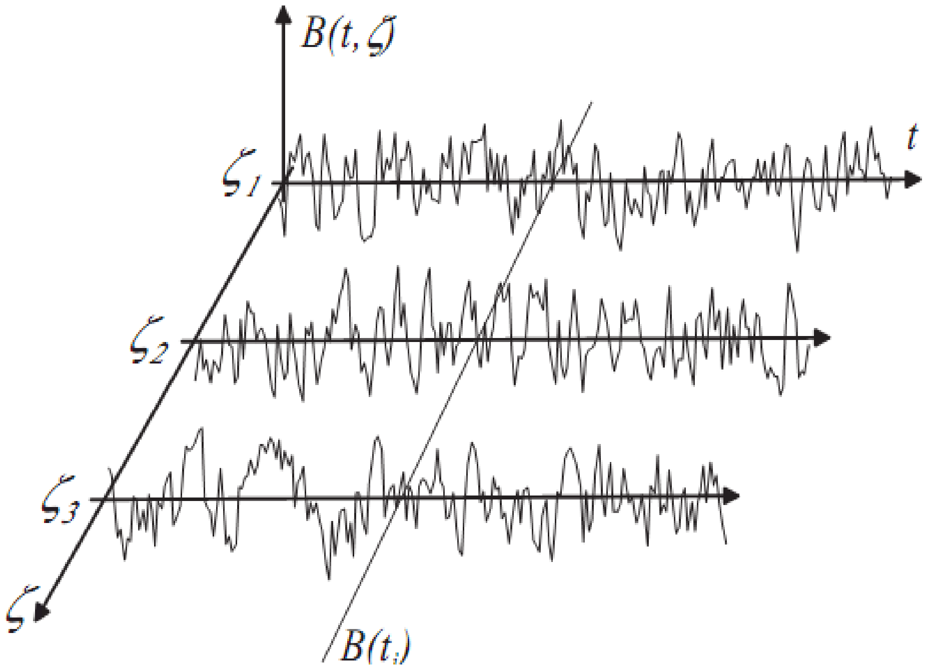
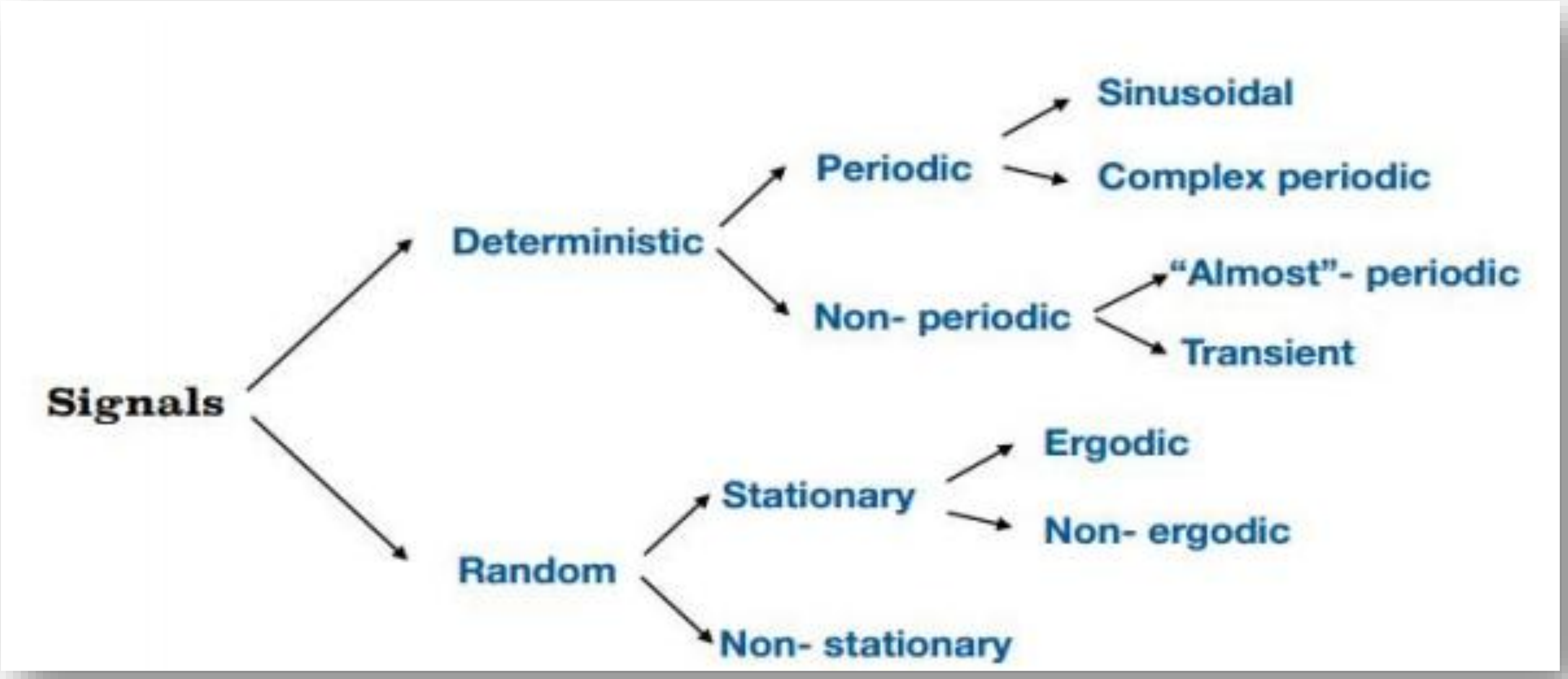


