أقل من عشرين سنة و15 عامل تتراوح أعمارهم بين عشرين وخمسون سنة وعامل واحد أكثر من خمسون سنة.

3-5- جمع البيانات وتبويبها:

3-5-1: جمع البيانات الإحصائية: يتم جمع البيانات الإحصائية بطرق ومن مصادر مختلفة، وذلك حسب الهدف من الدراسة وأسلوب التحليل المتبع ومن بين الطرق المتبعة في جمع البيانات نذكر:

أ- الطريقة المباشرة: يقصد بهذه الطريقة قيام الباحث بجمع المعلومات الاحصائية بنفسه، من مصادرها الأولية كأن يقوم بطرح الأسئلة مباشرة على الأسر وتسمى كذلك الطريقة الميدانية.

ب- الطريقة الغير مباشرة: وتسمى أيضا طريقة البيانات الثانوية. وهي تشمل جمع البيانات والمعلومات الإحصائية المتوفرة من وثائق ومطبوعات ونشرات احصائية التي تصدرها الهيئات والدواوين المختلفة، وكذلك الهيئات الدولية ومنظماتها المختلفة، وكذا الإحصاءات الموثقة في بحوث سابقة، أو التي نحصل عليها من مواقع الانترنت الموثوقة والمتخصصة في المجال.

3-2.5 تبويب البيانات وتقريبها: إن مجرد جمع البيانات الاحصائية عن متغيرات مجتمع ما يكاد يكون عديم الفائدة، خصوصا إذا تم التعامل مع هذه البيانات على الصورة التي هي عليها، إذ لا يمكن من خلالها وصف خصائص المجتمع على نحو دقيق، أو الوصول إلى أية استنتاجات أو عمل أحكام حيالها،

لاسيما إذا كان حجم البيانات كبير جدا، كما هو الحال في معالجة درجات الطلبة المتقدمين لامتحان الشهادة الثانوية، أو مبيعات شركة تجارية متعددة الأغراض، أو الموارد الاقتصادية المتعددة لدولة ما، أو رواتب الموظفين في القطاعات العامة والخاصة وغيرها من الأمثلة الأخرى.

وحتى يتم التعامل مع البيانات الاحصائية الخام التي يتم جمعها عن متغيرات مجتمع ما يجب العمل على تنظيمها وتلخيصها على نحو يسهل عملية معالجتها وتحليلها، ويمكن تحقيق هذا الغرض من خلال اللجوء إلى التوزيعات التكرارية للبيانات، وذلك من خلال عرض البيانات وتمثيلها في جداول تكرارية أو رسوم بيانية.

فالتوزيعات التكرارية هي بمثابة معالجة أولية للبيانات الاحصائية، وقد يشكل هدفا يتوقف معالجة البيانات عنده، أو إنها تشكل خطوة من ضمن خطوات معالجة البيانات وتحليلها، بحيث يسهل لاحقا إجراء المزيد من المعلومات الاحصائية المعقدة على هذه البيانات، ويمكن تنظيم البيانات وتلخيصها وفق التوزيعات التكرارية من خلال العرض الجدولي أو التمثيل البياني.

3-3.5- تقريب البيانات:

يعتمد الإحصاء في كثير من عملياته على التقريب الذي يهدف من ورائه تبسيط العمليات الحسابية حتى يتيسر للباحث معالجتها وتأكيد معالمها الرئيسية، وتساعد القارئ على فهم نتائجها.

أ – التقريب البسيط:

تقوم فكرة التقريب على حذف الرقم الذي يبدأ به العدد من اليمين ثم إضافة واحد صحيح إلى الرقم الذي يتبع إلى يساره مباشرة إذا كان الرقم المحذوف أكبر من 5 أو يترك كما هو دون إضافة الواحد الصحيح إذا كان الرقم المحذوف أقل من 5.

مثال: قرب الأعداد التالية: 1.3، 25.4، 15.6، 18.7، 29.8 إلى أعداد صحيحة؟

الحل:

الاعداد الاصلية	1.3	25.4	15.6	18.7	29.8
الاعداد المقربة	1	25	16	19	30

أما إذا كان الرقم المحذوف يساوي 5 فإن الرقم الذي يقع إلى يساره يقرب إلى أقرب عدد زوجي، أما إذا كان الرقم زوجيا ظل كما هو.

مثال: قرب الأعداد التالية: 1.5، 24.5، 15.5، 18.5، 29.5 إلى أعداد صحيحة؟

الحل:

الاعداد الاصلية	1.5	24.5	15.5	18.5	29.5
الاعداد المقربة	2	24	16	18	30

ومن أهم استخدامات التقريب تقريب النسب المئوية والكسور العشرية إلى أقرب عدد صحيح وأثر هذا التقريب على مجموعها النهائي الذي يجب أن يساوي 100 في حالة النسب المئوية، وواحد صحيح في حالة الكسور العشرية.

تمارين مقترحة للمحور الأول:

التمرين الأول:

حدد في العبارات التالية كل من: المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الاحصائي ونوعه:

- العمر الافتراضي للمصابيح الكهربائية المنتجة في مصنع.
- الأجور الشهرية لعمال مؤسسة ما.
- أوزان طلبة العلوم الاقتصادية.
- الرياضة المفضلة لطلبة جامعة بومرداس.
- عدد الغرف المملوكة من طرف كل عائلة في حي 1200 مسكن ببومرداس.
- تصنيف عمال مصنع حسب المؤهل.
- عدد السيارات في دولة حسب الصنف.
- تصنيف الأحزاب السياسية حسب عدد الأصوات المحصل عليها في الانتخابات.
- **التمرين الثاني:**

أراد عميد كلية العلوم الاقتصادية أن نختار عينة من ممثلي طلبة كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير في جامعة بومرداس لحضور المجالس البيداغوجية حجمها نصف عشر عدد الطلبة.

- إذا علمت أن الطلبة يتوزعون على الشكل التالي حسب التخصصات التالية:
- العلوم الاقتصادية = 500 طالب
- العلوم التجارية = 400 طالب
- علوم التسيير = 300 طالب
- العلوم المالية = 200 طالب

1- حدد بدقة العينة حجم العينة.

2- حدد تركيبة العينة حتى تكون ممثلة للمجتمع أحسن تمثيل؟

حل التمرين الأول:

العبارة	المجتمع	الوحدة	المتغير	نوعه
1	مصابيح منتجة	مصباح	العمر الافتراضي	كمي مستمر
2	عمال مؤسسة	عامل	الأجور الشهرية	كمي مستمر
3	طلبة العلوم الاقتصادية	طالب	الوزن	كمي مستمر
4	طلبة جامعة بومرداس	طالب	الرياضة المفضلة	كيفي اسمي
5	عائلات حي 1200 ببومرداس	عائلة	عدد الغرف	كمي منفصل
6	عمال المصنع	عامل	المؤهل	كيفي ترتيبي
7	سيارات	سيارة	الصنف	كيفي اسمي
8	الأحزاب السياسية	حزب	عدد الاصوات	كمي منفصل

حل التمرين الثاني:

نسمي N عدد طلبة الكلية لكل التخصصات، N_1، N_2،N_3،N_4 أعداد طلبة تخصصات العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية، علوم التسيير والعلوم المالية على الترتيب.

n حجم العينة المراد تشكيلها، n_1، n_2، n_3،n_4، أعداد الطلبة من تخصصات العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية، علوم التسيير والعلوم المالية على الترتيب.

1- إيجاد حجم العينة:

$$N= N1 + N2 + N3 + N4 = 500 +400 +300 +200 = 1400$$

$$n = \frac{1}{2} * \frac{1}{10} N$$

$$n = \frac{1}{2} * \frac{1}{10} 1200 = 70$$

وعليه حجم العينة هو سبعون طالب.

2- تركيبة العينة:

حتى تكون العينة ممثلة للمجتمع الاحصائي أحسن تمثيل لابد من المحافظة على نفس تركيبة المجتمع، أي نفس النسب من التخصصات المشكلة لمجتمع الطلبة.

إيجاد كل من n_1، n_2، n_3،n_4،

1- حجم العينة من تخصص علوم اقتصادية.

$$n1 = \frac{1}{2} * \frac{1}{10} N1 = \frac{1}{20} 500 = 25$$

2- حجم العينة من تخصص العلوم التجارية.

$$n2 = \frac{1}{2} * \frac{1}{10} N2 = \frac{1}{20} 400 = 20$$

3- حجم العينة من تخصص علوم اقتصادية.

$$n3 = \frac{1}{2} * \frac{1}{10} N3 = \frac{1}{20} 300 = 15$$

4- حجم العينة من تخصص علوم اقتصادية.

$$n4 = \frac{1}{2} * \frac{1}{10} N4 = \frac{1}{20} 200 = 10$$

وبالتالي إذا جمعنا هده الاعداد فإن 25 + 20 + 15 + 10 = 70 وهو المطلوب.

تمهيد:

عند توافر عدد كبير من البيانات يتطلب الأمر في كثير من الأحيان وضع القيم في جدول تكراري، تلخص البيانات الإحصائية المدروسة بشكل يمكن من خلاله التعامل مع البيانات بقدرة وكفاءة أعلى، وذلك يتيح للباحث القدرة على التعمق في فهم البيانات الإحصائية بالإضافة إلى إمكانية إجراء تحليل احصائي استدلالي.

1- العرض الجدولي والبياني للبيانات:

بعد جمع البيانات الإحصائية لابد من عرضها وتصنيفها بشكل يظهر العلاقة بينها

1-1- العرض الجدولي:

تعرض البيانات في جداول وذلك بتصنيف المعلومات وترتيبها وفقا لبعض خواصها، وأهم أساليب الترتيب هي:

الترتيب التاريخي، الأبجدي، الكمي، والجغرافي. وهناك بعض النقاط الأساسية التي يجب أخذها بعين الاعتبار حتى نتمكن من فهم محتوياته تسمى عناصر الجدول[1]، حيث في الجدول المعلومات التالية لكي يكون مقبولا علميا:

- العنوان الكامل والواضح للجدول (يحدد فيه الموضوع، المكان، الزمان) ويكون عادة إما في أعلى الجدول ويرقم؛
- وحدة القياس وتكون في أعلى الجدول إلى اليمين؛
- مصدر الجدول: أي تحديد مصدر البيانات الموجودة في الجدول، ويكون في أسفل الجدول.

وطريقة العرض الجدولي تمتاز بالدقة، ولذلك فهي أهم أسلوب متبع لعرض المعلومات، وما يؤخذ على هذه الطريقة عدم اعطاء فكرة سريعة بمجرد نظرة واحدة إلى الجدول.

وتلخص الجداول التكرارية البيانات الكمية الكثيرة في وضعها على صورة جدول منتظم يوضح كيفية توزيع القيم التي حصلنا عليها من الظاهرة المدروسة حيث يدل العمود (السطر) الأول على قيم الظاهرة، ويدل العمود (السطر) الثاني على التكرار المقابل لهذه القيم.

[1] سامية تيلوت، "**مبادئ الإحصاء**"، جامعة الجزائر، 2009، ص 11.

مثال 2: جدول يبين عدد سكان الجزائر من جانفي 2013 إلى جانفي 2018 حسب الاحصائيات الحديثة.

السنة	2013	2014	2015	2016	2017	2018
السكان (مليون ن)	38.34	39.11	39.5	40.4	41.6	42.2

المصدر: الديوان الوطني للإحصاء 2018.

1-1-1 جدول توزيع تكراري لخاصية كيفية: تتكون من سطرين او عمودين السطر الأول يتضمن قيم المتغير والتي ستكون وصف او عبارة اما السطر الثاني فيحتوي على التكرار المقابل لها.

مثال 03: جدول احصائي لجنسية لاعبي ريال مدريد.

الجنسية X_i	برازيلي	فرنسي	اسباني	ألماني	انجليزي	المجموع Σ
التكرار n_i	03	04	10	03	2	22

المصدر: افتراضي.

2-1-1 جدول توزيع تكراري لخاصية كمية منقطعة: تتكون من سطرين او عمودين السطر الأول يتضمن قيم المتغير والتي ستكون قيما صحيحة غير قابلة للتجزئة اما السطر الثاني فيحتوي على التكرار المقابل لها.

مثال 4: جدول توزيع تكراري لعدد أفراد الاسرة.

عدد الافراد X_i	02	03	04	05	06	المجموع Σ
التكرار n_i	20	14	16	20	30	100

المصدر: افتراضي.

3-1-4 جدول توزيع تكراري لخاصية كمية مستمرة: تتكون من سطرين او عمودين السطر الأول يتضمن قيم المتغير والتي ستكون فئات اما السطر الثاني فيحتوي على التكرار المقابل لها.

الفئة [A B [: هي المجال الذي يشمل حدا أدنى (A) وحدا اعلى (B)، مغلقا عند الحد الأدنى ومفتوحا عند الحد الأعلى الا في بعض الاستثناءات حيث يتم غلقه عند الفئة الأخيرة، اما طول الفئة K فأنه يعبر عنه بالمقدار $K = B - A$ [1]، ويتم تحديد طول الفئة عن طريق:

أ- علاقة ستورج : لحساب طول الفئة K وفق احدى العلاقتين التاليتين:

$$K = \frac{E}{1+1.32\, Ln\, N}$$ أو

[1] طكوش صبرينة، سبق ذكره ص 11.

$$K = \frac{E}{1+3.32\ Log\ N}$$

حيث يمثل المقدار

E المدى العام والذي يعني الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في السلسلة $E= Xmax - Xmin$.

N يمثل حجم العينة أو المجتمع الاحصائي

Ln : اللوغاريتم النيبيري،

Log اللوغاريتم العشري.

ب- معادلة يول:

$$K = \frac{E}{2.5\sqrt[4]{N}}$$

حيث يمثل المقدار

E المدى العام والذي يعني الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في السلسلة $E= Xmax - Xmin$.

N يمثل حجم العينة أو المجتمع الاحصائي.

تذكير: بشكل عام، الجذر من الدرجة n بالعدد x يدعى **الجذر النوني** .عادة ما تُكتب الجذور باستعمال رمز الجذر $\sqrt{\ }$ ، فإن الرمز $\sqrt[2]{\ }$ يرمز للجذر التربيعي للعدد، أما الرمز فيدل على الجذر التكعيبي للعدد، أما الرمز $\sqrt[3]{\ }$ فيدل على الجذر الرابع $\sqrt[4]{\ }$، وإلخ . تسهيلا للحساب تعتبر الجذور حالة خاصة من الرفع للقوة، حيث يكون بها الأس كسرا $x^{\frac{1}{n}}=$: $\sqrt[n]{x}$.

ملاحظة: العلاقتين تعطينا **أطوال فئة متساوي** ومقدار المقام يمثل عدد الفئات،

ت- الطريقة المرنة:

فيها يتم تحديد عدد الفئات وبالتالي نستخرج طولها والتي لا تعتمد على المعدلات الرياضية

طول الفئة × عدد الفئات $\leq$ المدى العام

مثال05 : البيانات التالية تمثل أوزان خمسون تلميذا، شكل جدول توزيع تكراري باستخدام كل من علاقة ستورج وعلاقة يول.

مطبوعة إحصاء وصفي لطلبة السنة الأولى جامعة بومرداس، د قرينات محمد ، m.grinat@univ-boumerdes.dz

30 32 31 33 30 34 31 31 30 33 34 32 31 30 34 29 28 25 26 26 22 20

39 43 38 42 37 44 36 40 35 38 31 35 39 36 37 38 39 35 31 33 31 32

.48 44 49 40 45 49

الحل:

أولا نقوم بتشكيل هذا الجدول المساعد حتى لاننسى أي قيمة من قيم المتغير ويسمى بجدول التفريغ.

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
20	1	25	1	30	4	35	3	40	2	45	1
21	0	26	2	31	7	36	2	41	0	46	0
22	1	27	0	32	3	37	2	42	1	47	0
23	0	28	1	33	3	38	3	43	1	48	1
24	0	29	1	34	3	39	3	44	2	49	2

1- نقوم أولا بحساب طول الفئة باستخدام علاقة ستورج

$$K = \frac{E}{1 + 1.32\, Ln\, N}$$

$$K = \frac{49 - 20}{1 + 1.32\, Ln\, 50}$$

$$K = 5$$

يعني نشكل جدولا بفئات متساوية طول كل واحدة منها خمسة انطلاقا من أصغر قيمة في السلسلة وهي 20.

جدول توزيع تكراري لأوزان التلاميذ.

الفئات X_i	]25-20]	]30-25]	]35-30]	]40-35]	]45-40]	]50-45]	المجموع Σ
التكرار n_i	02	05	20	13	06	04	**50**

2- نقوم أولا بحساب طول الفئة باستخدام علاقة يول

$$K = \frac{E}{2.5\sqrt[4]{N}}$$

$$K = \frac{E}{2.5\sqrt[4]{N}}$$

$$K = \frac{49 - 20}{2.5\sqrt[4]{100}}$$

$$K = \frac{29}{2.5X3.16}$$

$$K = \frac{29}{7.9} = 3.67 \approx 4$$

اذن نشكل الجدول بثمان فئات متساوية.

الفئات	]24-20]	]28-24]	]32-28]	]36-32]	]40-36]	]44-40]	]48-44]	]52-48]	المجموع Σ
التكرار n_i	02	03	13	12	10	04	03	03	**50**

مثال 06: البيانات التالية تمثل مبيعات كشك معين من جريدة الخبر خلال 50 يوم، شكل جدول توزيع تكراري من 10 فئات متساوية الطول؟.

32	48	26	29	32	41	28	31	45	36
45	35	40	30	31	40	27	33	28	30
30	41	39	38	33	35	31	36	37	32
23	45	37	39	38	36	33	35	42	38
34	22	37	43	51	32	35	30	46	36

الحل:

المدى العام = 51 – 22 = 29 =E=X_{MAX}-X_{MIN}

عدد الفئات = 10

طول الفئة ≥ 10/29

≥ 2.9

نضع طول الفئة = 3 حتى تشمل كل القيم ونشكل الجدول ابتداء من أصغر قيمة

الفئة	24-22	27-25	30-28	33-31	36-34	39-37	42-40	45-43	48-46	51-49	المجموع
التكرار	2	2	7	10	9	9	5	4	1	1	50

ملاحظات:

أ – عند تفريغ البيانات فإنه يجب أن تنتمي كل مفردة إلى فئة واحدة فقط.

ب – عند كتابة الفئات فإنه:

- يذكر الحد الأدنى والأعلى لكل فئة إذا كان المتغير متقطع.
- يذكر الحد الأدنى ويحدد الحد الأدنى الأعلى ضمنيا أو العكس إذا كان المتغير متصل.

- يفضل استخدام الفئات المتساوية الطول، إلا أنه في بعض الحالات يمكن أن يستخدم الفئات غير المتساوية، من هذه الحالات ما يلي:

– إذا كان الغرض من الدراسة هو الاهتمام ببعض الفئات والتركيز عليها وإهمال باقي الفئات، فيمكن عندها دمج الفئات التي لا تهم الباحث في فئة واحدة.

– إذا كان التكرار لبعض الفئات صغير جدا مقارنة بباقي الفئات، يمكن دمج هذه الفئات معا[1].

1-1-3 – أنواع الجداول التكرارية[2]:

أ– الجداول التكرارية ذات الفئات المتساوية: وهي عبارة عن جداول تكرارية تفرغ فيها البيانات في فئات متساوية الطول. وبالتالي نتمكن من تنظيم البيانات المتوفرة، والطريقة الأساسية لبناء جدول التوزيع التكراري للفئات المتساوية هو تقسيم مدى قيم البيانات إلى فئات وحصر عدد البيانات الواقعة ضمن كل فئة كما هو موضح في المثال السابق.

ب–الجداول التكرارية ذات الفئات غير متساوية: على الرغم من أنه يفضل أن تكون الجداول التكرارية ذات فئات متساوية في الطول وذلك لتسهيل العمليات الحسابية، إلا أنه توجد أحيانا بيانات من الصعب وضعها في فئات متساوية الطول، وفي هذه الحالة نلجأ إلى وضع البيانات في جداول تكرارية غير متساوية في طول الفئات.

مثال 7: الجدول التالي يمثل توزيع ملكية الأراضي الزراعية بالهكتار حسب فئات المساحة سنة 2019.

الفئات X_i	[00-01[	[01-05[	[05-10[	[10-20[	[20-50[	50 فأكثر	المجموع Σ
التكرار n_i	2000	5000	20000	13000	6000	4000	50000

ملاحظة: يكفي أن تكون فئة واحدة فقط غير متساوية مع باقي الفئات الأخرى.

ت–الجداول التكرارية المغلقة: وهي الجداول التي تكون مغلقة، أي أن جميع الفئات معروفة تماما، سواء بدايتها أو نهايتها، كما هو موضح في الجدول التالي الذي يمثل اوزان التلاميذ:

الفئات X_i	[20-25[	[25-30[	[30-35[	[35-40[	[40-45[	[45-50[	المجموع Σ
التكرار n_i	02	05	20	13	06	04	50

[1] موسي عبد الناصر، سبق ذكره، ص 08.

[2] معين أمين السيد، المعين في الإحصاء، دار العلوم للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، سمة النشر غير مذكورة، ص7.

ملاحظة: الجداول المغلقة ليس بالضرورة تكون فئاتها متساوية.

ث– الجداول التكرارية المفتوحة: وهي جداول إما أن تكون مفتوحة من أحد طرفيها، أو مفتوحة من الطرفين معا. كما هو موضح في الجداول التالية:

مثال 8: جدول تكراري مفتوح من بدايته:

الفئات X_i	أقل من 25	[30-25[	[35-30[	[40-35[	[45-40[	[50-45[	**المجموع Σ**
التكرار n_i	02	05	20	13	06	04	50

مثال 9: جدول تكراري مفتوح من نهايته

الفئات X_i	[01-00[	[05-01[	[10-05[	[20-10[	[50-20[	50 فأكثر	**المجموع Σ**
التكرار n_i	2000	5000	20000	13000	6000	4000	50000

مثال10: جدول تكراري مفتوح من البداية والنهاية

الفئات X_i	أقل من 25	[30-25[	[35-30[	[40-35[	[45-40[	أكثر من 50	**المجموع Σ**
التكرار n_i	02	05	20	13	06	04	50

هـ– الجداول التكرارية المتجمعة الصاعدة $N\uparrow$ والنازلة $N\downarrow$:

في التوزيع التكراري الصاعد نذكر الفئات بالصورة "اقل من الحد الأدنى" ويكون التجمع من أعلى إلى أسفل من جهة الفئات الصغيرة إلى الفئات الكبيرة. وتكون التكرارات في صعود مستمر. وتصل إلى أكبرها عند آخر حد، حيث يجمع تكرار كل فئة على مجموع التكرارات السابقة له، ويكون التكرار المتجمع للفئة الأخيرة مساويا لمجموع التكرارات.

أما في التوزيع المتجمع النازل فإننا نذكر الفئات بالصورة "أكثر من الحد الأدنى" ويكون التكرار المتجمع للفئة الأخيرة مساويا لتكرارها العادي، ثم يكون التجمع من أسفل إلى أعلى، من جهة الفئات الكبيرة إلى الصغيرة، بمعنى أن نجمع مجموع التكرارات لكل فئة على تكرار الفئة التي تحتها في الجدول، ويوضع المجموع الناتج أمامها، وهكذا حتى نصل إلى التكرار المتجمع للفئة الأولى الذي يجب ان يساوي مجموع التكرارات.

مثال 11: أوجد كل من التكرار المتجمع الصاعد والنازل لمعطيات الجدول السابق.

الفئات X_i	أقل من 25	[30-25[	[35-30[	[40-35[	[45-40[	أكثر من 50	**المجموع Σ**
التكرار n_i	02	05	20	13	06	04	50

$N\uparrow$	02	07	27	40	46	50
$N\downarrow$	50	48	43	23	10	04	00

2- العرض البياني: [1]

يستعمل التمثيل البياني بهدف مقارنة قيم ظاهرة ما حسب المكان أو تطورها حسب الزمان، كما يتيح مقارنة عدة ظواهر في آن واحد، إن استخدام التمثيل البياني يجعل المعلومات الإحصائية أكثر وضوحا وفهما، مما يساعد على أخذ فكرة شاملة وسريعة عن الظاهرة المدروسة أي عكس العرض الجدولي وتختلف طرق العرض البياني باختلاف نوع المتغير الاحصائي:

2-1: العرض البياني في حالة متغير كيفي: يناسب المتغير الكيفي ثلاث تمثيلات بيانية هي:

- العمود المجزأ.
- الاعمدة المستطيلة.
- العرض بالدائرة.

2-1-1: العمود المجزأ: عبارة عن خط مستطيل يتناسب فيها طول العمود مع قيمة مجموع التكرارات ويقسم المستطيل الى عدة أجزاء، كل جزء يقابل تكرار الخاصية المدروسة

مثال 12: اليك توزيع طلبة كلية العلوم الاقتصادية بجامعة بومرداس للسنة الجامعية 2019/2018 حسب التخصصات المدروسة.

التخصص	**علوم اقتصادية**	**علوم تجارية**	**علوم التسيير**	**علوم مالية**	**المجموع Σ**
عدد الطلبة	**350**	**400**	**250**	**200**	**1200**

المصدر: فرضي

المطلوب: عرض الجدول بيانيا بواسطة العمود المجزأ

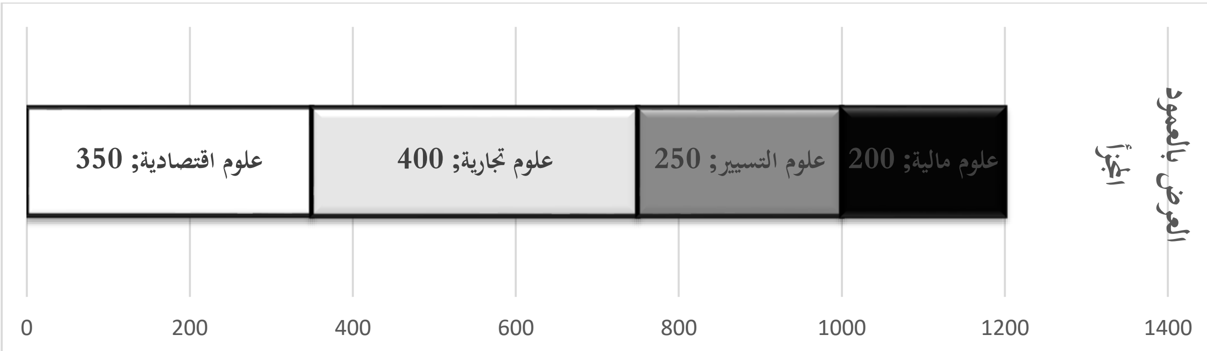
لرسم العمود المجزأ نقوم بتحويل التكرارات الى اطوال حيث تتناسب الاطوال مع التكرارات فيكون بذلك مجوع التكرارات يناسب الطول الإجمالي، وتكرار كل خاصية يناسب طول معين بالطريقة الثلاثية.

في مثالنا هذا مثلا اختار طول العمود = 12 سم فنحصل على الجدول التالي بعد الحساب:

[1] ساعد بن فرحات، عبد المجيد قطوش، مرجع سابق، ص 9.

التخصص	علوم اقتصادية	علوم تجارية	علوم التسيير	علوم مالية	المجموع Σ
عدد الطلبة	350	400	250	200	1200
الاطوال (سم)	3.5	4	2.5	2	12

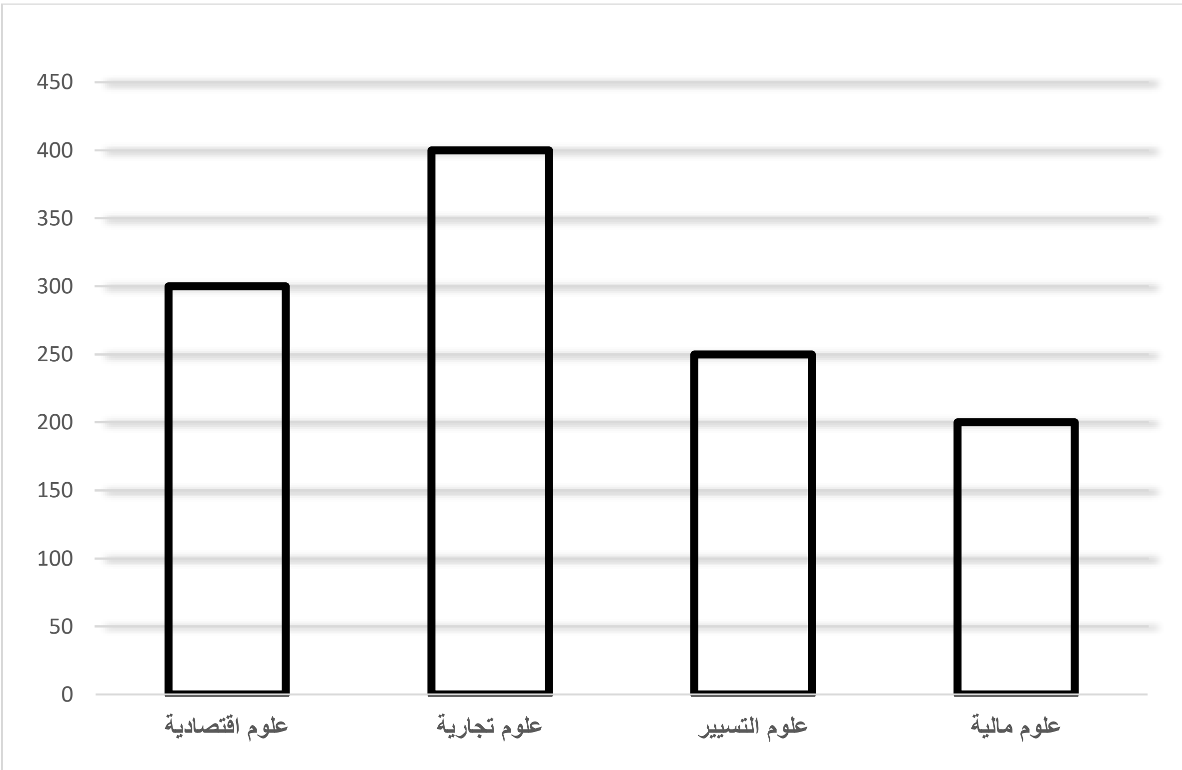
فنقوم بالرسم بالشكل التالي:



العرض بالأعمدة المستطيلة :

تمثل البيانات في هذه الحالة بواسطة المستطيلات، تكون في غالب الأحيان ذات عرض موحد ومتباعدة بمسافات متساوية وطول يتناسب فيها قيمة التكرار المقابل لها.

مثال 13: نمثل بيانات الجدول السابق بواسطة المستطيلات.



2-1-3-: التمثيل بالدائرة:

مبدأ هذه الطريقة مبني على ترجمة بيانات الجدول (الأعداد أو النسب) إلى زوايا حيث يتناسب فيها التكرار مع قيس الزاوية، وذلك بتطبيق القاعدة الثلاثية ثم نقل نتائج الحسابات إلى شكل بياني متمثل في دائرة علما ان قوس الدائرة تحوي 360°، وهو ما يقابل مجوع التكرارات[1].

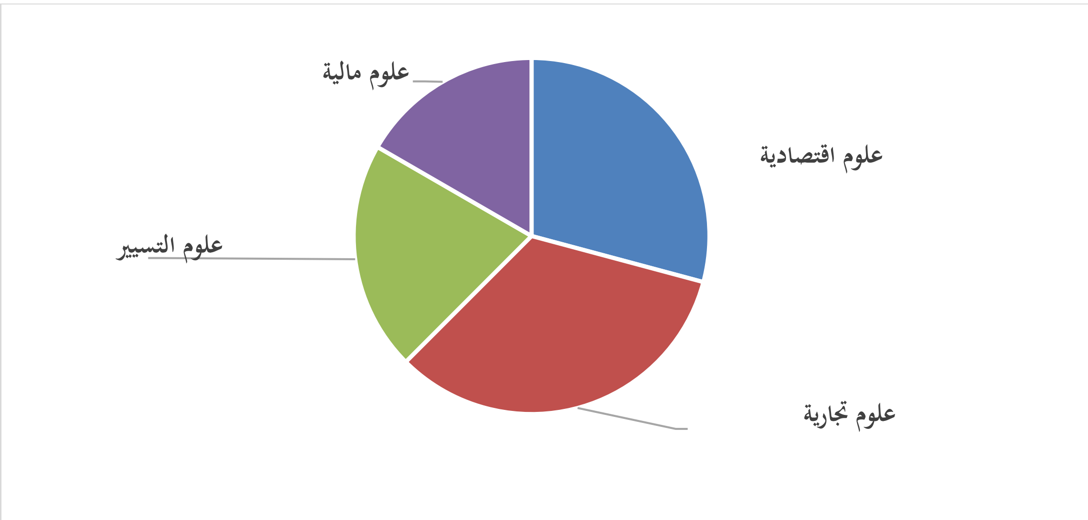
ويمكن إيجاد الزواية المقابلة بالصيغة التالية: $\text{الزاوية المقابلة} = ni \times \frac{360}{\Sigma ni}$

مثال 14: مثل بيانات الجدول السابق بواسطة الدائرة.

الحل: نقوم بتحويل التكرارات الى زوايا وفق الصيغة: $\text{الزاوية المقابلة} = ni \times \frac{360}{1200}$

التخصص x_i	عدد الطلبة n_i	الزاوية °	
علوم اقتصادية	350	**105°**	$\text{الزاوية المقابلة} = ni \times \frac{360}{1200} = 350 \times \frac{360}{1200} = 105°$
علوم تجارية	400	**120°**	$\text{الزاوية المقابلة} = ni \times \frac{360}{1200} = 400 \times \frac{360}{1200} = 120°$
علوم التسيير	250	**75°**	$\text{الزاوية المقابلة} = ni \times \frac{360}{1200} = 250 \times \frac{360}{1200} = 75°$
علوم مالية	200	**60°**	$\text{الزاوية المقابلة} = ni \times \frac{200}{1200} = 350 \times \frac{360}{1200} = 60°$
المجموع Σ	**1200**	**360°**	

التمثيل بالدائرة لتوزيع الطلبة حسب التخصص



[1] شعبان عبد الحميد شعبان، "**ملخصات شوم، نظريات ومسائل في الإحصاء**"، جامعة القاهرة، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، دون سنة نشر، ص 25.

2-2-: العرض البياني في حالة متغير كمي منقطع:

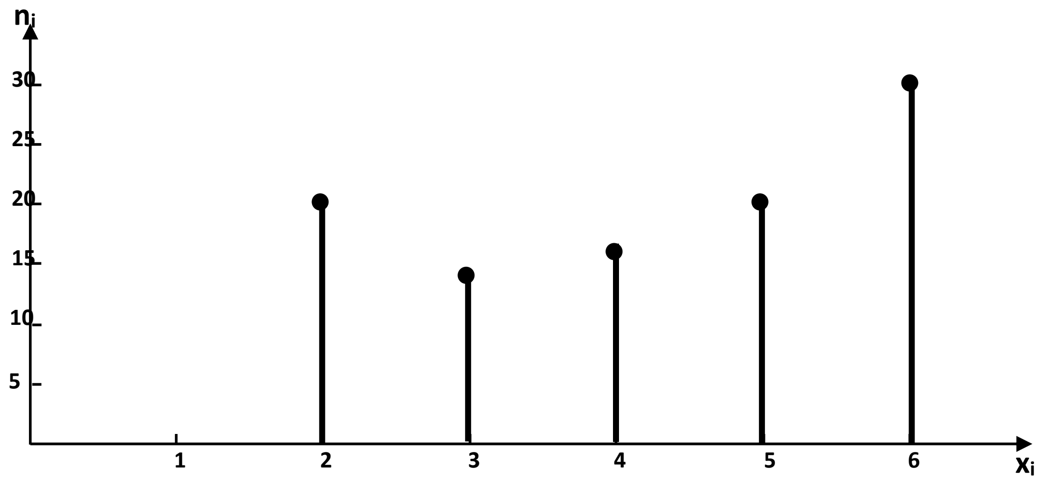
يناسب المتغير الكمي المنقطع التمثيل بالأعمدة البسيطة، والمعبر عنها بخط عمودي مستقيم ينتهي بنقطة تتناسب أطوال الخطوط المستقيمة مع قيمة التكرار المقابل لقيمة المتغير المدروس.

مثال 15: مثل بيانيا جدول توزيع تكراري لعدد أفراد الاسرة.

عدد الافراد X_i	02	03	04	05	06	المجموع Σ
التكرار n_i	20	14	16	20	30	100

المصدر: افتراضي.

بما أن المتغير كمي منقطع فإن التمثيل البياني المناسب هو التمثيل بالأعمدة البسيطة.



2-3: العرض البياني في حالة متغير كمي مستمر:

يناسب المتغير الكمي المستمر التمثيل ب:

* بالمدرج التكراري،

* المضلع التكراري،

* المنحنى التكراري[1].

[1] جيلالي جلاطو، مرجع سابق، ص 22.

2-3-1: المدرج التكراري: يكون على شكل مستطيلات متلاصقة طول كل مستطيل منها يتناسب مع التكرار المقابل، وقاعدة كل منها تساوي طول الفئة المقابلة، حيث توضع الفئات على محور البيانات وتوضع التكرارات على محور العينات، ويمكن أن نميز بين حالتين عند وضع المدرج التكراري:

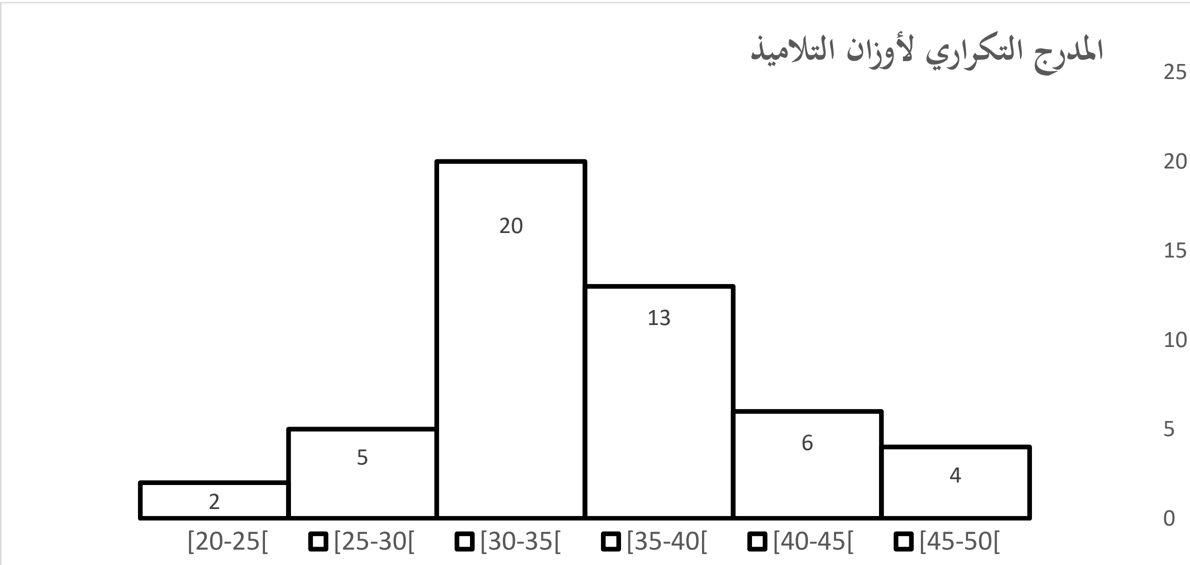
أ- حالة الفئات متساوية:

نلاحظ في هذه الحالة أن قاعدة المقارنة ثابتة ومتساوية ومن ثمة لا نجري أي تعديل، حيث نقوم بالرسم بشكل عادي في معلم متعامد ومتجانس في المحور الافقي الخاص بالفواصل نضع قيم المتغير والمتمثلة في الفئات، بينما في محور التراتيب يخصص للتكرارات المقابلة لها.

مثال 16: مثل التوزيع التكراري لأوزان التلاميذ بالمدرج التكراري.

الفئات X_i	[20-25[	[25-30[	[30-35[	[35-40[	[40-45[	[45-50[	المجموع Σ
التكرار n_i	02	05	20	13	06	04	50

نلاحظ أن الفئات متساوية في الطول وبالتالي سنقوم بالرسم بشكل عادي دون اجراء أي تعديل.



ب- حالة الفئات غير متساوية:

إذا كانت الفئات غير متساوية، نقوم بتعديل التكرارات، لأن قاعدة المقارنة غير ثابتة، حتى يكون هناك تناسب بين طول الفئة والتكرار المقابل لها، أي إيجاد عدد الوحدات الاحصائية الموزعة على وحدة قياس معينة.

التكرار المعدل n' : هو عبارة عن النسبة بين التكرار البسيط وطول الفئة المقابلة. $n' = \frac{n}{k}$

مثال 17: مثل التوزيع التكراري لأوزان التلاميذ بالمدرج التكراري.

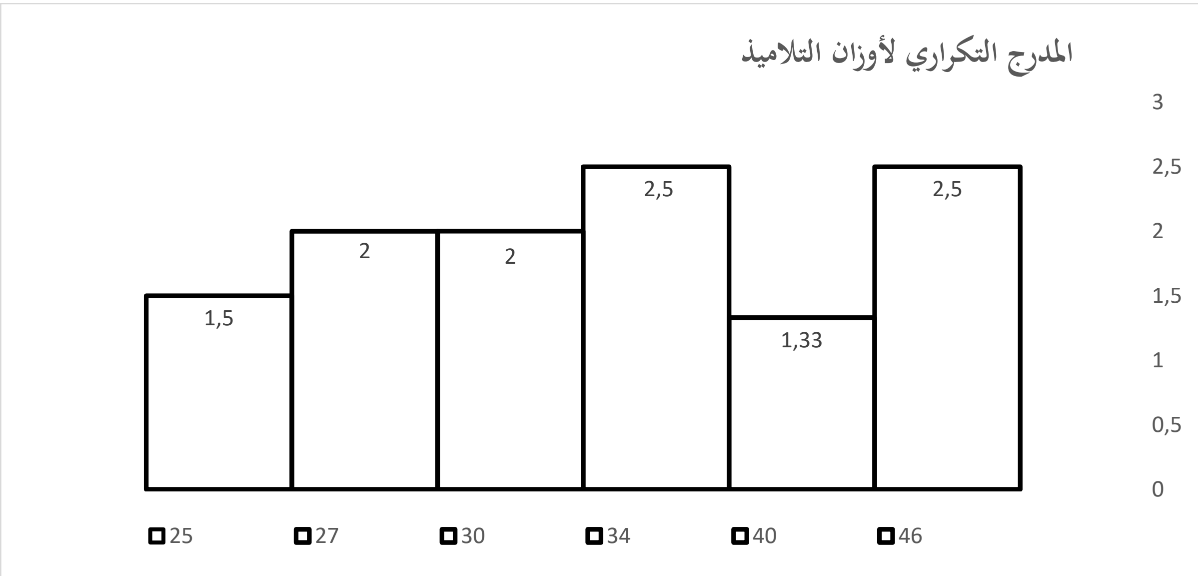
الفئات X_i	]27-25]	]30-27]	]34-30]	]40-34]	]46-40]	]50-46]	المجموع Σ
التكرار n_i	03	06	08	15	08	10	50

نلاحظ ان أطوال الفئات غير متساوية وبالتالي يجب اجراء تعديل بحساب التكرار المعدل حتى نتمكن من رسم المدرج التكراري وفق العلاقة السابقة $n' = \frac{n}{k}$

الجدول يصبح

الفئات X_i	]27-25]	]30-27]	]34-30]	]40-34]	]46-40]	]50-46]	المجموع Σ
التكرار n_i	03	06	08	15	08	10	50
K	02	03	04	06	06	04	/
n'	1.5	2	2	2.5	1.33	2.5	/

نقوم برسم حيث نقوم بالرسم في معلم متعامد ومتجانس في المحور الافقي الخاص بالفواصل نضع قيم المتغير والمتمثلة في الفئات، بينما في محور التراتيب يخصص **للتكرارات المعدلة** المقابلة لها.



ملاحظة: نقوم بتعديل التكرارات في حالة فئات غير متساوية في حالتين:

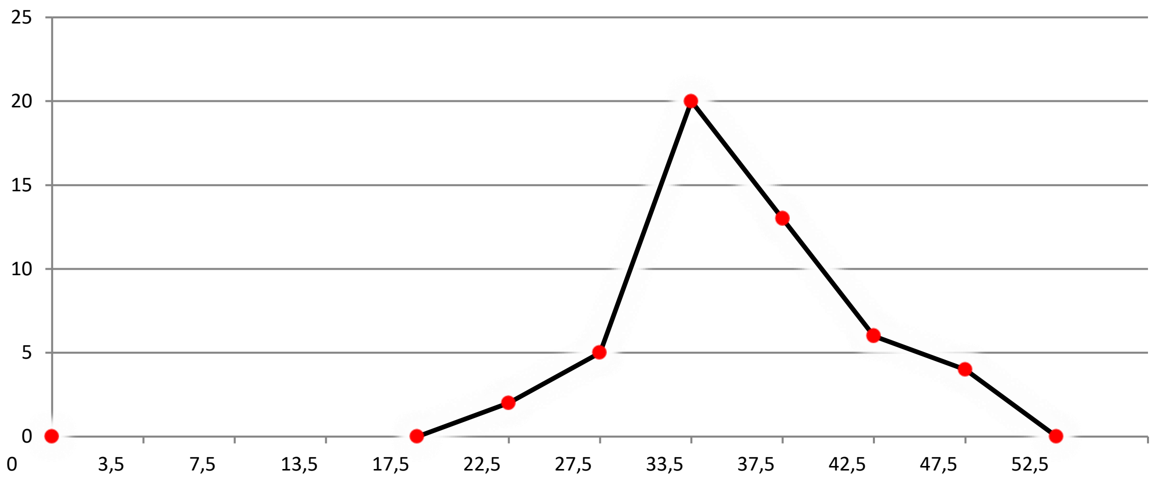
- عند رسم المدرج التكراري
- عند تحديد الفئة المنوالية وحساب المنوال.

2-3-2: المضلع التكراري: هو مجموعة من قطع مستقيمة متصلة ومنكسرة، تتحدد بنقاط احداثياتها مركز الفئات والتكرارات المقابلة لها.

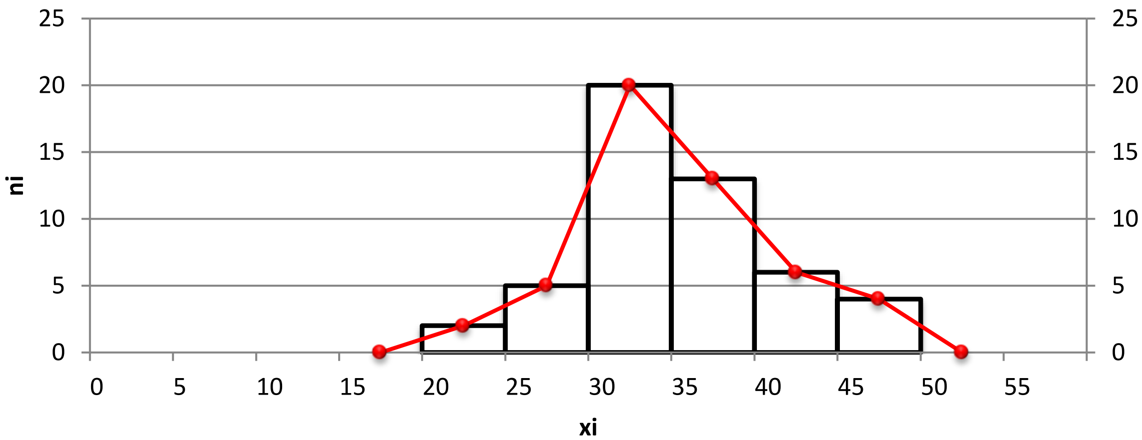
مثال 18: اذا كانت لديك المعطيات التالية مثل التوزيع التكراري لأوزان التلاميذ بالمدرج التكراري.

الفئات X_i	]25-20]	]30-25]	]35-30]	]40-35]	]45-40]	]50-45]	المجموع Σ
التكرار n_i	02	05	20	13	06	04	50

المدرج التكراري

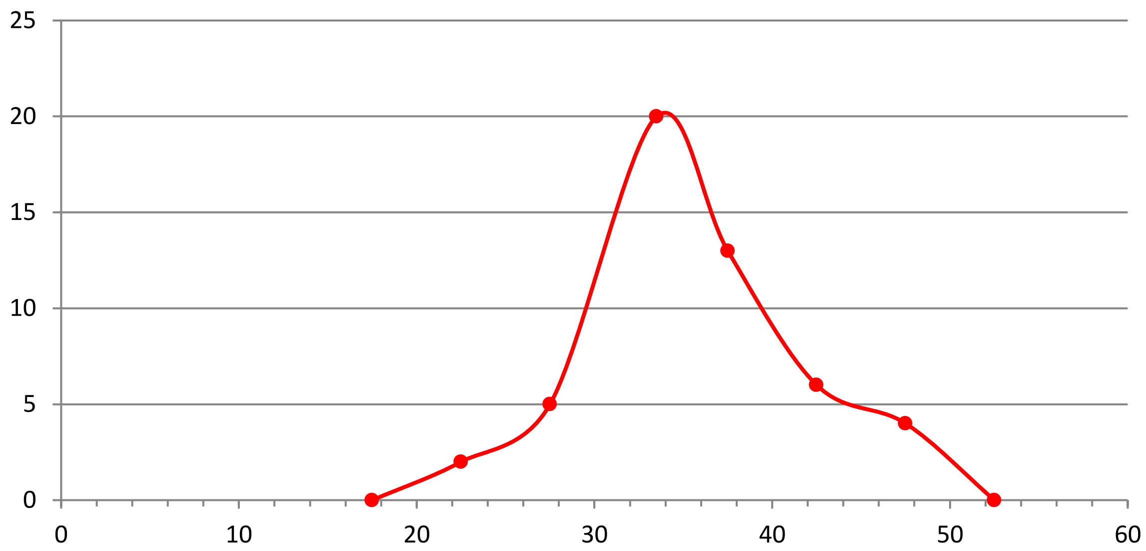


ويمكن ان يطلب منك رسم المدرج التكراري والمضلع التكراري في نفس المعلم مثل الشكل الموالي:



ملاحظة هامة: الخط المنكسر يمثل المضلع التكراري، حيث أن المساحة التي تقع تحت المضلع التكراري تساوي المساحة التي تقع تحت المدرج التكراري، وحتى نحافظ على المساحة التي تقع أسفل هذا المضلع، نفترض أن لهذا التوزيع فئات إحداهما في بدايته والأخرى في نهايته تكرار كل منهما يساوي صفر، بحيث نتطلق في رسم المضلع من مركز الفئة الافتراضية الأولى (الفئة ما قبل الأولى المعطاة في التمارين)، وننتهي عند مركز الفئة الافتراضية الأخيرة.

2-3-3: المنحنى التكراري:



2-4. العرض البياني للتكرار التجميعي الصاعد والنازل:

هو عبارة عن قطع مستقيمة متصاعدة او متنازلة حسب تصاعد التكرارات المتجمعة الصاعدة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس او تنازل التكرارات المتجمعة الصاعدة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس.

2-4-1 العرض البياني للتكرار التجميعي والصاعد والنازل في حالة المتغير الكمي المنفصل

أ- العرض البياني للتكرار التجميعي الصاعد:

هو عبارة عن قطع مستقيمة متصاعدة حسب تصاعد التكرارات المتجمعة الصاعدة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس. ولرسم القطع المستقيمة المقابلة لقيم المتغير المدروس.

مثال:

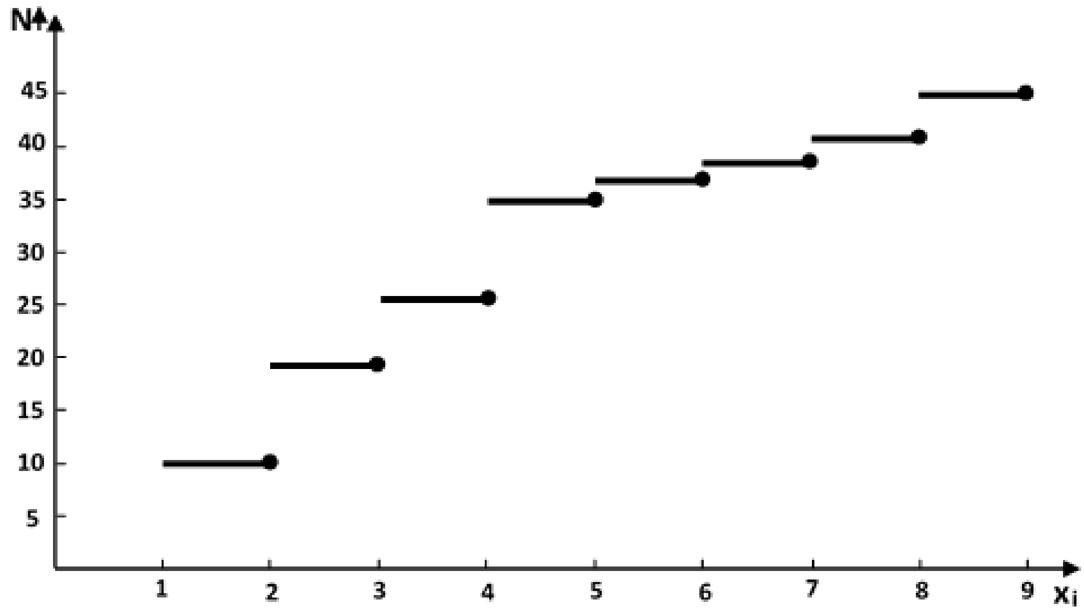
مثل بيانيا جدول توزيع تكراري لعدد أفراد الاسرة.

عدد الافراد X_i	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**7**	**8**	**9**	**المجموع Σ**
التكرار n_i	10	9	7	9	2	1	3	4	45

الحل: نقوم أولا بحساب التكرار المتجمع الصاعد في الجدول الموالي.

عدد الافراد X_i	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**7**	**8**	**9**	**المجموع Σ**
التكرار n_i	10	9	7	9	2	1	3	4	45
$N\uparrow$	10	19	26	35	37	38	41	45	

التمثيل البياني للتكرار المتجمع الصاعد



ب- العرض البياني للتكرار التجميعي النازل:

هو عبارة عن قطع مستقيمة متنازلة حسب تنازل التكرارات المتجمعة النازلة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس. ولرسم القطع المستقيمة المقابلة لقيم المتغير المدروس.

مثال:

مثل بيانيا جدول توزيع تكراري لعدد أفراد الاسرة.

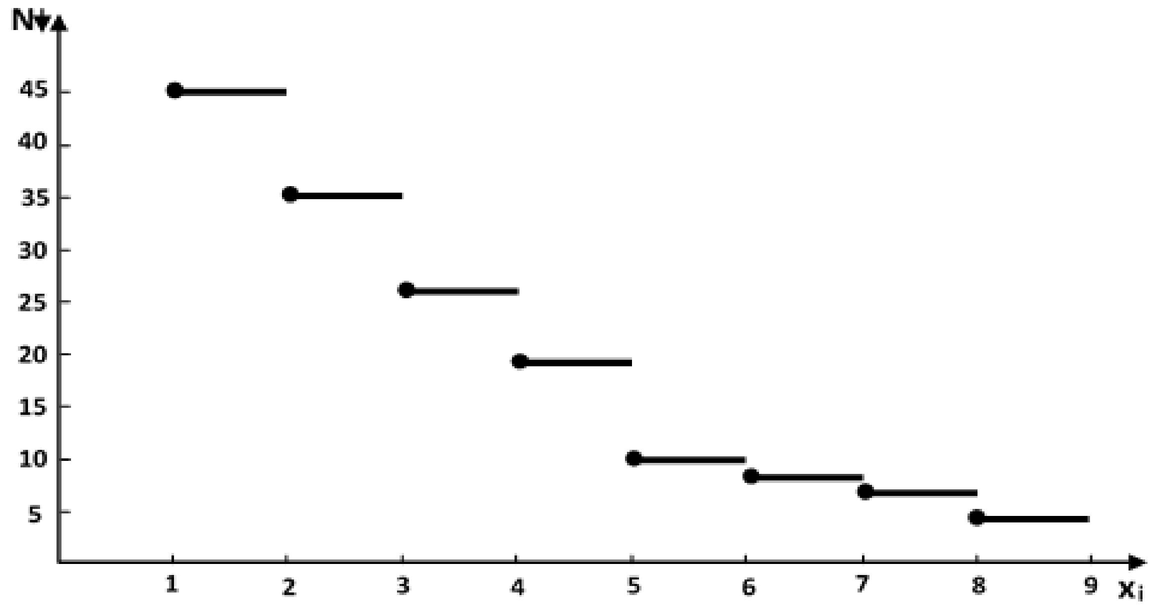
عدد الافراد X_i	02	03	04	05	06	7	8	9	المجموع Σ
التكرار n_i	10	9	7	9	2	1	3	4	45

الحل:

نقوم أولا بحساب التكرار المتجمع النازل في الجدول الموالي.

عدد الافراد X_i	02	03	04	05	06	7	8	9	المجموع Σ
التكرار n_i	10	9	7	9	2	1	3	4	45
$N\downarrow$	45	35	26	19	10	8	7	4	ـ

التمثيل البياني للتكرار المتجمع الصاعد



2-4-2: العرض البياني للتكرار التجميعي في حالة متغير مستمر:

يبين كل من منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل شدة أو ضعف تطور الظاهرة المدروسة عن مستوى معين من مجال الدراسة.

أ- العرض البياني للتكرار التجميعي الصاعد:

يسمى بالمنحنى التجميعي الصاعد، يرسم هذا المنحنى عن طريق ايصال مجموعة النقاط ذات الاحداثيات التالية: الحدود العليا للفئات والتكرارات التجميعية الصاعدة المقابلة لها مع اكمال المنحى بخط متقطع حتى الحد الأدنى للفئة الأولى للدلالة على الحد الفعلي الذي تبدأ عنده الفئة الاولى.

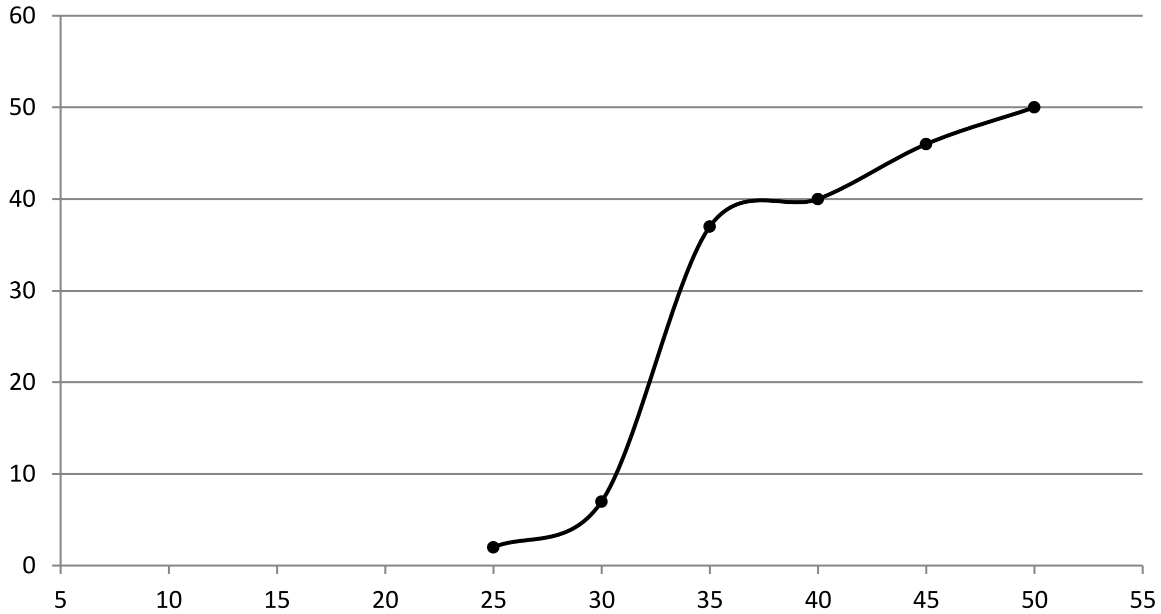
مثال: أوجد التكرار المتجمع الصاعد لمعطيات الجدول التالي:

الفئات X_i	]25-20]	]30-25]	]35-30]	]40-35]	]45-40]	]50-45]	**المجموع Σ**
التكرار n_i	02	05	20	13	06	04	50

أولا نقوم بحساب التكرار التجميعي الصاعد في الجدول كما يلي:

الفئات X_i	]25-20]	]30-25]	]35-30]	]40-35]	]45-40]	]50-45]	**المجموع Σ**
التكرار n_i	02	05	20	13	06	04	50
$N\uparrow$	02	07	27	40	46	50	

منحنى التكرار المتجمع الصاعد



ب- العرض البياني للتكرار التجميعي النازل:

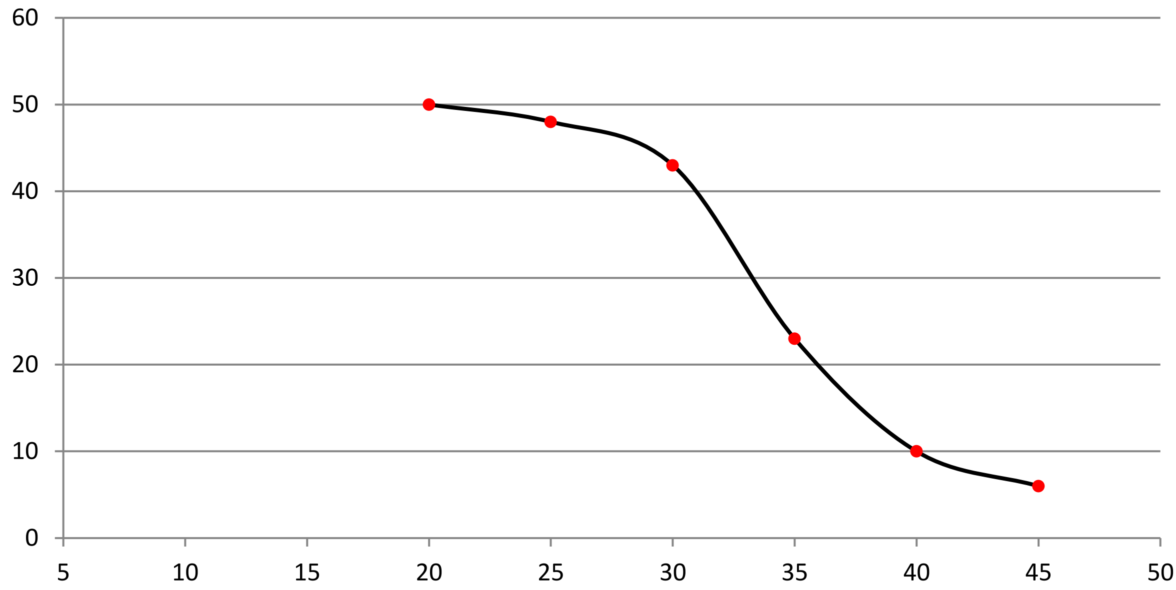
وهو عبارة عن المنحنى التجميعي النازل، يتم رسمه بإيصال مجموعة النقاط ذات الاحداثيات التالية الحدود الدنيا للفئات والتكرارات التجميعية النازلة المقابلة لها مع اكمال المنحى بخط متقطع حتى الحد الأعلى للفئة الأخيرة للدلالة على الحد الفعلي الذي تنتهي عنده الفئة الاخيرة.

مثال: أوجد كل من التكرار المتجمع الصاعد والنازل لمعطيات الجدول السابق.

الفئات X_i	[20-25[	[25-30[	[30-35[	[35-40[	[40-45[	[45-50[	المجموع Σ
التكرار n_i	02	05	20	13	06	04	50

نقوم أولا بإيجاد التكرار المتجمع النازل كما هو موضح في الجدول الموالي:

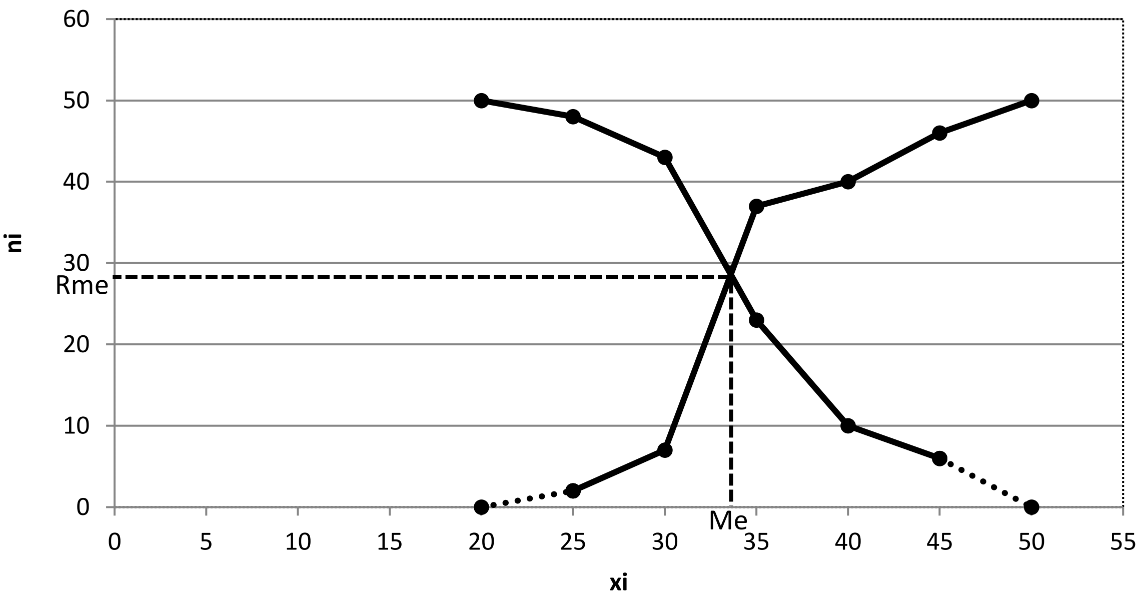
الفئات X_i	[20-25[	[25-30[	[30-35[	[35-40[	[40-45[	[45-50[	المجموع Σ
التكرار n_i	02	05	20	13	06	04	50
$N\downarrow$	50	48	43	23	10	04	00



يبين كل من المنحنى التجميعي الصاعد والنازل شدة أو ضعف تطور الظاهرة المدروسة على مستوى معين من مجال الدراسة وعند رسم منحنى التكرار التجميعي الصاعد ومنحى التكرار التجميعي النازل في نفس المعلم فأنهما سيتقاطعان في نقطة مهمة في الاحصاء. فاصلة نقطة تقاطع المنحنيين تعطينا قيمة بالوسيط، بينما ترتيبها يعطينا رتبة الوسيط.

مثال: نفس معطيات المثال السابق مثل منحنى التكرار المتجمع الصاعد والنازل في نفس المعلم.

التمثيل:



تمارين مقترحة للمحور الثاني:

التمرين الأول:

البيانات التالية تمثل عدد أفراد الاسرة لعمال جامعة بومرداس.

9	5	4	4	6	4	3	5	7	3	2	6	2	5	3
2	3	3	4	9	5	5	4	3	3	5	5	2	5	2
9	2	2	2	8	8	8	5	3	4	2	3	2	9	4

المطلوب:

- حدد المجتمع الاحصائي، الوحدة الاحصائي، المتغير الاحصائي ونوعه؟
- لخص هذه البيانات في جدول إحصائي؟
- ما هو التمثيل البياني المناسب لهذه البيانات؟ مثله.
- أوجد كل من التكرار النسبي والتكرار المئوي؟.
- أوجد التكرار التجميعي الصاعد والنازل؟ مثلهم بيانيا.

التمرين الثاني:

الجدول التالي يمثل تصنيف عدد الموظفين حسب فروع مصنع والبالغ عددها 10 فروع في جميع انحاء العالم.

الفروع	أ	ب	ج	د	هـ	و	ي	ك	ز	ر
عدد الموظفين	20	25	40	30	55	20	α	B	65	55

المطلوب :

1- تحديد طبيعة المتغير الإحصائي.

2- حساب α و β إذا علمت أن $\alpha = 2\beta$ وأن العدد الاجمالي للموظفين هو 400 موظف.

ماذا يمثل كل من α، β.

3- ماهو التمثيل المناسب، مثله

التمرين الثالث:

يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لأعمار 100 طالب في كلية بومرداس:

السن	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32	المجموع
التكرار	40	20	10	18	6	4	2	**100**

المطلوب:

1- ماهو المتغير المدروس وما نوعه أرسم المدرج التكراري للتوزيع واستنتج منه ؟

2- ماهو التمثيل البياني المناسب للتوزيع، مثله ؟

3- أرسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد والنازل بعد حسابهما في الجدول.

حل التمرين الاول:

1- **إيجاد كل من المجتمع الاحصائي، الوحدة الاحصائي، المتغير الاحصائي ونوعه؟**

- المجتمع الاحصائي هو: عمال جامعة بومرداس.
- الوحدة الإحصائية: عامل.
- المتغير الاحصائي: عدد افراد الاسرة
- نوع المتغير: كمي منفصل.

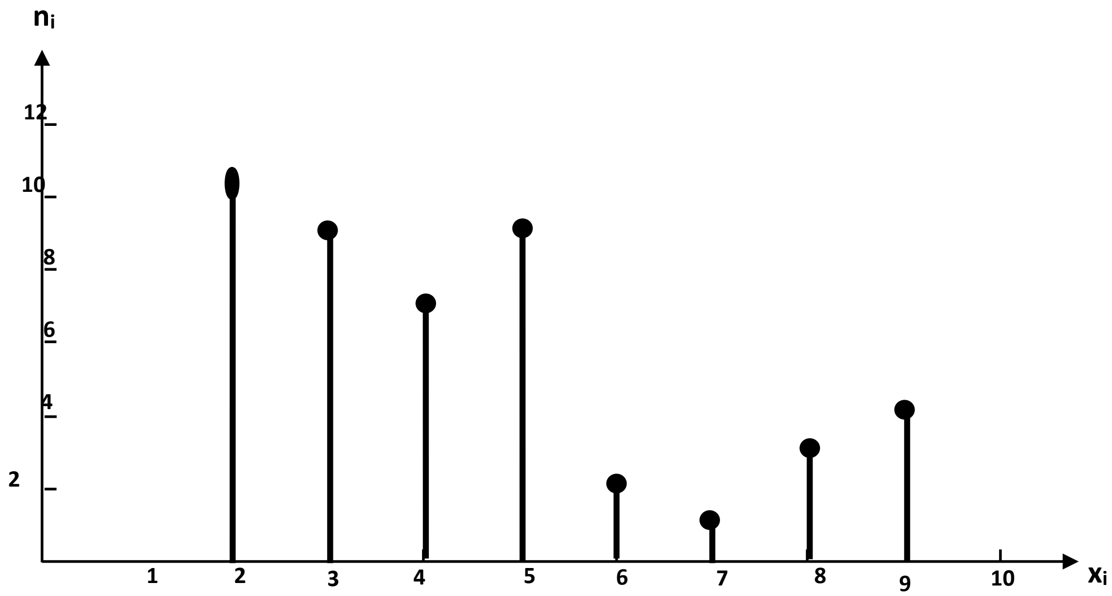
2- **تلخيص البيانات في جدول احصائي:**

جدول: توزيع عمال جامعة بومرداس حسب عدد افراد الاسرة.

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
n_i	10	9	7	9	2	1	3	4	**45**

3- **التمثيل البياني المناسب:**

بما أن المتغير كمي منفصل فإن التمثيل البياني المناسب هو العرض **بالأعمدة البسيطة.**



4- **إيجاد كل من التكراري النسبي والتكرار المئوي:**

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{التكرار المطلق}}{\text{مجموع التكرارات}} = \frac{ni}{\sum ni}$$

لاحظ ان مجمع التكرارات النسبية يساوي 1.

التكرار المئوي= التكرار النسبي X 100

لاحظ ان مجمع التكرارات النسبية يساوي 100.

نقوم بالحسابات في الجدول الموالي:

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
N_i	10	9	7	9	2	1	3	4	**45**
$\frac{ni}{\sum ni}$	0.22	0.20	0.16	0.20	0.04	0.02	0.07	0.9	**1**
$\frac{ni}{\sum ni} \times 100$	%22	20%	16%	20%	04%	2%	7%	9%	**100%**

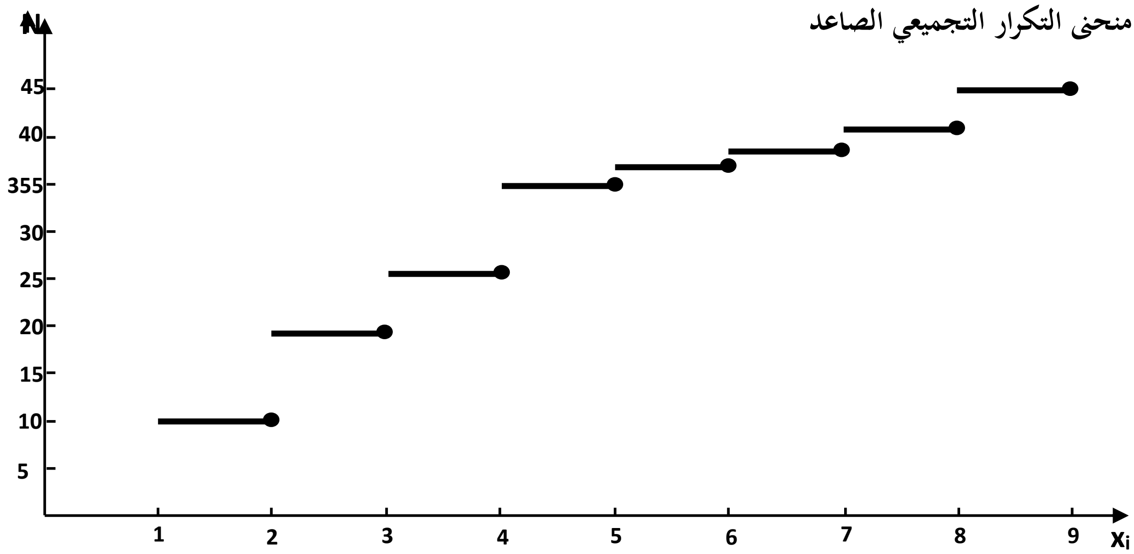
5– أوجد التكرار التجميعي الصاعد والنازل؟ مثلهم بيانيا.

أ– **إيجاد التكرار التجميعي الصاعد والنازل في الجدول:**

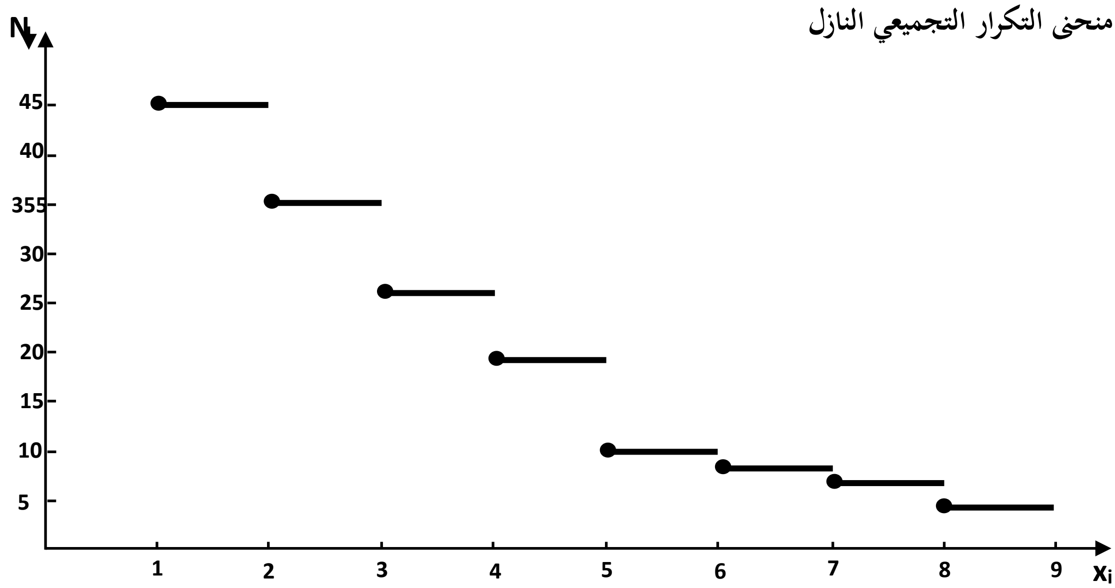
$\mathbf{X_i}$	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
$\mathbf{N_i}$	10	9	7	9	2	1	3	4	**45**
$\frac{ni}{\sum ni}$	0.22	0.20	0.16	0.20	0.44	0.02	0.67	0.89	**100**
$N \uparrow$	10	19	26	35	37	38	41	45	///
$N \downarrow$	45	35	26	19	10	8	7	4	00

ب– **التمثيل البياني للتكرار التجميعي الصاعد والنازل:**

منحنى التكرار التجميعي الصاعد



منحنى التكرار التجميعي النازل



حل التمرين الثاني:

1- المتغير الإحصائي فروع المصنع. نوعه كيفي اسمي.

2- إيجاد α وβ:

$400 = \alpha+\beta+ (20+25+40+30+55+20+65+55)$

$\alpha+\beta = 400 - (20+25+40+30+55+20+65+55)$

$\alpha+\beta = 410-310 = 90$

$\alpha+\beta = 90$

نعوض قيمة α **حيث** $\alpha = 2\beta$ المعادلة تصبح:

$2\beta + \beta = 90$

$\beta = 90/3 = 30 \quad \alpha = 30 \times 2 = 60$

α = عدد الموظفين من الفرع 7.

β = يمثل عدد الموظفين من الفرع 8.

الجدول يصبح:

الفروع	أ	ب	ج	د	هـ	و	ي	ك	ز	ر	Σ
عدد الموظفين	20	25	40	30	55	20	60	30	65	55	400

3- بما ان المتغير كيفي فالتمثيل المناسب هو:

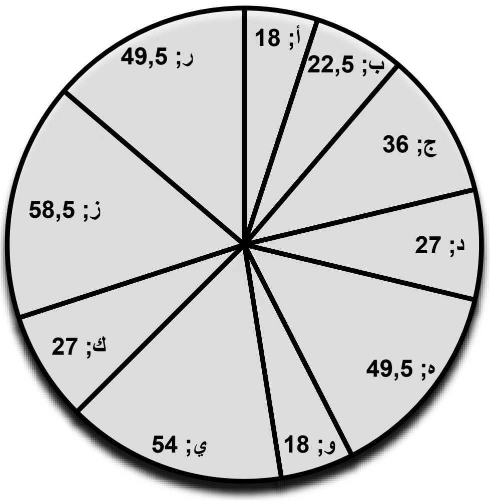
- العرض بالدائرة.
- الاعمدة المستطيلة.
- العمود المجزأ.

أ- العرض بالدائرة.

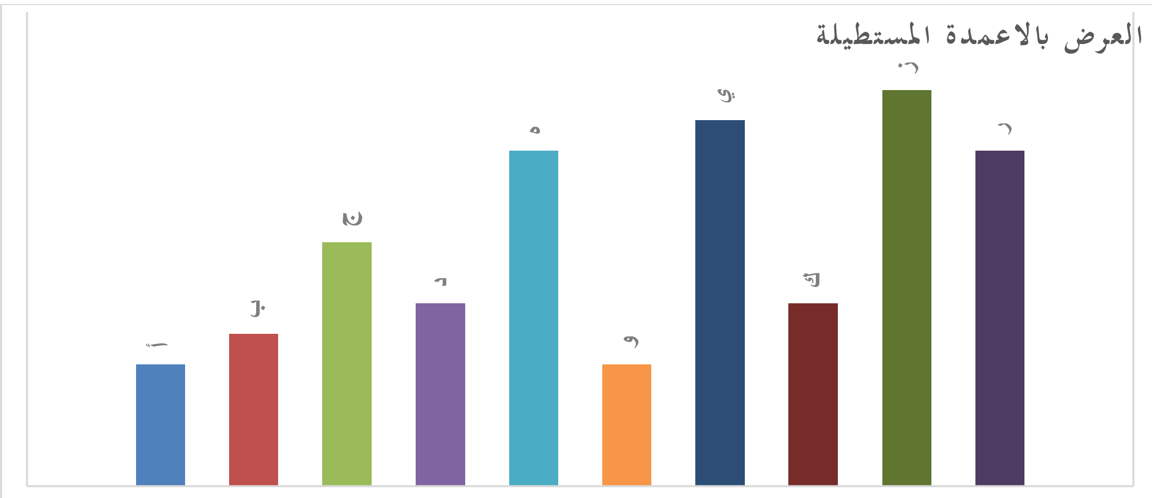
نقوم بتحويل التكرارات لنسب مئوية وفق الصيغة $\frac{360}{\Sigma ni} \times ni =$ الزاوية المقابلة

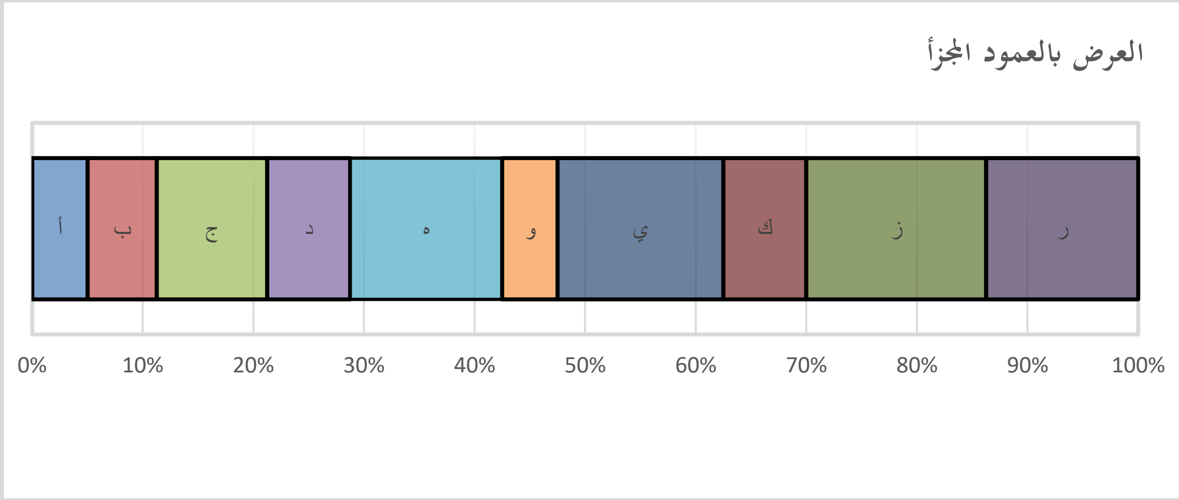
الفروع	أ	ب	ج	د	هـ	و	ي	ك	ز	ر	Σ
عدد الموظفين	20	25	40	30	55	20	60	30	65	55	400
الزاوية المقابلة	°18	°22.5	°36	°27	°49.5	°18	°54	°27	°58.5	°49.5	°360

العرض بالدائرة



ب-





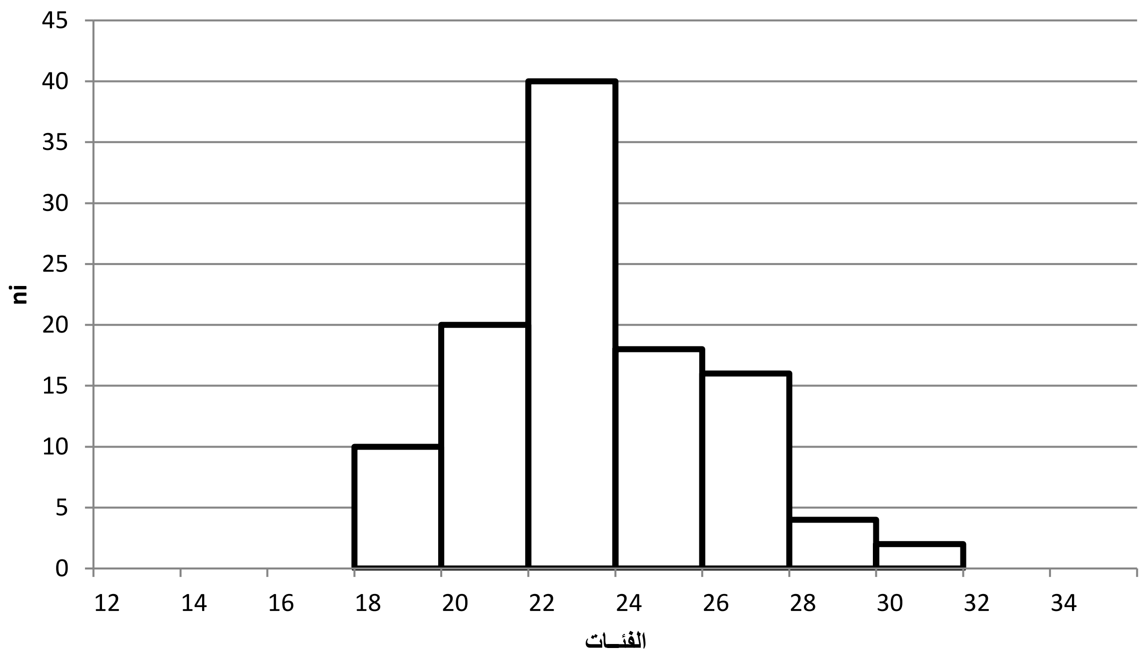
حل التمرين الثالث:

1- المتغير المدروس: أعمار الطلبة، نوعه: كمي مستمر

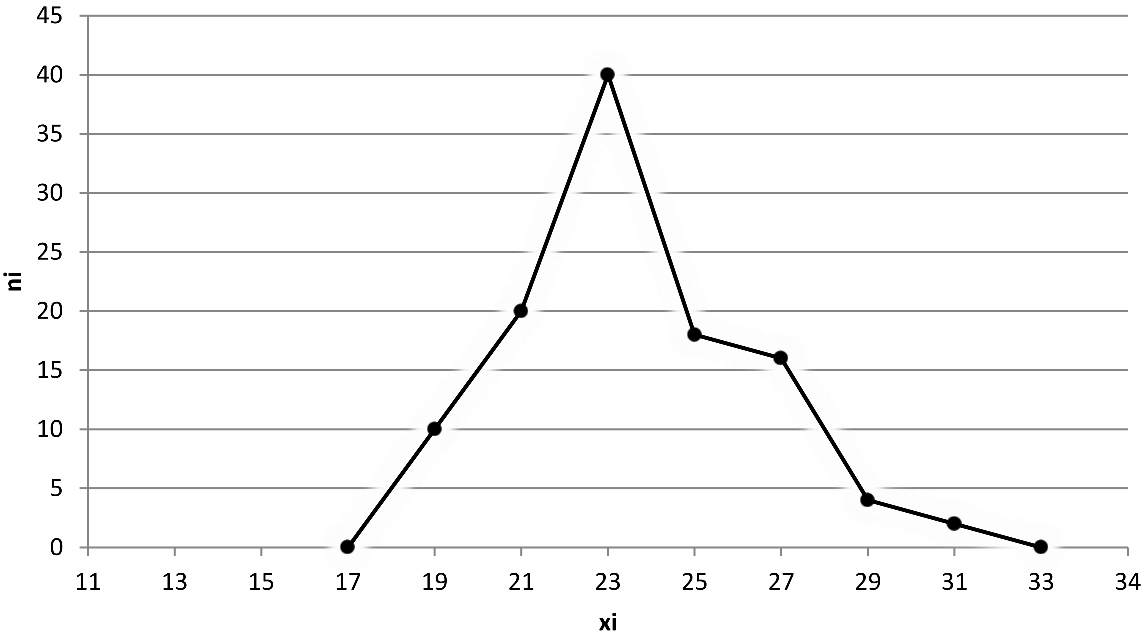
2- التمثيل البياني المناسب:

- مدرج تكراري
- مضلع تكراري
- منحنى تكراري

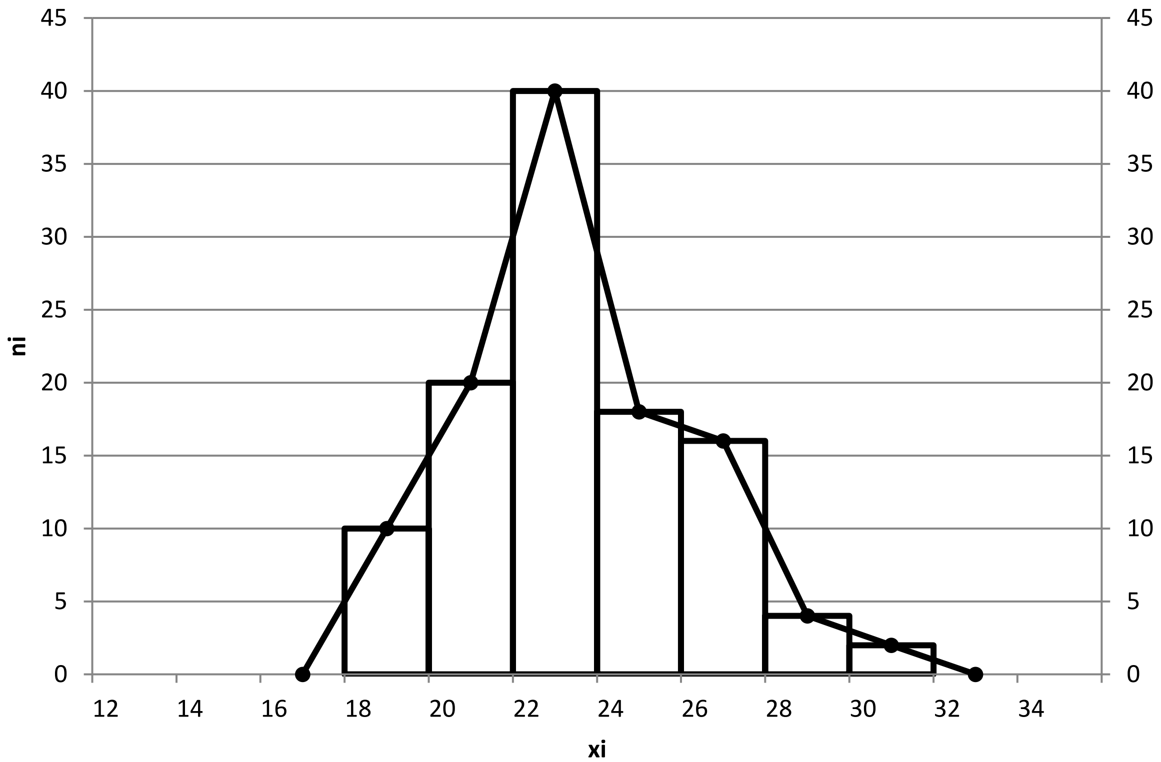
أ- التمثيل بالمدرج التكراري



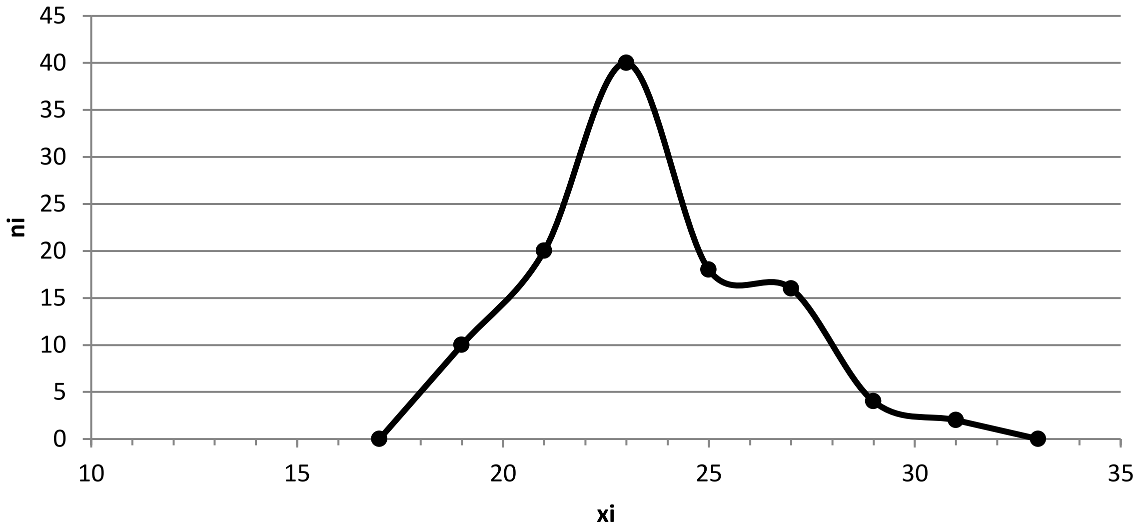
ب- التمثيل بالمضلع التكراري



التمثيل بالمدرج التكراري والمضلع التكراري في نفس المعلم.

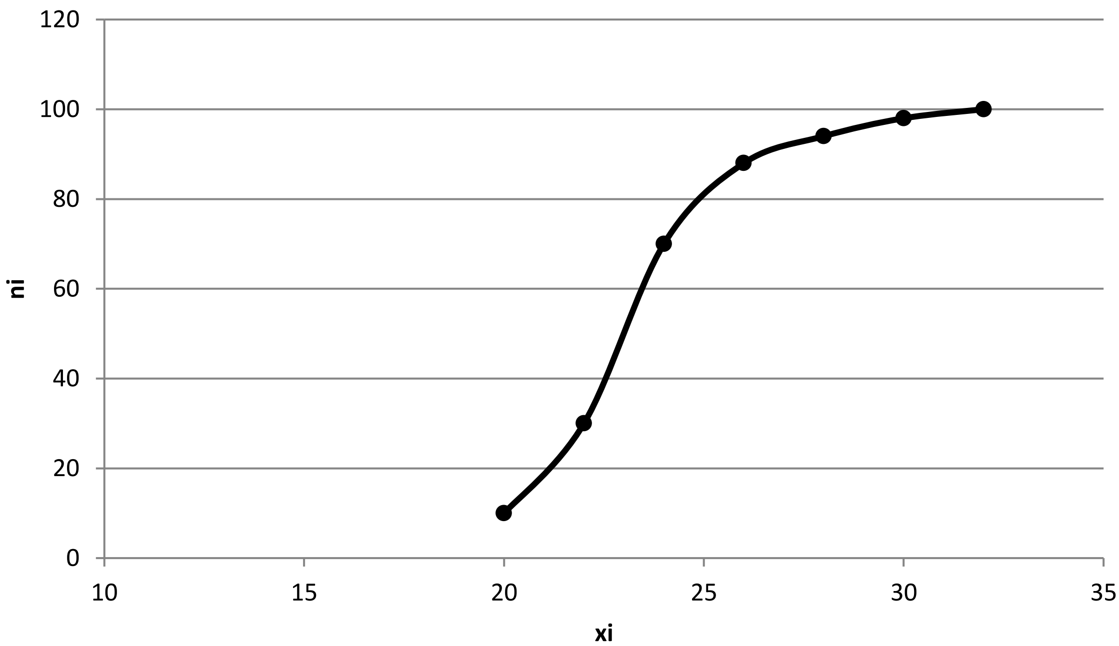


ج- التمثيل بالمضلع التكراري

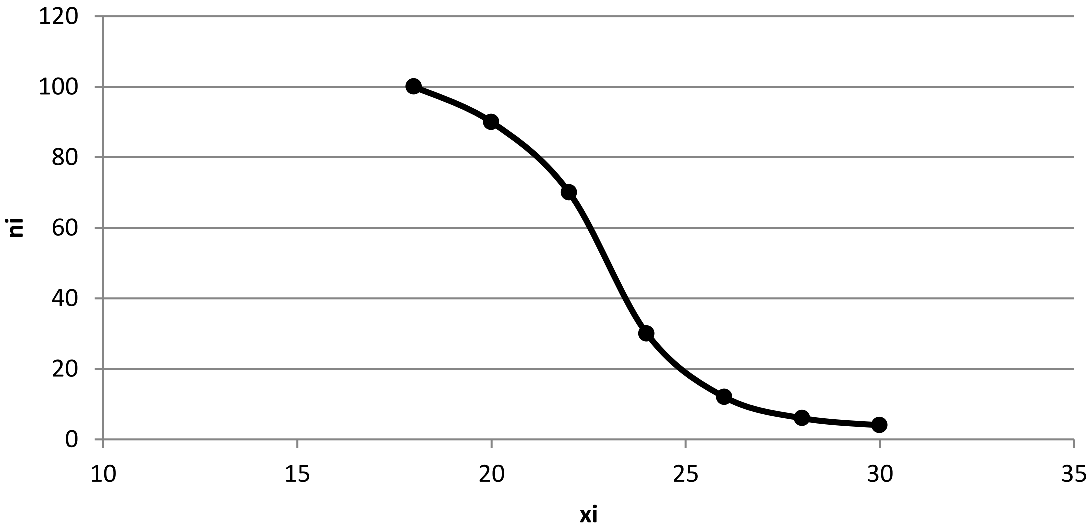


3- إيجاد التكرار المتجمع الصاعد

السن	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32	المجموع
التكرار	40	20	10	18	6	4	2	**100**
$N \uparrow$	40	60	70	88	94	98	100	



السن	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32	المجموع
التكرار	40	20	10	18	6	4	2	**100**
$N \downarrow$	100	60	40	30	12	6	4	



تمهيد:

مما لاشك فيه انه عند التمعن في الظواهر التي نحاول دراستها نلاحظ ان القيم التي تأخذها في الغالب نقترب من بعضها البعض وتتجمع حول قيمة معينة غير منظورة، فطول مجموعة من الأشخاص مثلا يتجمع حول قيمة معينة متوسطة، والقليل من الأشخاص لهم طول يبتعد كثيرا عن هذه القيمة من زيادة او نقصانا. تسمى هذه الظاهرة بهذه الظاهرة بظاهرة النزعة المركزية، وفي كثير من النواحي التطبيقية يكون الباحث في حاجة إلى حساب بعض المؤشرات التي يمكن الاعتماد عليها في وصف الظاهرة من حيث القيمة التي تتوسط القيم أو تنزع إليها القيم، ومن حيث التعرف على مدى تجانس القيم او تنزع اليها القيم، ومن حيث التعرف على مدى تجانس القيم التي يأخذها المتغير، والاعتماد على العرض البياني لا يفي بالغرض. والنزعة المركزية لها عدد من المتوسطات للتعبير عنها تختلف باختلاف الغرض الذي تستخدم فيه، وطبيعة البيانات المحسوبة منها، أهم هذه المتوسطات: المتوسط الحسابي، المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي، الوسيط، المنوال ومقاييس شبيهة بالوسيط تتمثل في الربيعات، العشيرات والمئينات، وميزة هذه المتوسطات كقيم عددية وحيدة توفر لنا فكرة عامة عن البيانات، وتصف الظاهرة المدروسة مثل الجداول الإحصائية، إلا أنها أكثر اختصارا وأكثر فائدة، حيث تمكننا من المقارنة بين مجموعة من القيم ومجموعة أخرى، أو بين ظاهرة وأخرى، لذلك سنتناول في هذا المحور بعض المقاييس الاحصائية التي يمكن من خلالها التعرف على خصائص الظاهرة محل البحث ومن أهمها مقاييس النزعة المركزية.

1- المتوسط الحسابي

من أهم مقاييس النزعة المركزية، وأكثرها استخداما في النواحي التطبيقية[1]، ويمكن حسابه للبيانات المبوبة وغير المبوبة، كما يلي:

1-1- حالة البيانات غير المبوبة:

نقصد بالبيانات الغير مبوبة تلك البيانات التي لا تكون مدرجة ضمن جدول تكراري، قيمة المتوسط الحسابي في هذه الحالة تساوي مجموع القيم مقسوم على عددها.

لتكن لدينا القيم التالية: $x_1.x_2.x_3............x_n$

[1] شرف الدين خليل، الإحصاء الوصفي، شبكة الأبحاث والدراسات الاقتصادية، www.rr4ee. Net، ص 31.

فمتوسطها الحسابي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{x1 + x2 + x3 + \cdots + xn}{n}$$
$$\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n}$$

حيث: $\bar{X}$ المتوسط الحسابي

x:تمثل البيانات الظاهرة

n:عدد القيم الظاهرة

مثال: قام أحد التجار بحساب عدد الزبائن الذين يقصدون أحد محلاته التجارية لخمسة أيام متوالية فأعطت النتائج التالية: 50، 70، 60، 80، 90، أحسب المتوسط الحسابي هو:

الحل:

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{50 + 70 + 60 + 80 + 90}{5}$$

$$= 70\bar{x} = \frac{350}{5}$$

اذن المحل يستقبل يوميا تقريبا 70 زبونا.

وهناك طريقة ثانية في حساب الوسط الحسابي تسمي بالطريقة غير المباشرة او طريقة الوسط الفرضي X_0 ، فإذا كانت لدينا القيم التالية: $x_1.x_2.x_3..........x_n$، فمتوسطها الحسابي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = XO + \frac{(x1 - xo) + (x2 - xo) + (x3 - xo) + \cdots + (xn - xo)}{n}$$
$$= xo + \frac{\sum(Xi - xo)}{n}$$

ويتم اختيار قيمة X_0 أي عدد حقيقي مختلف عن الصفر غير انه يفضل ان يكون أحد قيم السلسلة تسهيلا للحسابات كم ننصح الطلبة دوما بالقيام بالحسابات في جدول حتى لا يتم نسيان أي قيمة

مثال: قم بحساب المتوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي لمعطيات المثال السابق.

الحل:

$$\bar{x} = XO + \frac{(x1 - xo) + (x2 - xo) + (x3 - xo) + \cdots + (xn - xo)}{n}$$
$$= xo + \frac{\sum(Xi - xo)}{n}$$

أولا نفرض $x_0=60$

ثانيا نقوم بالحسابات في الجدول الموالي:

X_i	50	60	70	80	90	المجموع Σ
X_i-60	-10	0	10	20	30	50

$$\bar{x} = XO + \frac{(x1 - xo) + (x2 - xo) + (x3 - xo) + \cdots + (xn - xo)}{n}$$

$$= 60 + \frac{50}{5}$$

$$\bar{x} = 70$$

لاحظ ان قيمة المتوسط الحسابي متساوية بالطريقتين وستكون كذلك مهما اخترنا قيمة مختلفة ل x_0

1-2- حالة البيانات المبوبة:

وهي المدرجة ضمن جدول تكراري وهنا نميز بين حالتين:

1-2-1- حالة متغير كمي منقطع:

لتكن لدينا قيم المتغير الكمي المنقطع التالية: $x_1.x_2.x_3............x_n$، والتي تقابلها التكرارات التالية: $n_1.n_2.n_3............n_n$ فإن المتوسط الحسابي لها يكون بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{n1x1 + n2x2 + n3x3 + \cdots + nnxn}{n}$$

$$= \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

حيث: $\bar{x}$: المتوسط الحسابي

xi: تمثل قيم المتغير

ni: تكرار كل قيمة

أي أن المتوسط الحسابي لبيانات متكررة يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها مقسوما على مجموع التكرارات

مثال: أحسب المتوسط الحسابي لمعطيات الجدول التالي الذي يمثل توزيع الاسر حسب عدد أفرادها.

عدد الافراد X_i	02	03	04	05	06	المجموع Σ
التكرار n_i	20	14	16	20	30	100

المصدر: افتراضي.

الحل:

$$\bar{x} = \frac{n1x1 + n2x2 + n3x3 + \cdots + nnxn}{n}$$

$$= \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

من الأفضل أن تتم الحسابات في الجدول وذلك بإضافة سطر مساعد نقوم بحساب n_i*X_i للوصول للمجموع كما هو موضح في الجدول.

عدد الافراد X_i	02	03	04	05	06	المجموع Σ
التكرار n_i	20	14	16	20	30	100
n_i*X_i	40	42	64	100	180	**426**

$$\bar{x} = \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

$$\bar{x} = \frac{426}{100}$$

$$\bar{x} = 4.26$$

وعليه فإن متوسط عدد افراد الأسرة في العينة المختارة هو 4.26 شخص.

1-2-2- حالة متغير كمي مستمر:

يتم التعبير عن كل قيمة من القيم التي تقع داخل حدود الفئة **[A B [**: بمركز هذه الفئة (نعتبرها $\mathbf{X_i}$) مع توفر التكرارات n_i، وبذلك يكون المتوسط الحسابي يمثل مجموع ضرب مراكز الفئات في التكرارات المقابلة لها مقسوما على مجموع التكرارات.

مركز الفئة $\frac{A+B}{2}$ == $X_i = \frac{\text{الحد الادنى للفئة} + \text{الحد الاعلى للفئة}}{2}$

فإن المتوسط الحسابي بالطريقة المباشرة يعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = \frac{n1x1 + n2x2 + n3x3 + \cdots + nnxn}{n}$$

$$= \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

مثال:

الجدول التالي يبين توزيع دخل 40 موظف حسب مداخيلهم الشهرية، مقدرة بعشرة الاف دينار.

المطلوب: أحسب متوسط دخل الموظفين.

الدخل	]34-32]	]36-34]	]38-36]	]40-38]	]42-40]	]44-42]
عدد الموظفين	4	7	13	10	5	1

الحل:

1- إيجاد متوسط دخل الموظفين: بمعنى حساب $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{n1x1 + n2x2 + n3x3 + \cdots + nnxn}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

نحدد أولا مراكز الفئات في الجدول ونقوم بالحسابات المطلوبة في الجدول الموالي:

الدخل	**]34-32]**	**]36-34]**	**]38-36]**	**]40-38]**	**]42-40]**	**]44-42]**	**المجموع Σ**
X_i	33	35	37	39	41	43	//
عدد الموظفين n_i	4	7	13	10	5	1	40
$n_{i*}X_i$	132	245	481	390	205	43	1496

$$\bar{x} = \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

$$\bar{x} = \frac{1496}{40}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum NI\ Xi}{\sum NI}$$

$$\bar{x} = 37.4$$

ومنه فان متوسط دخل الموظفين هو 34700 دج.

وهناك طريقة ثانية في حساب الوسط الحسابي تسمي بالطريقة غير المباشرة او طريقة الوسط الفرضي X_0 ، فإذا كانت لدينا القيم التالية: $x_1.x_2.x_3..........x_n$، فمتوسطها الحسابي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = XO + = \frac{\sum ni(\mathrm{Xi} - \mathrm{xo})}{\sum \mathrm{ni}}$$

ويتم اختيار قيمة x_0 أي عدد حقيقي مختلف عن الصفر غير انه يفضل ان يكون أحد قيم مراكز الفئات.

مثال: نفس المثال السابق

المطلوب: أحسب متوسط دخل الموظفين بطريقة الوسط الفرضي.

الحل:

1- إيجاد متوسط دخل الموظفين: بمعنى حساب $\bar{x}$

$$\bar{x} = XO + = \frac{\sum ni(\mathrm{Xi} - \mathrm{xo})}{\sum \mathrm{ni}}$$

نفرض $x_0 = 35$ مثلا

نقوم بالحسابات المطلوبة في الجدول الموالي:

الدخل	]34-32]	]36-34]	]38-36]	]40-38]	]42-40]	]44-42]	المجموع Σ
X_i	33	35	37	39	41	43	//
عدد الموظفين n_i	4	7	13	10	5	1	40
X_i-x_0	2-	0	2	4	6	8	
$n_{i*}\ (X_i-x_0)$	-08	0	26	40	30	8	96

$$\bar{x} = XO + = \frac{\sum ni(\mathrm{Xi} - \mathrm{xo})}{\sum \mathrm{ni}}$$

$$\bar{x} = 35 + \frac{96}{40}$$

$$\bar{x} = 35 + 2.4$$

$$\bar{x} = 37.4$$

ومنه فان متوسط دخل الموظفين هو 34700 دج، نفس النتيجة السابقة.

يفضل استخدام طريقة الوسط الفرضي والتي تهدف الى تبسيط العمليات الحسابية الطويلة حتى يسهل التعامل معها، عندما تكون البيانات الموجودة في الجداول المعطاة كبيرة القيم فإن استخدام الطريقة المباشرة يصبح صعب، كما يزداد احتمال الوقوع في الأخطاء بذلك فإنه في مثل هذه الحالات.

ملاحظة: في حالة الجداول المفتوحة لا يمكننا حساب المتوسط الحسابي مباشرة، ولحسابه يجب غلق الجدول بجعل طول الفئة المفتوحة مساويا لطول الفئة الأقرب إليها. بمعنى اذا كان الجدول مفتوح عند الفئة الأولى نقوم بغلقه بجع الفئة الأولى معلومة الحدود بطول فئة يساوي طول الفئة الثانية، واذا كان مفتوح عند الفئة الأخيرة نجعلها بنفس طول الفئة ما قبل الأخيرة.

1-2-3- الوسط الحسابي المرجح:

أحيانا لا تكون القيم المراد حساب متوسطها الحسابي بنفس الأهمية بل أهميات نسبية مختلفة تختلف باختلاف معامل الترجيح الخاص بها. في مثل هذه الحالات فإن المتوسط الحسابي البسيط يمكن الاعتماد عليه في إيجاد المتوسط الصحيح والمنطقي، بل يتطلب الأمر استخدام صيغة أخرى تسمى بصيغة المتوسط الحسابي المرجح:

$$\text{المتوسط الحسابي المرجح} = \frac{\text{مجموع حاصل ضرب مل قيمة في معاملها}}{\text{مجموع المعاملات}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \overline{X}$$

حيث: x_i = تمثل القيم.

n_i = تمثل المعاملات او الترجيحات او وزن كل قيمة.

ويستخدم المتوسط الحسابي المرجع كذلك لإيجاد المتوسط الحسابي لمجموع البيانات أو أكثر في حالة دمجهم معا في مجموعة واحدة وبالتالي فإن متوسط الحسابي المرجح لمجموعتين من البيانات y,z يساوي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i-1}^{n} z_i + \sum_{i-1}^{n} y_i}{n+Z}$$

$$\sum_{i-1}^{n} z_i = n\overline{Z}$$

$$\sum_{i-1}^{n} y_i = n^{\overline{Y}}$$

$$\overline{X} = \frac{n\overline{Z} + Z\overline{Y}}{n+Z}$$

مثال: الجدول التالي يبين عدد العمال ومتوسط الأجر للعامل الواحد في الوحدات المختلفة التي تشكل الشركة الوطنية لإنتاج الأنابيب البلاستيكية. المطلوب حساب متوسط الأجور التي توزعها هذه الشركة؟[1].

الفرع	وحدة الشمال	وحدة الشرق	وحدة الجنوب
عدد العمال	130	110	80
متوسط الأجور	13000	14500	18500

الحل:

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2 + n_3\overline{x}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + n_1\overline{x}_1}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n_4}$$

$$\overline{X} = \frac{(130x13000) + (110x14500) + (80x18500)}{130+110+80} = \frac{1690000+1595000+1480000}{320}$$

$$\overline{X} = \frac{4765000}{320} = 14890{,}62 =$$ متوسط أجر عمال الشركة

ملاحظة: لا يمكن حل بشكل صحيح إذا اعتبرنا أن متوسط الأجر في شركة هو عبارة عن مجموع متوسط الأجر في الوحدات الثلاث مقسوما على عدد الوحدات فإن الإجابة تكون خاطئة فالإجابة الصحيحة هي تلك التي يمكن الحصول عليها من خلال علاقة المتوسط الحسابي المرجح.

1-2-4- خواص المتوسط الحسابي:

1 – يعتبر المتوسط الحسابي أبسط مقاييس المركزية حسابا وأكثرها استخداما.

2 – يأخذ المتوسط الحسابي بعين الاعتبار جميع قيم الظاهرة المدروسة.

3 – مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفر = $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X}) = 0$ وللتأكد من ذلك نقوم بتفكيك الطرف الأيمن:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})$$
$$= \sum X_i - \sum X$$
$$= \sum X_i - n\overline{X}$$

(كون: $n\overline{X} = \ldots\ldots\overline{X} + \overline{X} + \overline{X}$)

نضرب الحد الأول في n ونقسمه على n

[1] موسي عبد الناصر، سبق ذكره، ص 45.

$$= \frac{n\sum X_i}{n} - n\overline{X}$$
$$= n\overline{X} - n\overline{X} = 0$$

4- يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة).

مثال: أحسب المتوسط الحسابي للقيم التالية: 30، 35، 40، 45، 50، 100

الحل: $\bar{X} = \frac{1200}{6} = 200$

5- مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي تساوي الصفر .

مثال: أحسب المتوسط الحسابي للقيم التالية: 10، 20، 30، 40، 50.

الحل: $\bar{X} = \frac{150}{5} = 30$

أحسب مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي.

X_i	10	20	30	40	50
$X_i - \bar{X}$	-20	-10	0	10	20

و بالتالي: $\sum X_i - \bar{X} = 0$

6- مجموع مربع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي تكون أقل من مجموع مربع القيم عن أي قيمة أخرى.

مثال: لتكن لدينا القيم التالية: 5، 10، 15، 20، 25.

أحسب المتوسط الحسابي لهذه القيم و أحسب مربع انحرافاتها عن القيمة 5

الحل: $\bar{X} = \frac{75}{5} = 15$

X_i	5	10	15	20	25
$X_i - \bar{X}$	10 -	5 -	0	5	10
$(X_i - 5)^2$	0	25	100	225	400

2- **الوسيط** :

يعتبر الوسيط مقياس آخر للنزعة المركزية، حيث يتم من خلال الوسيط الوصول إلى رقم كمي يمثل القيمة التي تقع في منتصف قيم المتغير الكمي المدروس، لذا فإن الوسيط يمثل القيمة الكمية التي تكون نصف قراءات المتغير الكمي أقل منها بينما النصف الآخر أعلى منها[1].

عندما يكون عدد القيم معروف يمكن حساب الوسيط وفقا للخطوات التالية[2]:

- ترتيب القيم تصاعديا أو تنازليا.
- إذا كان عدد القيم فرديا فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في منتصف التوزيع، ويتم ايجاد ترتيب الوسيط حسب المعادلة التالية:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{N+1}{2}$$

فاذا كان لدينا البيانات التالية: 3، 6، 12، 18، 19، 21، 23 فإن القيم هنا عبارة عن سبع قيم ولذلك فإن القيم هنا عبارة عن سبع قيم ولذلك فإن ترتيب الوسيط هو:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{1+7}{2}$$

$$= 4$$

أي أن ترتيب الوسيط هو الرابع وبالتالي فإن الوسيط يساوي 18، حيث يقع تحته 3 قيم وفوقه 3 قيم أي 50% من القيم فوقه و 50% تحته.

هذا مع الأخذ بعين الاعتبار أن القيم السابقة مرتبة تصاعديا

- إذا كان عدد القيم زوجيا، فإن منتصف المسافة بين القيمتين الواقعتين في وسط التوزيع تكون الوسيط، أي أن هناك ترتيبان وذلك وفقا للمعادلة الآتية:

$$\text{الترتيب الأول} = \frac{N}{2}$$

$$\text{الترتيب الثاني} = \frac{N}{2} + 1$$

[1] علي بن محمد الجمعة، مادة الإحصاء العام، 1428هـ، الطبعة الأولى، ص 28.

[2] عبد الله فلاح المنيزل، عايش موسى عرايبة، مرجع سبق ذكره، ص 56.

2-1- الوسيط في حالة بيانات غير مبوبة: لحساب الوسيط في هذه الحالة، نتبع الخطوات التالية:

- ترتيب القيم ترتيبا تصاعديا أو تنازليا.
- تحديد رتبة الوسيط بالعلقة التالية: $\frac{N+1}{2}$.

مثال: عدد القيم هو عدد فردي :

لدينا القيم التالية: 2، 5، 7، 10، 11

الرتبة هي: $\frac{6+1}{2} = \frac{N+1}{2}$

الوسيط: 7

2-2- الوسيط في حالة البياتات مبوبة: في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

- نقوم بحساب التكرار التجميعي الصاعد.
- نحدد رتبة الوسيط بالعلاقة التالية: $\frac{\sum N_i}{2}$.
- نحدد الفئة الوسيطية أي التي تحتوي على قيمة الوسيط.
- نحسب قيمة الوسيط بالعلاقة التالية: $M_e = X_0 + \frac{\frac{\sum N_i}{2} - N_1'}{NM_e}.K$

حيث:

M_e: قيمة الوسيط

X_0: حد الأدنى للفئة الوسيطية

N_1':تكرار تصاعدي للفئة الوسيطية السابق

NM_o: تكرار عادي للفئة

K: طول الفئة الوسيطية

مثال: البيانات التالية تمثل النفقات الشهرية لمجموعة من الأسر لإحدى المدن الجزائرية مقدرة بآلاف الدينارات و المطلوب حساب الوسيط.

فئات X_i	[5 ، 10]	[10 ، 15]	[15 ، 20]	[20 ، 25]	[25 ، 30]	[30 ، 35]	المجموع
تكرار N_i'	7	13	15	6	5	4	50
تكرار تصاعدي	7	20	35	41	46	50	

- نحدد ترتيب الوسيط بالغلاقة التالية : $\frac{\sum N_i}{2} = \frac{50}{2} = 25$

- الفئة الوسيطية هي : [15 ، 20]

- قيمة الوسط بالعلاقة التالية : $M_e = X_0 + \frac{\frac{\sum N_i}{2} - N_i'}{NM_e}$

$$M_e = 15 + \frac{25 - 20}{15}$$

$M_e = 16.66$

2-3- حساب الوسيط بيانيا:

من المثال السابق نحدد قيمة الوسيط

الفئات	[5 ، 10]	[10 ، 15]	[15 ، 20]	[20 ، 25]	[25 ، 30]	[30 ، 35]	المجموع
N_i	7	13	15	6	5	4	50
تكرار تصاعدي	7	20	35	41	46	50	
تكرار تنازلي	50	43	30	15	9	4	

2-4- خصائص الوسيط :

- لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة.

مثال: حدد قيمة الوسيط للسلسلة الإحصائية التالية : 5، 10، 15، 20، 25، 30، 200

الجواب: ترتيب القيم 5، 10، 15، 20، 25، 30، 200

قيمة الوسيط هي: $M_e = 20$

- يمكن حسابه بيانيا.
- لا يشترط في حسابه أن تكون أطوال الفئات متساوية

3- المتوسط الهندسي:

في الحالات التي تكون فيها قيم الظاهرة المدروسة عبارة عن نسب أو معدلات، أي في الحالات التي نرغب فيها بدراسة معدل تغيرات ظاهرة ما فإن المتوسط الحسابي لن يصف الظاهرة وصفا سليما، ويعطي صورة مشوهة ولهذا دعت الضرورة إلى إيجاد متوسط آخر يصلح لوصف مثل هذه الظواهر سمي هذا المتوسط بالمتوسط الهندسي، وهو واسع الاستخدام في الحياة الاقتصادية.

هذا المقياس قليل الاستعمال مقارنة بالمتوسطات السابقة، و يستعمل في حساب معدل الفائدة و معدل النمو و غيرها. و نرمز للمتوسط الهندسي بالرمز 'G'.

3-1- المتوسط الهندسي في حالة البيانات غير المبوبة:

لتكن لدينا القيم التالية $X_1.X_2.X_3, \dots\dots\dots..X_N$

$$G = \sqrt[N]{X_1.X_2.\dots\dots\dots..X_N}$$

مثال: أحسب المتوسط الهندسي للقيم التالية 1، 3، 9

الحل:

$$G = \sqrt[N]{X_1.X_2.\dots\dots\dots..X_N} = \sqrt[3]{1.9.3} = \sqrt[3]{27}$$

لدينا $G = \sqrt[N]{X_1.X_2.\dots\dots\dots..X_N}$:

$$G = (X_1.X_2.\ \dots\dots\dots.,X_N)^{1/N}$$
$$LogG = Log(X_1.X_2.\ \dots\dots\dots.,X_N)^{1/N}$$
$$LogG = \frac{1}{N}\ Log(X_1.X_2.\ \dots\dots\dots.,X_N)$$
$$LogG = \frac{1}{N}\ [LogX_1 + LogX_2 +\ \ \dots\dots\dots.+Log\ X_N]$$
$$LogG = \frac{[LogX_1 + LogX_2 +\ \ \dots\dots\dots.+Log\ X_N]}{N}$$
$$LogG = \frac{\sum_{i=1}^{N} LogX_i}{N}$$

مثال: أحسب المتوسط الهندسي للقيم 1، 3، 9.

$$LogG = \frac{[Log1 + Log3 +\ Log\ 9]}{3} = 0.45$$
$$G = 3$$

3-2- المتوسط الهندسي المرجح:

لتكن لدينا القيم التالية: $X_1.X_2.X_3, \dots\dots\dots..X_N$

مرفوقة بالتكرارات أو المعاملات $N_1.N_2.N_3, \dots\dots\dots..N_N$

المتوسط الهندسي لهذه القيم

$$G = \sqrt[\Sigma N_i]{X_1^{N_1}.X_2^{N_2}.\dots\dots\dots..X_N^{N_N}}$$
$$G = \left[X_1^{N_1}.X_2^{N_2}.\dots\dots\dots..X_N^{N_N}\right]^{1/\Sigma N_i}$$

$$LogG = Log\left[X_1^{N_1}.X_2^{N_2}.\dots\dots\dots..X_N^{N_N}\right]^{1/\sum N_i}$$

$$LogG = \frac{1}{\sum N_i}Log\left[X_1^{N_1}.X_2^{N_2}.\dots\dots\dots..X_N^{N_N}\right]$$

$$LogG = \frac{1}{\sum N_i}\left[LogX_1^{N_1} + Log\,X_2^{N_2} + \cdots + \,LogX_N^{N_N}\right]$$

$$LogG = \frac{1}{\sum N_i}\sum_{i=1}^{i=N} LogX_i^{N_i}$$

مثال: إذا كانت لدينا العلامات التالية المرفوقة بمعاملاتها.

أحسب المتوسط الهندسي لهذه العلامات.

العلامة	7	8	11	13
المعامل	2	3	5	2

الحل:

$$LogG = \frac{1}{\sum N_i}\left[LogX_1^{N_1} + Log\,X_2^{N_2} + \cdots + \,LogX_N^{N_N}\right]$$

$$LogG = \frac{1}{12}\ [2Log7 + 3Log8 + \ 5Log11 + 2Log\ 13]$$

$$LogG = 0.98$$

3-3- المتوسط الهندسي في حالة البيانات المبوبة في فئات:

يتم حساب المتوسط الهندسي في حالة البيانات المبوبة في فئات باستخدام علاقة المتوسط الهندسي المرجح.

$$LogG = \frac{1}{\sum N_i}\sum_{i=1}^{i=N} LogX_i^{N_i}$$

حيث:

X_i : مركز الفئة

N_i : تكرار الفئة

مثال:البيانات التالية تمثل أجور أسبوعية لمجموعة من العمال

الفئات	]10،20]	]20،30]	]30،40]	]40،50]	المجموع
التكرار	2	6	7	5	18
X_i	15	25	35	45	

أحسب المتوسط الهندسي

الحل:

$$LogG = \frac{1}{18}\,[2Log15 + 4Log25 + \ 7Log35 + 5Log\ 45]$$

3-4- خواص المتوسط الهندسي: من أهم خواص المتوسط الهندسي ما يلي:

1- يدخل في حساب جميع القيم ولكنه أقل تأثرا بالقيم المتطرفة من المتوسط الحسابي.

2- لا يمكن حساب من الجداول التكرارية المفتوحة من البداية أو النهاية.

3- لا يمكن حسابه في حالة وجود قيمة سالبة أو معدومة.

4- يستخدم بأكثر واقعية عند وصف الظواهر النسبية.

5- قيمة المتوسط الهندسي لأي ظاهرة أصغر دائما من قيمة المتوسط الحسابي $G < \overline{X}$

4- المتوسط التوافقي:

المتوسط التوافقي هو من المقاييس الخاصة التي تستخدم لتحديد معدلات السرعة ومتوسط الأسعار، ومتوسط الكثافة السكانية. المتوسط التوافقي لمجموعة من القيم هو مقلوب المتوسط الحسابي لمقاليب هذه القيم.

فإذا كانت لدينا القيم: $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$.

فإن مقاليب هذه القيم هو $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{x_n}$

والمتوسط الحسابي لمقاليب هذه القيم هو $\dfrac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots\ldots \frac{1}{x_n}}{n}$

ومقلوب المتوسط الحسابي لمقاليب هذه القيم هو المتوسط التوافقي. $H = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots\ldots \frac{1}{x_n}}$

وباختصار $H = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

أما إذا كانت البيانات متكررة أو مبوبة في جداول توزيع تكراري فإن: $H = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{n_i}{x_i}}$

حيث: n_i تمثل التكرار.

x_i تمثل القيم أو مراكز الفئات.

مثال: على ذلك نقول أن سائق قطع المسافة الفاصلة بين مدينتين على أربع مراحل متساوية، المسافة المقطوعة في كل منها 100 كم.

فإذا قطع المرحلة الأولى بسرعة 100كم/ساعة والمرحلة الثانية بسرعة 120كم/ساعة والمرحلة الثالثة بسرعة 150كم/ساعة والمرحلة الرابعة بسرعة 80كم/ساعة، أوجد متوسط سرعة هذا السائق على طول المرحلة؟.

بتطبيق علاقة المتوسط التوافقي على بيانات المثال السابق فإننا سنجد

متوسط السرعة $H = \dfrac{400}{\dfrac{100}{100}+\dfrac{100}{120}+\dfrac{100}{150}+\dfrac{100}{80}} = \dfrac{400}{\dfrac{1200+1000+800+1500}{1200}}$

$H = \dfrac{48000}{4500} =$ 106.67 كم/ساعة

فإذا ضربنا هذه السرعة في زمن المرحلة $\dfrac{45}{12}$ ساعة فإننا نحصل على 400 كم هي المسافة المقطوعة فعلا.

ملاحظة: $\overline{X} > G > H$ وهذه العلاقة صحيحة في كل الحالات.

مثال:

أحسب المتوسطات الثلاث (الحسابي والهندسي والتوافقي) للبيانات التالية: 2، 4، 6، 8.

الحل:

- المتوسط الحسابي $\overline{X} = \dfrac{2+4+6+8}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$
- المتوسط الهندسي $G = \sqrt[4]{2\times4\times6\times8} = \sqrt[4]{384} = 4{,}42$
- المتوسط التوافقي $H = \dfrac{4}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}} = \dfrac{4}{\dfrac{24+12+8+6}{48}} = \dfrac{192}{50} = 3{,}84$

أي أن $\overline{X} > G > H$ وهذه العلاقة صحيحة في كل الحالات.

5- المنوال:

هو أبسط مؤشرات مقاييس النزعة المركزية، و يعرف بأنه القيمة الأكثر تكرارا في توزيع ما.

مثال: لتكن لدينا القيم الإحصائية التالية: 7، 15، 13، 8، 7، 11

نلاحظ أن القيمة 7 تكررت أكثر من غيرها من القيم، و من ثم فإن منوال السلسلة $_o = 7$

مثال: حدد منوال السلسلة التالية: 7، 13، 8، 11، 15، 13، 7.

نلاحظ أن القيمة 7 ، 13 تكررتا أكثر من غيرها من القيم، و بالتالي فهما منوال السلسلة.

$$M_{o_1} = 7 \wedge M_{o_2} = 13$$

مثال: حدد منوال السلسلة التالية: 8، 15، 13، 26، 25، 30، 35، 40.

هذه السلسلة عديمة المنوال

5-1- حساب المنوال في حالة البيانات المبوبة في الفئات: نتبع الخطوات التالية:

- نحدد الفئة المنوالية : هي الفئة التي تقابل أكبر تكرار في حالة ما إذا كانت أطوال الفئات متساوية، و هي التي تقابل أكبر تكرار معدل في حالة ما إذا كانت أطول الفئات غير متساوية.

5-1-1- طريقة الفروقات برسون:

- نحسب قيمة المنوال بالعلاقة التالية: $M_o = X_0 + \frac{1}{d_1+d_2}.K$

حيث:

M_o: المنوال

X_o: الحد الأدنى للفئة المنوالية

d_1: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية

d_1: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و تكرار الفئة اللاحقة لها

K::طول الفئة المنوالية

مثال:احسب الفئة المنوالية و المنوال بطريقة برسون

الفئات	]10،20]	]20،30]	]30،40]	]40،50]	]50،60]	]60،70]	المجموع
التكرار	5	7	3	8	15	12	50

الحل:

- الفئة المنوالية هي [50-60[

- نطبق العلاقة الرياضية : $M_o = X_0 + \frac{d_1}{d_1+d_2}.K$

$$\begin{cases} k = 10 \\ d_1 = 15 - 8 = 7 \\ X_0 = 50 \\ d_2 = 15 - 12 = 3 \end{cases}$$ و بالتالي : : $M_o = 50 + \frac{7}{7+3}.10$

$M_o = 57$

5-1-2- طريقة الرافعة :

يحسب المنوال بطريقة الرافعة بالعلاقة التالية: $M_o = X_0 + \frac{h_2}{h_1+h_2}.K$

حيث:

K: طول الفئة المنوالية

h_1: التكرار السابق لتكرار الفئة المنوالية

h_2: التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية

X_0: الحد الأدنى للفئة المنوالية

M_o: المنوال

مثال: احسب المنوال بطريقة الرافعة

الفئات	[10،20]	[20،30]	[30،40]	[40،50]	[50،60]	[60،70]	المجموع
التكرار	5	7	3	8	15	12	50

الحل:

نستخدم العلاقة التالية: $M_o = X_0 + \frac{h_2}{h_1+h_2}.K$

$$M_o = 50 + \frac{12}{12+8}.10 = 56$$

مثال: البيانات التالية تمثل مقدار التأخر مقدر بالدقائق لمجموعة من العمال في مؤسسة و المطلوب هو حساب المنوال بطريقتي برسون و الرافعة.

الفئات	]5،10]	]10،15]	]15،18]	]18،25]	]25،28]	]28،30]
التكرار	5	15	3	7	4	2
طول الفئة	5	5	3	7	3	2
التكرار المعدل	1.4	3	1	1	1.33	1

الحل:

طريقة الفروقات: $M_o = X_0 + \frac{d_1}{d_1+d_2}.K$

$$M_o = 10 + \frac{1.6}{1.6+2}.5 = 12.22$$

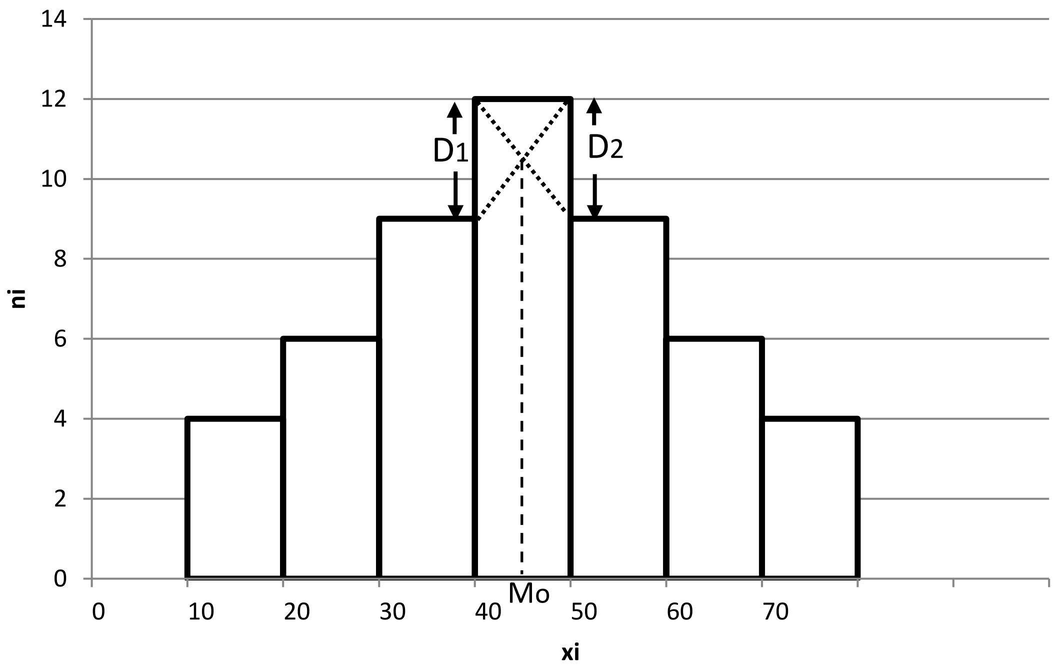
طريقة الرافعة: $M_o = X_0 + \frac{h_2}{h_1+h_2}.K$

$$M_o = 10 + \frac{1}{1+1.4}.5 = 12.08$$

5-2- حساب المنوال بيانيا: لتحديد المنوال بيانيا نرسم المدرج التكراري، ثم نقوم برسم قطعة مستقيمة انطلاقا من الزاوية.

مثال: البيانات التالية تمثل النفقات الشهرية لمجموعة من الأسر مقدرة بمئات الدينار.

الفئات	]10،20]	]20،30]	]30،40]	]40،50]	]50،60]	]60،70]
التكرار	5	7	3	8	15	12



5-3- العلاقة بين ‾ ، M_e ، M_o :

- **حالة التناظر**: إذاكانت القيم متناظرة؛ أي القيم موزعة توزيعا منتظما فإن :

$$M_e = M_o = \bar{X}$$

- **حالة غير التناظر**:

■ **التوزيع مائل نحو اليمين**: في هذه الحالة

$$_o < M_e < \bar{X}$$

■ **التوزيع مائل نحو اليسار**: في هذه الحالة

$$\bar{X} < M_e < M_o$$

إذن: العلاقة بين ‾ و M_e و M_o هي:

$$\bar{X} - M_o = 3(\bar{X} - M_e)$$

هي علاقة كارل ببرسون.

5-4- خواص المنوال:

1- لايتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة لانه لا يأخذ بعين الاعتبار كل القيم

2- يمكن ايجاده بيانيا.

3- بعض التوزيعات تملك اكثر من منوال.

4- يمكن حسابه في حالة الجداول المفتوحة

5- أفضل المقاييس في حالة المتغيرات الكيفية.

6- الربيعيات[1]

لما نقوم بتقسيم السلسلة الإحصائية إلى ثلاثة أقسام متساوية نتحصل على ربيعيات و نميز ثلاث أنواع هي:

6-1- الربيع الأول: هو القيمة التي تقسم السلسلة الإحصائية إلى قسمين حيث يكون 25 % من القيمة قبلها و 75% بعدها. و تحسب قيمة الربيع في حالة البيانات غير المبوبة. كما رأينا في حساب الوسيط فقط الرتبة تتغير.

[1] جلاطو جيلالي، مرجع سابق، ص 45.

رتبة الربيع: $Q = \frac{N+1}{4}$

مثال: حدد قيمة الربيع الأول للقيم التالية: 7، 19، 13، 12، 8، 11، 20

الحل:

الترتيب التصاعدي للقيم7، 8، 11، 12، 13، 19، 20.

$$\frac{N+1}{4} = \frac{7+1}{4} = 2$$

6-2- الربيع الثاني: الوسيط

6-3- الربيع الثالث: هو القيمة التي تقسم السلسلة الإحصائية إلى قسمين، 75% من القيمة قبلها و 25% من القيمة بعدها.و يحسب الربيع في حالة البيانات غير المبوبة، كما يحسب الربيع الأول و الوسيط فقط بتغيير الرتبة.

حساب الربيع الأول في حالة البيانات المبوبة في فئات .

1- نحسب التكرار التجميعي الصاعد.

2- نحدد رتبة الربيع الأول عن طريق العلاقة التالية: $\frac{\sum N_i}{4}$.

3- تحديد الفئة الربيعية و هي الفئة التي تقابل تكرار الربيع الأول.

4- نحسب قيمة الربيع بالعلاقة التالية:

$$Q_i = X_0 + \frac{\frac{\sum N_i}{4} - N_i'}{NQ_i}$$

حيث:

X_0 : الحد الأدنى لفئة الربيع الأول

$\frac{\sum \mathrm{N}_i}{4}$: رتبة الربيع

K : طول فئة الربيع الأول

N_o: تكرار فئة الربيع الأول

7- العشريات:

لو نقوم بتقسيم السلسلة الإحصائية إلى عشرة أقسام، كل قسم يسمى الغشير و يحسب في حالة البيانات غير المبوبة كما يحسب الربيع الأول و الثالث.

رتبة العشير الأول: $\frac{N+1}{10}$

رتبة العشير الثاني: $2\left(\frac{N+1}{10}\right)$

رتبة العشير الثالث: $3\left(\frac{N+1}{10}\right)$

في حالة البيانات المبوبة في فئات $\Delta_i = X_0 + \frac{\frac{i\sum N_i}{10} - N_i'}{N\Delta_i}.K$

حيث:

K : طول فئة العشير

X_0 : الحد الأدنى للفئة العشيرية

$\frac{i\sum N_i}{10}$: رتبة العشير

Δ_i : العشير ذو الرتبة i

8- المئينات[1]

يحسب المئي في حالة البيانات غير المبوبة بنفس طريقة حساب الربيع الأول و الثالث فقط القسمة و الرتبة يتغيران.

رتبة المئي الأول: : $\frac{N+1}{100}$

رتبة المئي الثاني: $2\left(\frac{N+1}{100}\right)$

في حالة البيانات المبوبة في فئات نتبع العلاقات التالية:

$$\rho_i = X_0 + \frac{\frac{i\sum N_i}{100} - N_i'}{N\rho_i}.K$$

حيث:

[1] جلاطو جيلالي، مرجع سابق، ص 49.

K : طول الفئة المئوية

N_i : تكرار تصاعدي سابق للفئة المئوية

$\frac{i\sum N_i}{100}$: رتبة المئي

ρ_i : المئي ذو الرتبة i

مثال: تمثل البيانات التالية فئات أعمار لمجموعة من العمال في شركة وطنية .

الفئات	[20،25[	[25،30[	[30،35[	[35،40[	[40،45[	[45،50[	[50،55[	[55،60[	المجموع
التكرار	8	11	13	30	18	7	22	15	124
تكرار تصاعدي	8	19	32	62	80	87	109	124	

أحسب Q_1،Q_3،Δ_3،Δ_7،ρ_{20}،ρ_{65}،ρ_{50} و فسر النتائج المحصل عليها

الحل:

حساب Q_1 :

فئة الربيع الأول [30،35[وقيمتها هي:

$$Q_1 = X_0 + \frac{\frac{\sum N_i}{4} - N_i'}{NQ_i} = 30 + \frac{\frac{124}{4} - 19}{13} .5 = 34.61$$

التفسير: هناك 25% من العمال أعمارهم أقل من 34.61 و 75% منهم أعمارهم أكبر من 34.61 سنة.

مثال: البيانات التالية تمثل الأجور الشهرية مقدرة بآلاف الدينارات في مؤسستين مختلفتين

المؤسسة 1	**26**	**28**	**30**	**32**	**34**
المؤسسة 2	10	20	30	40	50

قارن بين الأجور للمؤسستين

الجواب:

$$\bar{X}_1 = \frac{26+28+30+32+34}{5} = 30$$

$$\bar{X}_2 = \frac{26+28+30+32+34}{5} = 30$$

$$M_{e_1} = 30 \qquad\qquad M_{e_1} = 30$$

لا يوجد رقم من أجور العمال و لكن حسب مقاييس النزعة المركزية هناك مقاييس أخرى تعطى لنا صورة أكثر عمقا عن البيانات الإحصائية تسمى مقاييس التشتت.

تمارين مقترحة للمحور الثالث:

التمرين الأول:

قام أستاذ بإجراء امتحان مادة الإحصاء لطلبة السنة الأولى جدع مشترك المقسمين إلى مجموعتين فإذا توفرت لك المعلومات التالية.

عدد طلبة المجموعة الأولى = 200 المتوسط الحسابي لدرجاتهم = 08.5.

عدد طلبة المجموعة الثانية = 250 المتوسط الحسابي لدرجاتهم = 10.2.

أوجد المتوسط الحسابي لمجموع الطلبة؟

التمرين الثاني:

قمنا بإجراء مسابقة بين طلبة جامعة بومرداس وجامعة أخرى فقمنا بنقل الطلبة في حافلات. إذا علمت بأن متوسط عدد الطلبة بالحافلات الصغيرة كان 30 طالبا، والمتوسط بالحافلات الكبيرة كان 70 طالبا.

أوجد عدد الطلبة المشاركين في الرحلة إذا كان عدد الحافلات الصغيرة = 6 وعدد الحافلات الكبيرة =4؟

التمرين الثالث:

ليكن التكرار المتجمع الصاعد للظاهرة (×) على الشكل التالي:

20	30	15	10	5	التكرار

فإذا علمت أن طول الفئة عبارة عن جداء التكرار الأول في التكرار الأخير وأن الحد الأعلى للفئة الثالثة عبارة عن جداء تكرار الفئة الثانية في تكرار الفئة الرابعة.

المطلوب:

- إعادة تكوين حساب الجدول؟
- حساب المتوسط الحسابي؟

التمرين الرابع:

الجدول التالي يمثل عدد الموظفين لجميع فروع شركة كبيرة والبالغ عددها 10 فروع في جميع انحاء العالم حيث أن العدد الاجمالي للموظفين هو 390 موظف.

الفروع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد الموظفين	20	25	40	30	55	20	α	B	65	55

المطلوب :

1- تحديد طبيعة المتغير الإحصائي.

2- حساب α و β إذا علمت أن 2 β = α ماذا يمثل كل من α، β.

3- إيجاد قيمة المنوال من الرسم أن أمكن؟ ثم حساب قيمة المنوال؟

التمرين الخامس:

اشترى أحد رجال الأعمال سهم بقيمة 300000 دينار مجموعة من الأسهم بسعر 9 دينار للسهم واشترى مرة أخرى بنفس القيمة مجموعة أخرى من الأسهم بسعر 8 دينار للسهم. ما هو متوسط السعر للسهم.

التمرين السادس:

قام استاد مادة الاحصاء بإجراء تقويم فجائي لمجموعة من الطلبة فتحصلنا على العلامات التالية:

3، 5، 6، 9، 3، 7، 8

1- أحسب الوسط الحسابي؟

2- جد كل من المنوال والوسيط؟

التمرين السابع:

الجدول التالي يبين عدد العمال ومتوسط الأجر للعامل الواحد في الوحدات المختلفة التي تشكل الشركة الوطنية للتصدير والاستراد.

الفرع	فرع عنابة	فرع العاصمة	فرع وهران
عدد العمال	50	120	100
متوسط الأجور	32000	38000	35000

المطلوب:

حساب متوسط الأجور التي توزعها الشركة:

التمرين الثامن:

لتكن السلسلتين التاليتين:

السلسلة الأولى: 2، 5، 8، 4، 3،1، 6

السلسلة الثانية: 2، 4، 3، 5، 8، 7، 6، 11، 15. 19، 17، 13

المطلوب: أحسب الربيع الأول والثاني للسلسلة الأولى؟ والربيع الثالث للسلسة الثانية؟

حل التمرين الأول:

$n_1 = 200$ $X_i = 8.5$

$n_2 = 250$ $X_i = 10.2$

نستخدم المتوسط الحسابي المرجح لإيجاد متوسط درجات مجموع الطلبة

$$\bar{X} = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\overline{X_2}}{n_1 + n_2} = \frac{(200 \times 8.5) + (250 \times 10.2)}{200 + 250}$$

$$\bar{X} = \frac{1700 + 2346}{450} = \frac{4046}{450} = 8.99$$

حل التمرين الثاني:

$\bar{X}_1 = 30$ $n_1 = 6$

$\bar{X}_2 = 70$ $n_2 = 4$

عدد الطلبة في الحافلات الصغيرة = 30 × 6 = 180.

عدد الطلبة في الحافلات الكبيرة = 70 × 6 = 420.

مجموع عدد الطلبة = 180 + 420 = 600 طالب.

حل التمرين الثالث:

20	30	15	10	5	التكرار
80	60	30	15	5	التكرار المتجمع الصاعد

طول الفئة = 5 × 20 = 100

الحد الأعلى للفئة الثالثة = 10 × 30 = 300

الحد الأدنى للفئة الثالثة = الحد الأعلى لها – طول الفئة = 300 – 100 = 200.

إعادة تكوين الجدول:

$N_i X_i$	X_i	التكرار n_i	الفئة
250	50	5	]100 – 0]
1500	150	10	]200 – 100]
3750	250	15	]300 – 200]
7500	250	30	]400 – 300]
9000	450	20	]500 – 400]
22000		**80**	المجموع

المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i} = \frac{22000}{80} = 275$$

التمرين الرابع:

1- نوع المتغير الإحصائي (قياس الأحذية) كمي مستمر.

2- إيجاد αوβ:

$\alpha+\beta = 380 - (20+25+40+30+55+20+65+55)$

$= 380-300 = 90$

$\alpha+\beta = 90$

$2\beta + \beta = 90$

$\beta = 90/3 = 30$

$\alpha = 90 \times 2 = 60$

α = عدد الموظفين من الفرع 7.

β = يمثل عدد الموظفين من الفرع 8.

3- لا يمكن حساب المنوال من المدرج التكراري في هذا التمرين لأن البيانات ليست مبوبة في جدول توزيع تكراري.

4- المنوال = 60 والمتواجد في الفرع الدي يحتوي عل أكبر عدد للموظفين.

حل التمرين الخامس:

يمكن ايجاد متوسط سعر السهم بطريقتين:

الطريقة الأولى:

متوسط سعر السهم باستعمال المتوسط المتوافق

$$H = \frac{\sum n_i}{\sum \frac{n_i}{X_i}} = \frac{300000 + 300000}{\frac{300000}{8} + \frac{300000}{6}} = \frac{600000}{37500 + 50000} = \frac{600000}{87500}$$

$$H = 6.85$$

الطريقة الثانية:

متوسط السعر باستعمال المتوسط الحسابي المرجح:

عدد الأسهم المشتراة في المرة الأولى= $\frac{300000}{8} = 37500$ سهم

عدد الأسهم المشتراة في المرة الثانية = $\frac{300000}{6} = 50000$ سهم

ومنه المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{(37500 \times 8) + (50000 \times 6)}{37500 + 50000} = \frac{600000}{87500}$$

$$\bar{X} = 6.85$$

التمرين السادس:

1-الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i}{n} = \frac{3 + 5 + 6 + 9 + 3 + 7 + 8}{7} = \frac{41}{7} = 5.85$$

2-المنوال هو العلامة الأكثر تكرارا وهو العلامة :3

الوسيط= $\frac{n+1}{2} = \frac{8}{2}4 =$

نرتب العلامات تصاعديا: 3، 3، 5، 6، 7، 8، 9. ومنه فإن الوسيط هو العلامة :6

التمرين السابع:

حساب الوسط الحسابي المرجح:

$$\bar{X} = \frac{n_1X_1 + n_2X_2 + n_3X_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

$$= \frac{(50 \times 32000) + (120 \times 38000) + (100 \times 35000)}{50 + 120 + 100}$$

$$= \frac{1600000 + 4560000 + 3500000}{270} = \frac{9660000}{270}$$

متوسط أجر عمال الشركة هو:

$$\bar{X} = 35777.77$$

حل التمرين الثامن:

حساب الربيع الأول:

نرتب القيم ترتيبا تصاعديا:1، 2، 3، 4، 5،6، 8

نحدد الرتبة: $Q_1 = \frac{n+1}{4} = \frac{7+1}{4} = 2$

بما أن الرتبة عدد طبيعي فهناك قيمة واحدة هي:$Q_1 = 2$

حساب الربيع الثاني:

نحدد الرتبة: $Q_2 = \frac{2(n+1)}{4} = \frac{2(7+1)}{4} =$

ومنه : $Q_2 = 6$

حساب الربيع الثالث:

نرتب القيم ترتيب تصاعديا: 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 11، 13، 15، 17،

نحدد الرتبة: $Q_3 = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(11+1)}{4} = 9 =$

ومنه : $Q_3 = 9$

تمهيد:

تمثل مقاييس التشتت الجانب الآخر من المقاييس الإحصائية الأساسية بجانب مقاييس النزعة، حيث تستخدم تلك المقاييس في وصف البيانات والتعرف على خصائصها. كما تعمل مقاييس التشتت كجزئية مكملة ومهمة جدا بجانب مقاييس النزعة المركزية في عمليات الاستدلال الإحصائي المبنية على عملية التعامل مع البيانات. وينصب الاهتمام عند التعامل مع مقاييس التشتت حول درجة الاختلاف بين القيم المختلفة للمتغير الكمي المدروس، ويتم ذلك من خلال عدة مقاييس مختلفة يهتم كل واحد منها بقياس درجة الاختلاف بين القيم المختلفة للمتغير الكمي المدروس، ويتم ذلك من خلال عدة مقاييس مختلفة يهتم كل واحد منها بقياس درجة الاختلاف من زاوية مختلفة.

1- مقاييس التشتت المطلق

يتم الحصول على مقياس التشتت بنفس وحدة القياس للظاهرة تحت الدراسة. هناك عدة مقاييس إحصائية لقياس التشتت المطلق، فيما بينها من حيث الدقة والسهولة، ومن أهمها نجد المدى العام، المدى الربيعي، نصف المدى الربيعي، الانحراف المتوسط، التباين، الانحراف المعياري.[1]

1-1 المدى العام:

يعرف بأنه الفرق بين أكبر و أصغر قيمة لمتغير معين، ويعتبر المدى من أبسط مقاييس التشتت. ومع ذلك فإن المدى يأخذ في الاعتبار فقط القيمتين المتطرفتين في المجموعة، ولا يمدنا بمقياس التشتت القيم الأخرى فيما عدا أنها تقع بين هاتين القيمتين المتطرفتين.[2]

أ- المدى في حالة البيانات الغير المبوبة: يحسب المدى بتطبيق المعادلة التالية:

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة $\qquad R = X_{max} - X_{min}$

مثال: أحسب المدى لمجموعة الأعداد التالية:

المجموعة الأولى: 12، 5، 6، 3، 15، 9، 18، 4.

[1] مصطفى عبد المنعم الخواجة، مرجع سابق، ص 119.

[2] معين أمين السيد، مرجع سابق، ص 98.

المجموعة الثانية: 8، 3، 7، 6، 9، 8، 9، 18.

الحل:

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

المدى بالنسبة للمجموعة الأولى = 18 – 3 = 15

المدى بالنسبة للمجموعة الثانية = 18 – 3 = 15

رغم أن المدى واحد في الحالتين فإن هناك تشتتا أكبر في المجموعة الأولى عنها في المجموعة الثانية.

ب- المدى في حالة البيانات الغير مبوبة: له أكثر من صيغة، ومنها المعادلة التالية:

المدى = (الحد الأعلى للفئة الأخيرة) – (الحد الأدنى للفئة الأولى)

مثال: الجدول التكراري التالي يبين توزيع 50 مزرعة حسب المساحة المزروعة بالقمح بالألف هكتار.

المساحة	[15-20]	[21-26]	[27-32]	[33-83]	[39-44]	[45-50]
عدد المزارع	3	7	10	15	12	**3**

المطلوب:حساب المدى للمساحة المزروعة بالقمح؟

الحل:

المدى = (الحد الأعلى للفئة الأخيرة) – (الحد الأدنى للفئة الأولى)

المدى= 50 – 15 = 35 هكتار

$R = 50 - 15 = 35$

1-2 المدى الربيعي:

هو الفرق بين الربيع الثالث والأول أي: $IQ = Q_3 - Q_1$

ملاحظة: نلاحظ أن المدى الربيعي قد ابتعد عن القيم المتطرفة فهو أحسن من المدى، ولكن بقي يستعمل قيمتين فقط ويهمل باقي البيانات فهو لا يعكس حقيقة التشتت.

خصائص المدى الربيعي:

يتميز المدى الربيعي بالخصائص التالية:[1]

1- يضم 50% من المجتمع مهما كان التوزيع الإحصائي.

2- يتغير طوله مقارنة بالمدى العام حسب طبيعة التوزيع.

3- استعمالاته محدودة نظرا لبساطته، غير أنه أحسن من المدى العام.

[1] جلاطو جيلالي، مرجع سبق ذكره، ص 71.

4- يستعمل في المقارنة بين توزيعين إحصائيين أو أكثر.

مثال: السلسلة الإحصائية التالية تبين مداخيل 11 وحدة إحصائية:

700، 800، 900، 900، 1000، 1100، 1200،1100، 1300، 1300، 1400.

المطلوب: حساب المدى الربيعي؟

الحل:

-تحديد قيمة Q_1 ، ولحساب هذه القيمة نحدد مرتبتها، نلاحظ أن عدد القيم فردي إذن المرتبة هي:

$$\frac{11+1}{4}=3$$

-ترتيب القيم تصاعديا، فنجد أن: $Q_1 = 900$

وبنفس الطريقة نجد أن: $Q_3 = 1300$

ومنه: $IQ = Q_3 - Q_1$

$= 1300 - 900 = 400$

1-3 نصف المدى الربيعي:

ويطلق عليه الانحراف الربيعي، وهو يستخدم لمعالجة عيب المدى من تصادف وجود قيم شاذة طرفية للحد الأدنى والأعلى لقيم الظاهرة، ويعطى بالصيغة التالية:

$$\frac{IQ}{2}=\frac{Q3-Q1}{2}$$

مثال: بأخذ قيم المثال السابق:

$$\frac{IQ}{2}=\frac{1300-900}{2}=200$$

أما إذا أردنا أن نقلل من أثر القيم المتطرفة فإننا نقوم باستبعادها ويمكن أن يتم ذلك باستخدام الطرق التالية:

- المدى الربيعي = الربيع الثالث – الربيع الأول.
- المدى العشري= العشر التاسع – العشر الأول.
- المدى المئيني= المئين99 – المئين الأول.

4-1 الانحراف المتوسط:

يعرف الانحراف المتوسط بأنه البعد المتوسط لقيم المتغير الإحصائي عن قيمة مركزية.

أي هو عبارة بأنه المتوسط الحسابي للقيم المطلقة لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي، وسوف نرمز للانحراف المتوسط في دراستنا بالرمز MD.[1]

$$MD = \frac{\sum|xi-\bar{x}|}{n}$$

وهو يحسب وفقا لحالتين:

أ- حالة البيانات الغير مبوبة:

بعد حساب المتوسط الحسابي يمكن حساب الانحراف المتوسط مباشرة.

مثال: لتكن القيم التالية: 50، 70،60، 80، 90.

المطلوب: إيجاد الانحراف المتوسط؟

نحدد أولا المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{50+70+60+80+90}{5}$$

$$= 70$$

الانحراف المتوسط :

$$MD = \frac{\sum|xi-\bar{x}|}{n}$$

$$MD = \frac{|50-70|+|70-70|+|60-70|+|80-70|+|90-70|}{5}$$

$$= 12$$

ب-حالة البيانات المبوبة:

في هذه الحالة يحسب الانحراف المتوسط من خلال العلاقة:

$$MD = \frac{\sum|x_i-\bar{x}|n_i}{n_i}$$

حيث: x_i : مركز الفئات

n_i: التكرارات

مثال: يبين الجدول التكراري التالي توزيع 40 أسرة حسب الإنفاق الشهري بالألف دولار.

[18-21]	[14-17]	[10-13]	[6-9]	[2-5]	الإنفاق
8	10	13	8	1	عدد الأسرة

[1] جيلالي جلاطو، مرجع سابق، ص 73.

المطلوب: أوجد الانحراف المتوسط؟

الحل:

حدود الانفاق	عدد الأسر n_i	مركز الفئة X_i	X_in_i	$\lvert xi - x \rvert$	$\lvert xi - x \rvert n_i$
[2-5]	1	3.5	3.5	9.6	**9.6**
[6-9]	8	7.5	60	5.6	**44.8**
[10-13]	13	11.5	149.5	1.6	**20.8**
[14-17]	10	15.5	155	2.4	**24**
[18-21]	8	19.5	156	6.4	**51.2**
المجموع	**40**		**524**		150.4

حساب الوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{524}{40} = 13.1$$

إذا الانحراف المتوسط هو:

$$MD = \frac{\sum|xi-\bar{x}|n_i}{n_i} = \frac{150.4}{40} = 3.76$$

ويعتبر الانحراف المتوسط أفضل من سابقه (المدى) لأنه أقل تأثر بالقيم المتطرفة غير أنه لا يستعمل بشكل واسع بسبب اعتماده على القيم المطلقة لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي. وهو يتميز بالخواص التالية:

- يعتمد في حسابه على جميع القيم وليس على القيمة الكبرى والصغرى فقط.
- لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.
- يتأثر بالقيم المتطرفة، لأن انحرافها عن المتوسط الحسابي يكون كبيرا.

5-1 التباين:

هو عبارة عن المتوسط الحسابي لمربعات الفروق بين قيم المتغير الإحصائي ومتوسطها الحسابي، ويستخدم مربعات الفروق هنا تفاديا لاستخدام القيم المطلقة كما هو الشأن في الانحراف المتوسط.[1]

يرمز للتباين بالرمز V(x) .

[1] مصطفى يوسف كافي و آخرون، الإحصاء في الادارة والاقتصاد، مكتبة المجتمع العربي، الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص 127.

ويحسب حسب أنواع البيانات إن كانت مبوبة أو غير مبوبة وذلك كالتالي:

أ- حساب التباين في حالة البيانات الغير مبوبة:

يحسب من خلال العلاقة التالية:

$$V(x) = \frac{\sum|xi - \bar{x}|^2}{n}$$

مثال:لتكن القيم التالية:

50، 60، 70، 80، 90.

المطلوب: إيجاد التباين؟

الحل:

نحدد أولا المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{50+60+70+80+90}{5} = 70$$

حساب التباين:

$$V(x) = \frac{\sum|xi-\bar{x}|^2}{n} = \frac{|50-70|^2+|60-70|^2+|70-70|^2+|80-70|^2+|90-70|^2}{5} = \frac{1000}{5}$$

$V(x) = 200$

ب-حساب التباين في حالة البيانات المبوبة:

في هذه الحالة يحسب التباين من خلال العلاقة التالية:

$$V(x) = \frac{\sum n_i|xi - \bar{x}|^2}{n_i}$$

مثال: لتكن لدينا المعطيات التالية:

x_i	1	2	3
n_i	7	5	8

المطلوب: إيجاد التباين؟

الحل:

x_i	n_i	n_ix_i	$\lvert Xi-\bar{X}\rvert$	$ni\lvert X_i-\bar{X}\rvert$	$\lvert Xi-\bar{X}\rvert^2$	$ni\lvert Xi-\bar{X}\rvert^2$
1	7	7	1.85	12.95	3.42	**23.94**
2	5	10	0.85	4.25	0.493	**2.465**
3	8	40	2.15	17.2	4.622	**36.98**
	20	**57**		**34.4**		63.385

نحسب المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i n_i}{\sum n_i} = \frac{57}{20} = 2.85$$

$$V(x) = \frac{\sum n_i |xi - \bar{x}|^2}{n_i} = \frac{63.385}{20} = 3.169$$

6-1 الانحراف المعياري:

من أهم مقاييس التشتت الانحراف المعياري ويرمز له بالرمز سيقما σ ويعرف بأنه الجذر التربيعي للتباين ويحسب بالطريقة التي يتم حساب التباين بها.

ويحسب الانحراف المعياري وفق حالتين:

أ- حالة البيانات الغير مبوبة: يحسب الانحراف المعياري بتجذير التباين.

$$\sigma = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

مثال:لتكن القيم التالية:

50، 60، 70، 80، 90.

المطلوب:احسب الانحراف المعياري؟

الحل:

إيجاد التباين: v(x)= 200

$$\sigma = \sqrt{v(x)}$$
$$= \sqrt{200}$$
$$= 14.14$$

ب-حالة البيانات المبوبة: يحسب الانحراف المعياري بتجذير التباين.

$$\sigma = \sqrt{v(x)}$$
$$= \sqrt{\frac{\sum (xi - x)^2 n_i}{\sum n_i}}$$

مثال: أحسب الانحراف المعياري لمجموعة البيانات التالية:

المجموع	[25-30[	[20-25[	[15-20[	[10-15[	[5-10[	الفئات
50	5	10	15	12	8	التكرار

الحل:

الفئات	n_i	x_i	$n_i x_i$	$(X_i - \overline{X})$	$(Xi - \overline{X})^2$	$ni(Xi - \overline{X})^2$
[5-10[	8	7.5	60	-9.5	84.64	**677.12**
[10-15[	12	12.5	150	-4.5	17.64	**211.68**
[15-20[	15	17.5	262.5	0.8	0.64	**9.60**
[20-25[	10	22.5	225	5.8	33.64	**236.40**
[25-30[	5	27.5	137.5	10.8	116.64	**583.20**
المجموع	50		835			**1818**

نحسب المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i n_i}{\sum n_i} = \frac{835}{50} = 16.7$$

ومنه الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{1818}{50}} = \sqrt{\frac{\sum (xi-x)^2 n_i}{\sum n_i}} = 6.0299$$

ج- خواص الانحراف المعياري:

1- إذا كان الانحراف المعياري أقل من 15% من المتوسط الحسابي دل ذلك على قلة التشتت وان كان أكبر من 30% من المتوسط الحسابي دل ذلك على قوة التشتت لعناصر المجموعة وقلة تجانسها.

2- الانحراف المعياري هو مقياس قوة أي لا يتأثر بعدد المجموعة (أي طول المجموعة).

3- يأخذ الانحراف المعياري نفس وحدة القياس للمتغير الأصلي (كلغ، متر، لتر.....) لذلك لا يمكن استخدامها كأساس للمقارنة بين تشتت توزيعين لهما وحدات قياس مختلفة.

4- بما أن الانحراف المعياري يتأثر بالمتوسط الحسابي لبيانات الظاهرة فإنه لا يمكن استخدامه للمقارنة بين تشتت بيانات توزيعين لهما متوسط حسابي مختلف ولو كان هذين التوزيعين من نفس النوعية.

5- لا يمكن إيجاده بالنسبة للتوزيعات التكرارية المفتوحة من البداية أو النهاية.

7-1 خواص المدى:[1]

1- يعتبر المدى مقياسا بسيطا وسهلا للتشتت.

2- يعتبر المدى مقياسا لمراكز القيم لاعتماده على القيم عند مراكز معينة في التوزيع.

3- يتأثر المدى بالقيمتين المتطرفتين في المجموعة فقط مع إهمال باقي القيم.

[1] معين أمين السيد، مرجع سابق، ص 100.

4- لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

يكثر استخدامه في المراقبة الإحصائية على جودة الإنتاج.

2-معامل الاختلاف:[1]

رأينا سابقا أن الانحراف المعياري هو مقياس واقعي ومؤشر صحيح عن مقدار التشتت غير أن الخاصيتين4 و5 السابقتين تبينان أنه إذا استخدمنا هذا المقياس للمقارنة بين تشتت ظاهرتين أو أكثر فإن المقارنة تكون واقعية وواقعية فقط إذا كانت الظواهر من نوعية واحدة ولها متوسطات متساوية. أي يمكن مقارنة تشتت درجات مادة ما بدرجات مادة أخرى أو مقارنة تشتت دخل مجموعة من العمال بدخل مجموعة أخرى، وتكون المقارنة أكثر واقعية إذا كانت المتوسطات متساوية أو قريبة من بعضها.

أما إذا كانت الظواهر من صفات مختلفة أو كانت متوسطاتها متباعدة، ولهذا السبب وجدت مقاييس أخرى سميت مقاييس التشتت النسبي تعتمد على تمييز البيانات وتقيس التشتت كنسبة مئوية للمتوسط،أهم هذه المقاييس هو معامل الاختلاف.

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times 100$$

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$$

مثال: إذا كان متوسط درجات مجموعة من الطلبة في مادة الإحصاء هو 16 بانحراف معياري 4 ومتوسط درجاتهم في مادة الرياضيات هو 10 بانحراف معياري 3، فأي الدرجات بنظرك أكثر تشتتا؟

الحل:

$$Cv = \frac{4}{16} \times 100 = 25\%$$

$$Cv = \frac{3}{10} \times 100 = 30\%$$

ومنه درجات مادة الرياضيات الأكثر تشتتا.

[1] Bernard PY , opit, p 133.

تمارين مقترحة للمحور الرابع:

التمرين الأول:

الجدول التالي يبين أعمار المرضى الذين يزورون إحدى العيادات الخاصة ل 100 مريض.

الأعمار	]10-0]	]20-10]	]30-20]	]40-30]	]50-40]	]60-50]	]70-60]	]80-70]	المجموع
عدد المرضى	35	8	3	5	9	11	12	17	100

المطلوب: أحسب الانحراف المتوسط؟

التمرين الثاني:

إذا كانت علامات 30 طالب في امتحان الإحصاء للسنة أولى جدع مشترك كالتالي:

العلامة	10	12	14	16	18
التكرار	8	6	10	4	2

المطلوب:

1- أوجد متوسط علامات هؤلاء الطلبة؟

2- أحسب المدى لعلامات الطلبة؟

3- أحسب التباين؟

4- أحسب الانحراف المعياري؟

التمرين الثالث:

إذا عملت أن معامل الاختلاف لإنتاج أحد المصانع في فترة ما هو 10%، أوجد عدد أيام هذه الفترة إذا كان الانحراف المعياري للإنتاج هو 8 ومجموع إنتاج الفترة يساوي 600 وحدة؟.

التمرين الرابع:

الجدول الآتي يبين أرباح شركتين متنافستين في سوق الأعمال X، Y بملايين الدينارات.

الشركة **X**	8	20	30	65	10
الشركة **Y**	10	25	35	40	25

أي الشركتين أفضل في نظرك ولماذا؟

حل التمرين الأول:

العمر	n_i	x_i	n_ix_i	$\|X_i - \bar{X}\|$	$ni\|Xi - \bar{X}\|^2$
[0-10[	35	5	175	31.1	1088.5
[10-20[	8	15	120	21.1	168.8
[20-30[	3	25	75	11.1	33.3
[30-40[	5	35	175	1.1	5.5
[40-50[	9	45	405	8.9	80.1
[50-60[	11	55	605	18.8	207.9
[60-70[	12	65	780	28.9	346.8
[70-80[	17	75	1275	38.9	661.3
المجموع	**100**		**3610**		**2592.2**

متوسط العمر

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i} = \frac{3610}{100} = 36.1$$

الانحراف المتوسط:

$$E_x = \frac{\sum n_i |X_i - \bar{X}|}{\sum n_i} = \frac{2592.2}{100} = 25.92$$

أي أن متوسط العمر الذي يزوره الأشخاص في العيادة هو 36.1 سنة بانحراف معياري 25.92 سنة.

حل التمرين الثاني:

العلامة x_i	التكرار n_i	n_ix_i	$\|X_i - \bar{X}\|$	$ni\|Xi - \bar{X}\|^2$
10	12	120	3.1	37.5
12	8	96	1.1	8.8
14	6	140	0.9	9
16	10	96	2.9	5.8
18	4	72	4.9	19.6
المجموع	**40**	**524**		**80.4**

1- متوسط علامات الطلبة هي:

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i} = \frac{524}{40} = 13.1$$

2- حساب المدى:

$$R = X_{max} - X_{min} = 18 - 10 = 8$$

3- التباين:

$$V(x) = \frac{\sum \boldsymbol{n_i}|\boldsymbol{X_i} - \boldsymbol{\bar{X}}|}{\sum n_i} = \frac{80.4}{40} = 13.1$$

4- الانحراف المعياري:

$$=\sqrt{13.1} = 3.61\delta(x) = \sqrt{V(x)}$$

حل التمرين الثالث:

عدد أيام الفترة:

$$cv = \frac{\delta(x)}{\bar{X}} = \frac{8}{\frac{600}{n}} = 0.10$$

n = 5

ومنه عدد أيام الفترة هو 5 أيام .

حل التمرين الرابع:

X_i	X_i^2	Y_i	Y_i^2
8	64	10	100
20	400	25	625
30	900	35	1225
67	4489	40	1600
10	100	25	625
135	**5953**	**135**	**4175**

متوسط أرباح الشركة X:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i} = \frac{135}{5} = 27$$

متوسط أرباح الشركة Y:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{\sum n_i} = \frac{135}{5} = 27$$

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum {X_i}^2}{n_i} - \bar{X}^2} = \sqrt{\frac{5953}{5} - 27} = 34.11$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y_i{}^2}{n_i} - \text{y}^2} = \sqrt{\frac{4175}{5} - 27} = 28.42$$

على الرغم من أن متوسط أرباح الشركتين متساوي خلال الفترة إلا أن أرباح الشركة (Y) أقل تشتتا (أكثر استقرار) من أرباح الشركة (X) وهذا ما يجعل الشركة (Y) أفضل بالنسبة للمستثمرين.

تمهيد:

إذا كانت مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت تسمح بتلخيص بيانات أي ظاهرة في صورة أرقام بسيطة تعطي فكرة عن خصائص توزيع هده البيانات ودرجة تجانسها أو اختلافها فإن هذا الوصف الذي تعطيه يبقى تنقصه الدقة الكافية المطلوبة للتعرف على خواص التوزيع خاصة من حيث انتشار البيانات على المنحنى البياني الممثل لها من حيث التوائه أو تفلطحه عن الوضع الطبيعي، لذا دعت الحاجة لاستخدام مقاييس أخرى لتحقيق هذا الغرض سميت بمقاييس الشكل.

1- العزوم: Moments

العزوم قد تكون حول نقطة الأصل أو حول المتوسط الحسابي أو حول أي نقطة معينة، فالعزم الأول حول نقطة الأصل مثلا هو متوسط قيم الظاهرة والعزم حول المتوسط الحسابي هو متوسط انحرافات قيم التوزيع عن المتوسط الحسابي لها. أما رتبة العزم فتحدد بدرجة القوة (الأس) التي ترفع إليها القيم أو انحرافاتها عن المتوسط الحسابي. وتستخدم العزوم في إيجاد المعامل العزمي للالتواء وكذلك معامل التفلطح.

ويمكن قياس العزوم حول الصفر وتسمى بالعزوم الصفرية أو حول المتوسط الحسابي وتسمى في هذه الحالة بالعزوم المركزية أو يتم قياس العزوم حول أي نقطة ثابتة.

1-1 العزوم حول نقطة الصفر (العزوم البسيطة): les moments non centrés

إذا كانت لدينا ظاهرة معينة X، نأخذ القيم: $X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots X_n$ فإن:

العزم الأول البسيط يمكن الحصول عليه من العلاقة: $m_1 = \frac{\sum X_i}{}$

العزم الثاني: $m_2 = \frac{\sum X_i^2}{\text{n}}$

العزم الثالث: $m_3 = \frac{\sum X_i^3}{\text{n}}$

.

.

.

العزم الكائي: $m_k = \frac{\sum X_i^k}{k}$. (العزم البسيط من الرتبة kهو عبارة عن الوسط الحسابي لقيم المتغير الإحصائي مرفوعة إلى القوة k)[1]

مثال:

إذا كانت لدينا القيم 2، 4، 5، 9. أوجد العزم الأول والثاني والرابع حول نقطة الصفر؟

الحل:

- العزم الأول: $m_1 = \frac{\sum X_i}{\text{k}} = \frac{9+5+4+2}{4} = \frac{20}{4} = 5$
- العزم الثاني: $m_2 = \frac{\sum X_i^2}{k} = \frac{81+25+16+4}{4} = \frac{126.5}{4} = 31.5$
- العزم الثالث: $m_3 = \frac{\sum X_i^3}{k} = \frac{729+125+64+8}{4} = \frac{926}{4} = 231.5$
- العزم الرابع: $m_4 = \frac{\sum X_i^4}{k} = \frac{6581+625+256+16}{4} = \frac{7458}{4} = 1864.5$

نلاحظ أن: العزم الأول = المتوسط الحسابي، والتباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول، ومنه فإن التباين في المثال السابق = 23.5 – 16 = 7.5 أي:

$$V_X^2 = m_2 - m_1^2$$

- أما إذا كانت البيانات مبوبة في شكل توزيع تكراري يكون العزم الكائي حول الصفر كما يلي:

$m_k = \frac{\sum n_i X_i^k}{\sum n_i}$،حيث تشير x إلى القيم الظاهرة أو مراكز الفئات، أما فتشير إلى عدد مرات تكرار فئاتها. ومنه يمكن حسابها من الرتبة 1 إلى kكما يلي:

العزم الأول: $m_1 = \frac{\sum n_i \text{X}_i}{\sum n_i}$

العزم الثاني: $m_2 = \frac{\sum n_i \text{X}_i^2}{\sum n_i}$

العزم الثالث: $m_3 = \frac{\sum n_i \text{X}_i^3}{\sum n_i}$

.

[1]جيلالي جلاطو، مرجع سابق، ص 77.

.

.

العزم الكائي: $m_k = \frac{\sum n_i X_i^k}{\sum n_i}$

حيث: $\sum n_i$ =مجموع التكرارات.

X_i=القيم أو مراكز الفئات

مثال: أوجد العزم الأول والثاني والثالث للبيانات المبوبة في جدول التوزيع التالي، ثم أوجد التباين والانحراف المعياري؟

الفئة	[1–3[	[3–5[	[5–7[	[7–9[	[9–11[	المجموع
التكرار	2	3	4	5	6	**20**

الحل:

الفئة	التكرار (n_i)	مركز الفئة (x_i)	n_ix_i	$n_ix_i^2$	$n_ix_i^3$
[1–3[	2	2	4	8	16
[3–5[	3	4	12	48	192
[5–7[	4	6	24	144	864
[7–9[	5	8	40	320	2560
[9–11[	6	10	60	600	6000
المجموع	**20**		**140**	**1120**	**9632**

$$\text{العزم الأول} = \bar{X} = 7 = \frac{140}{20} = \frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i} = m_1$$

$$\text{العزم الثاني} = 56 = \frac{1120}{20} = \frac{\sum n_i X_i^2}{\sum n_i} = m_2$$

$$\text{العزم الثالث} = 481.6 = \frac{9632}{20} = \frac{\sum n_i X_i^3}{\sum n_i} = m_3$$

التباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول

= 56 – 49 = 7.

ومنه الانحراف المعياري:

$\sigma_x = \sqrt{v_x} = \sqrt{7}$= 0.83

2-1 العزوم المركزية les moments centrés:

بالحصول على انحرافات قيم الظاهرة xعن الوسط الحسابي يمكن الحصول على العزوم المركزية حول الوسط الحسابي ذو الرتبة kفي حالة بيانات غير مبوبة من العلاقة التالية:

$$\mu_k = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^k}{n}$$

حيث نرمز للعزم المركزي حول المتوسط الحسابي بالرمز μ.

العزم الأول حول المتوسط الحسابي:

$$\mu_1 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})}{n}$$

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي:

$$\mu_2 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n}$$

العزم الثالث حول المتوسط الحسابي:

$$\mu_3 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^3}{n}$$

.

.

.

العزم الكائي حول المتوسط الحسابي:

$$\mu_k = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^k}{n}$$

مثال: أوجد العزم الأول والثاني والثالث حول المتوسط الحسابي للقيم التالية 2، 4، 9؟

الحل: $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{\sum} = \frac{2+4+9}{3} = 5$

x_i	$(X_i - \bar{X})$	$(Xi - \bar{X})^2$	$(Xi - \bar{X})^3$
2	3-	9	-27
4	0	0	0
8	3	9	27
المجموع	0	16	0

$$\mu_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})}{n} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{16}{3} = 5.33$$

$$\mu_3 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^3}{n} = \frac{0}{3} = 0$$

ويلاحظ من خلال هذه النتائج أن:

- العزم الأول حول المتوسط الحسابي يساوي صفر دائما.

- العزم الثاني جول المتوسط الحسابي يساوي التباين.

أما اذا كانت البيانات متكررة أو مبوبة في جداول توزيع تكراري فإن العزوم حول المتوسط الحسابي يمكن حسابها على النحو التالي: $\mu_k = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^{nk}}{\sum n_i}$ حيث:[1]

العزم الأول المركزي: $\mu_1 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})}{\sum n_i}$

العزم الثاني المركزي: $\mu_2 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^2}{\sum n_i}$

العزم الثالث المركزي: $\mu_3 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^3}{\sum n_i}$

.

[1] Jean-Louis Monino, jean Michel kosianski, François le cornu, é& « statistique descriptive 3 Edition, DUNOD, paris. 2000. P38.

..

العزم الكائي المركزي: $\mu_k = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^{nk}}{\sum n_i}$

مثال: أوجد العزم الأول والثاني حول المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة في الجدول التالي:

الفئة	]2–0]	]4–2]	]6–4]	]8–6]	المجموع
التكرار	1	2	3	6	**12**

الحل:

الفئة	n_i	x_i	nx_i	$(x_i-\overline{x})$	$n_i(x_i-\overline{x})$	$n_i(x_i-\overline{x})^2$
]2–0]	1	1	1	4-	4-	16
]4–2]	2	3	6	2-	4-	4
]6–4]	3	5	15	0	0	0
]8–6]	4	7	28	2	8	16
المجموع	**10**		**50**		**0**	**36**

العزم الأول حول المتوسط الحسابي $=0$ $\mu_1 = \frac{\sum ni(x_i - \overline{x})}{\sum n_i} = \frac{0}{4} = 0$

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي $=9$ $\mu_2 = \frac{\sum ni(x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i} = \frac{36}{4} = 9$

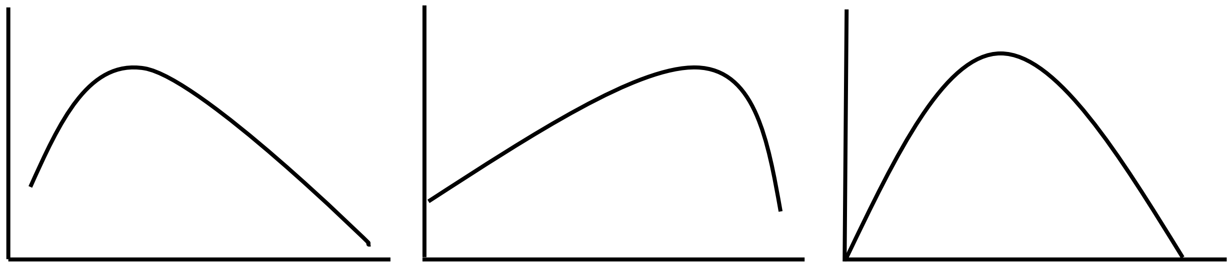
2 تحديد شكل التوزيع

يحدد شكل التوزيع التكراري بالنسبة للقيم المركزية (الوسط الحسابي أو الوسيط)، ويمكن تحديد شكل التوزيع باستخدام مقاييس الالتواء والتفلطح.

1-2 الالتواء asymétrie

عدم التناظر من اليمين أو من اليسار مقارنة بتوزيع متناظر بالنسبة للقيمة المركزية، ويعتبر منحنى التوزيع التكراري المتعدل هاما جدا في الدراسات والتحليلات الإحصائية. إن هذا المنحنى الذي تتساوى عنده مقاييس النزعة المركزية الثلاث ($\overline{X}$= Me=Mo)نظري ونادر الوقوع، فالمنحنيات التي نحصل عليها عادة تكون ملتوية ناحية اليمين أو ناحية اليسار أو قريبة من الاعتدال.

فقد عرفنا عند دراستنا لمقاييس النزعة المركزية أن التوزيعات الإحصائية يمكن أن تأخذ أحد الأشكال التالية حسب العلاقة بين المقاييس الثلاث:[1]



التواء ناحية اليسار $\bar{X} < Me < M_0$ — التواء ناحية اليمين $\bar{X} > Me > M_0$ — توزيع متناظر $\bar{X} = Me = M_0$

سنحاول معرفة درجة تناظر (تماثل) توزيع البيانات حول المتوسط الحسابي باستخدام العزوم والانحراف المعياري.

من الطبيعي أن يكون هناك أساس يمكن استخدامه لقياس درجة الالتواء يعتمد على التوزيع المعتدل. والذي يكون له توزيع متماثل معامل التواءه يساوي الصفر. وعلى ذلك فإن المقارنة تكون على أساس أن التوزيع يكون متماثلا إذا كان معامل الالتواء يساوي الصفر. وذلك إذا كان ذيل التوزيع الأيمن يساوي ذيل التوزيع الأيسر كالناقوس. ويكون التوزيع ملتويا إلتواءا موجبا إذا كان معامل الالتواء موجب وذلك عندما يكون ذيل التوزيع الأيمن أطول من ذيله جهة اليسار.[2]

أ– معامل فيشر للالتواء coefficient de ficher

يعتمد هذا المعامل على قيمة العزم الثالث المركزي، الذي نقسمه على الانحراف المعياري من نفس المرتبة ونرمز له بالرمز γ وصيغته هي:

$$\gamma_i = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

حيث: σ_x يمثل الانحراف المعياري للظاهرة . x و $\sigma_x^3 = \sqrt{\mu_2^3}$

[1] Bernard py, opit, p 138.

[2] مصطفى عبد المنعم الخواجة، مرجع سابق، ص 159.

ويكون لدينا ثلاث حالات هي:

- توزيع إحصائي متناظر: $\gamma_1 = 0$

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليمين: $\gamma_1 > 0$

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليسار: $\gamma_1 < 0$

ب- معامل بيرسون للالتواء Coefficient de Pearson

$$P_1 = \frac{(\mu_3)^2}{(\mu_2)^3}$$

وتكون لدينا ثلاث حالات كذلك:

- توزيع إحصائي متناظر: $P_1 = 0$

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليمين: $P_1 > 0$

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليسار: $P_1 < 0$

ج- معامل يول وكندال للالتواء coefficient de yule et kendall[1]

ويستعمل هذا المعامل بالنسبة للجداول الإحصائية المفتوحة.

$$cyk = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

أما الحالات الممكنة فهي:

- توزيع إحصائي متناظر: $cyk = 0$

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليمين: $cyk > 0$

[1] عبد الناصر موسى، مرجع سابق، ص 105.

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليسار: $cyk < 0$

2-2 التفلطح aplatissment (تطاول أو تفلطح المنحنى مقارنة بالتوزيع الطبيعي)

ويقصد بالتفلطح مدى اتساع وضعف قمة منحنى التوزيع ولقد أصطلح على اعتبار منحنى التوزيع الطبيعي متوسط التفلطح.

وتوجد لذلك عدة معاملات لقياس التفلطح أهمها:

أ-معامل بيرسون للتفلطح

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{(\sigma_x)^4} = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

والحالات الممكنة هي:

- توزيع معتدل التفلطح (توزيع طبيعي) $\beta_2 = 3$

- منحنى التوزيع متطاول (مدبدب) $\beta_2 > 3$

- منحنى التوزيع متفلطح $\beta_2 < 3$

ب- معامل للتفلطح coeffcient de ficher[1]:

وهو عبارة عن معامل بيرسون مطروحا منه 3.

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3$$

والحالات الممكنة هي:

- منحنى التوزيع معتدل التفلطح: $\gamma_1 = 0$

- منحنى التوزيع معتدل التفلطح $\gamma_2 > 0$

---

[1] Jean-Louis Monino, jean Michel kosianski, François le cornu, opcit , p40.2

– منحنى التوزيع متفلطح $\gamma_2 < 0$

مثال: أدرس شكل منحنى التوزيع التكراري الآتي باستخدام معامل فيشر للالتواء ومعامل بيرسون للتفلطح؟.

x_i	1	2	3	4	المجموع
n_i	2	4	6	8	**20**

الحل:

x_i	n_i	$n_i X_i$	$(x_i - \overline{X})$	$n_i(x_i - \overline{X})$	$n_i(x_i - \overline{X})^2$	$n_i(x_i - x)^3$	$n_i(x_i - X)^3$
1	2	2	-2	-12	8	-16	32
2	4	8	-1	-4	4	-4	4
3	6	18	0	0	0	0	0
4	8	32	1	8	8	8	8
المجموع	**20**	**60**		**8**	**20**	**-12**	**44**

$$\bar{X} = \frac{\sum niX_i}{\sum n_i} = \frac{60}{20} = 3$$

العزم الأول: $\mu_1 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})}{\sum n_i} = \frac{8}{20} = 0.4$

العزم الثاني: $\mu_2 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^2}{\sum n_i} = \frac{20}{20} = 1$

$$\sigma_x = \sqrt{1} = 1$$

العزم الثالث: $\mu_3 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^3}{\sum n_i} = \frac{-12}{20} = -0.6$

العزم الرابع: $\mu_4 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^4}{\sum n_i} = \frac{44}{20} = 2.2$

ومنه معامل فيشر للالتواء $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-0.6}{(1\,)^3} = (-0.6)$

نلاحظ أن معامل فيشر للالتواء سالب، هذا يعني أن منحنى التوزيع التكراري ملتوي ناحية اليسار.

معامل بيرسون للتفلطح:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{(\mu_x)} = \frac{2.2}{1} = 2.2$$

معامل بيرسون للتفلطح أقل من 3 هذا يعني أن منحنى التوزيع يميل لتفلطح.

ج- معامل كيلي للتفلطح

هناك معامل آخر يمكن استعماله في حساب معامل التفلطح اعتمادا على الربيعيات والمئينات ويستخدم عندما يكون جدول التوزيع التكراري مفتوح من البداية أو من النهاية، ويعطي هذا المعامل بالعلاقة التالية:

$$c_k = \frac{1}{2} . \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1}$$

مثال: لتك لدينا المعلومات التالية:

الفئات	[4-2]	[6-4]	[8-6]	[10-8]	[10-فأكثر	المجموع
التكرار	2	8	10	15	25	**60**

احسب معاملات الالتواء والتفلطح؟

الحل:

الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد
[4-2]	2	2
[6-4]	8	10
[8-6]	10	20
[10-8]	15	40
[10 فأكثر	25	60
المجموع	**60**	

تمارين مقترحة للمحور الخامس:

التمرين الأول:

إذا كانت لدينا المجموعة العددية التالية: 7، 3، 2، 0، أوجد العزم الابتدائي والعزم المركزي حول الوسط الحسابي من الدرجة الثالثة؟

التمرين الثاني:

لتكن لدينا المعلومات التالية:

الفئة	[0-2]	[2-4]	[4-6]	[6-8]	المجموع
التكرار	2	4	6	4	**16**

أوجد العزم الأول والثاني حول المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة؟

التمرين الثالث:

لتكن المعلومات التالية:

x_i	1	2	3	4	المجموع
n_i	6	9	4	1	**20**

المطلوب: أدرس شكل منحنى التوزيع التكراري الأتي باستخدام معامل فيشر للالتواء ومعامل بيرسون للتفلطح؟

حل التمرين الأول:

العزم الابتدائي من الدرجة الثالثة:

$$\mu_3 = \frac{\sum Xi_i{}^3}{\mathrm{n}} = \frac{7^3+3^3+2^3+0^3}{4} = \frac{343+27+8}{4} = 94.5$$

العزم المركزي من الدرجة الثالثة:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n_i} = \frac{7+3+2+0}{4} = 3$$

$$\mu_3 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^3}{\sum n_i} = \frac{(7-3)^3+(3-7)^3+(2-7)^3+(0-7)^3}{4} = 9$$

حل التمرين الثاني:

الفئة	$\mathbf{n_i}$	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{nx_i}$	$(\mathbf{x_i}-\mathbf{X})$	$\mathbf{n_i}(\mathbf{x_i}-\overline{\boldsymbol{x}})$	$\mathbf{n_i}(\mathbf{x_i}-\overline{\boldsymbol{x}})^2$
]2–0]	1	1	2	-3.5	-7	24.5
]4–2]	2	3	12	-1.5	-6	9
]6–4]	3	5	30	0.5	3	1.5
]8–6]	4	7	28	2.5	10	25
المجموع	**10**		**27**		**0**	**60**

العزم الأول حول المتوسط الحسابي $\mu_1 = \frac{\sum ni(x_i-\overline{x})}{\sum n_i} = \frac{0}{4} = 0$=

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي $\mu_2 = \frac{\sum ni(x_i-\overline{x})^2}{\sum n_i} = \frac{60}{4} = 18$=

حل التمرين الثالث:

$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{n_i}$	$\mathbf{n_i\,X_i}$	$(\mathbf{x_i}-\overline{X})$	$\mathbf{n_i}(\mathbf{x_i}-\overline{X})$	$\mathbf{n_i}(\mathbf{x_i}-\overline{X})^2$	$\mathbf{n_i}(\mathbf{x_i}-\mathbf{x})^3$	$\mathbf{n_i}(\mathbf{x_i}-\mathbf{X})^3$
1	6	6	-1	-6	6	-6	6
2	9	18	0	0	0	0	0
3	4	12	1	4	4	4	4
4	1	4	2	2	4	8	16
المجموع	**20**	**40**		**0**	**14**	**6**	**26**

$$\bar{X} = \frac{\sum niX_i}{\sum n_i} = \frac{40}{20} = 2$$

العزم الأول: $\mu_1 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})}{\sum n_i} = \frac{0}{20} = 0$

العزم الثاني: $\mu_2 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^2}{\sum n_i} = \frac{14}{20} = 0.7$

$$\sigma_x = \sqrt{0.7} = 0.83$$

العزم الثالث: $\mu_3 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^3}{\sum n_i} = \frac{6}{20} = 0.3$

العزم الرابع: $\mu_4 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^4}{\sum n_i} = \frac{26}{20} = 1.3$

ومنه معامل فيشر للالتواء $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0.3}{(0.83\ )^3} = 0.52$

نلاحظ أن معامل فيشر للالتواء موجب، هذا يعني أن منحنى التوزيع التكراري ملتوي ناحية اليمين.

معامل بيرسون للتفلطح:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{(\mu_x)} = \frac{1.3}{(0.7\ )^2} = 2.653$$

معامل بيرسون للتفلطح أقل من 3 هذا يعني أن منحنى التوزيع يميل لتفلطح.

المراجع باللغة العربية :

1- بو عبد الله صالح، الميسر في الإحتمالات والإحصاء، جامعة المسيلة، دون ذكر سنة النشر.

2- جيلالي جلاطو، الإحصاء مع تمارين و مسائل محلولة، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الأولى، الجزائر 2011.

3- سلفادور دومينيك، ملخصات شوم، نظريات ومسائل في الإحصاء والإقتصاد القياسي، ترجمة سعيد حافظ منتصر، مصر، 1983.

4- ساعد بن فرحات، عبد الحميد قطوش، الإحصاء مدعمة التمارين وإمتحانات محلولة، السنة الجامعية 2013-2014.

5- سامية تيلوت، مبادئ الإحصاء، جامعة الجزائر، 2009.

6- سياغ أحمد رمزي، محاضرات في الإحصاء الوصفي، جامعة ورقلة، 2015.

7- شرف الدين خليل، الإحصاء الوصفي، شبكة الأبحاث و الدراسات الاقتصادية، www.RRUEE.net

8- طكوش صبرينة، محاضرات في الإحصاء الوصفي، جامعة الجزائر 3، 2014-2015.

9- علي بن محمد الجمعة، مادة الإحصاء العام، 1428، الطبعة الأولى.

10- مصطفى الخواجة، مقدمة في الإحصاء، الدار الجامعية، الاسكندرية، 2002.

11- مصطفى يوسف كافي وآخرون، الإحصاء في الإدارة والإقتصاد، مكتبة المجتمع العربي، الأردن، الطبعة الأولى، 2012.

12- معين أمين السيد، المعين في الإحصاء، دار العلوم للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، سنة النشر غير مذكورة.

13- موسى عبد الناصر، دروس في الإحصاء الوصفي، جامعة محمد خيضر بسكرة، 2006-2007.

المراجع بالفرنسية:

1-Bernard Pym, « Statistique descriptive », 4ème edition, Paris,1996.

2-Jean Loouis Monino, Jean Michel Kosianski, Francois Le Cornu, « Stattistique descriptive », 3ème edition, DUNOD,Paris, 2000.