Chap5: Signaux aléatoires et processus stochastiques

1)Introduction



1)Introduction

- Un signal déterministe est modélisé par une expression analytique.
- Pb: Un signal aléatoire (ou stochastique) ne peut pas être décrit par une loi mathématique qui prédit sa valeur à chaque instant, car cette valeur n’est pas prédictible analytiquement
- Solution: il est possible d'utiliser un modèle mathématique décrit en termes de probabilités

1) Introduction

- V.a variable aléatoire
- V.a discret: loi des probabilité
- V.a. continue: définie par sa fonction de répartition Fx(X)

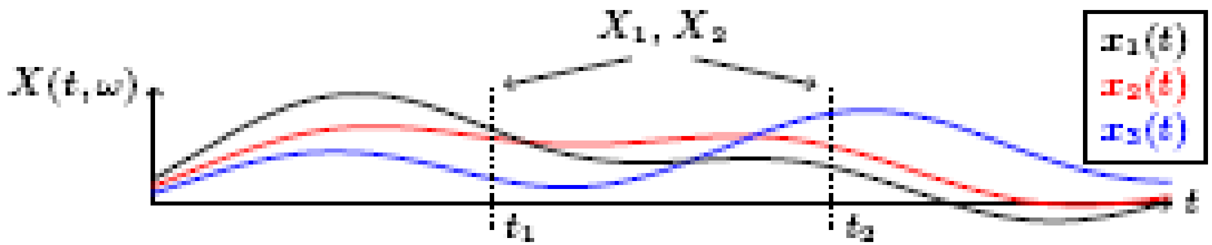
1)Introduction

- Le bruit sera modélisé par des fonctions aléatoires et traité par les lois de la théorie des probabilités, aussi bien dans le domaine temporel (distribution en amplitude) que dans le domaine spectrale (densités spectrales).
- Mathématiquement, un signal aléatoire sera considéré comme la réalisation d'un processus aléatoire (random process), et la valeur prise à un instant ti comme une variable aléatoire.

1)Introduction

- Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace)
- Il est possible de générer les signaux aléatoires à partir de variables aléatoires qui suivent une loi de probabilité

1)Introduction



Un signal aléatoire temporel est une fonction de deux variables. L’un des variables prend ses valeurs dans R ou C, l’autre étant la réalisation d’une variable aléatoire :

-t fixe (t=t0) x(w) c’est un signal aléatoire

-w fixe x(t) c’est un signal déterministe

-w et t sont variable c’est processus aléatoire

$$X(\underbrace{t}_{\text{temps}}, \underbrace{w}_{\text{v.a.}})$$

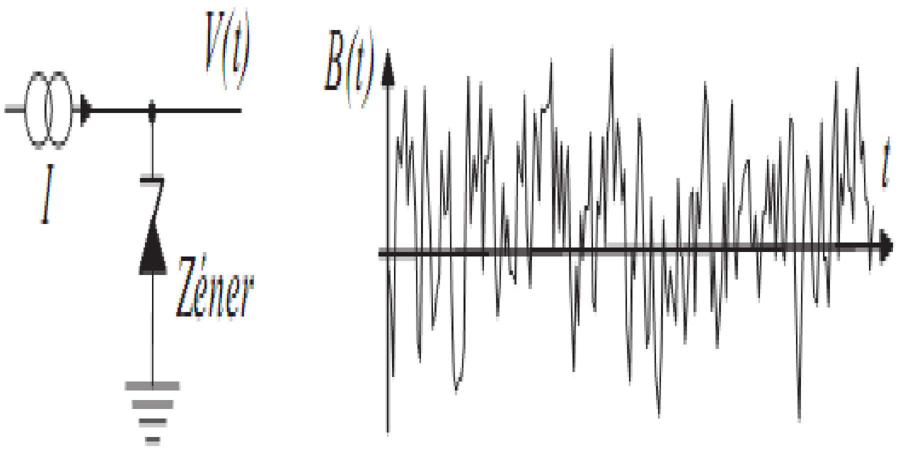
Processus stochastique=famille de fonction aléatoires x(t,u)

1)Introduction

Exemple

Un processus aléatoire $X[n,\Omega]$ (ou signal aléatoire discret) est une fonction à deux dimensions.

- le temps,
- la réalisation (notée Ω).

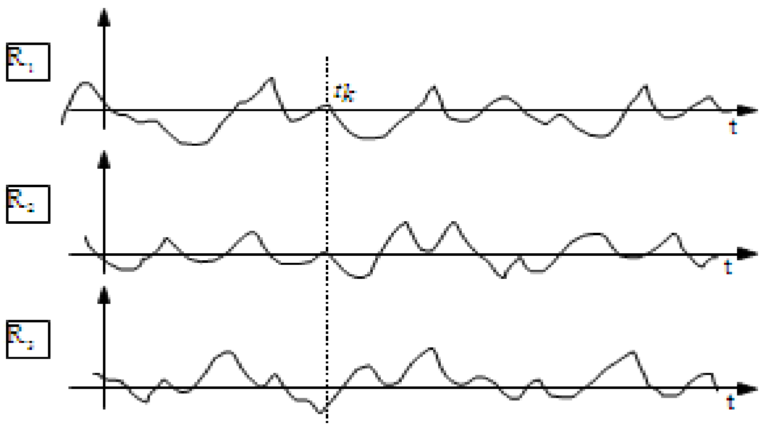


$$V(t) = V_Z + B(t)$$

B(t):le bruit

Exemple 1

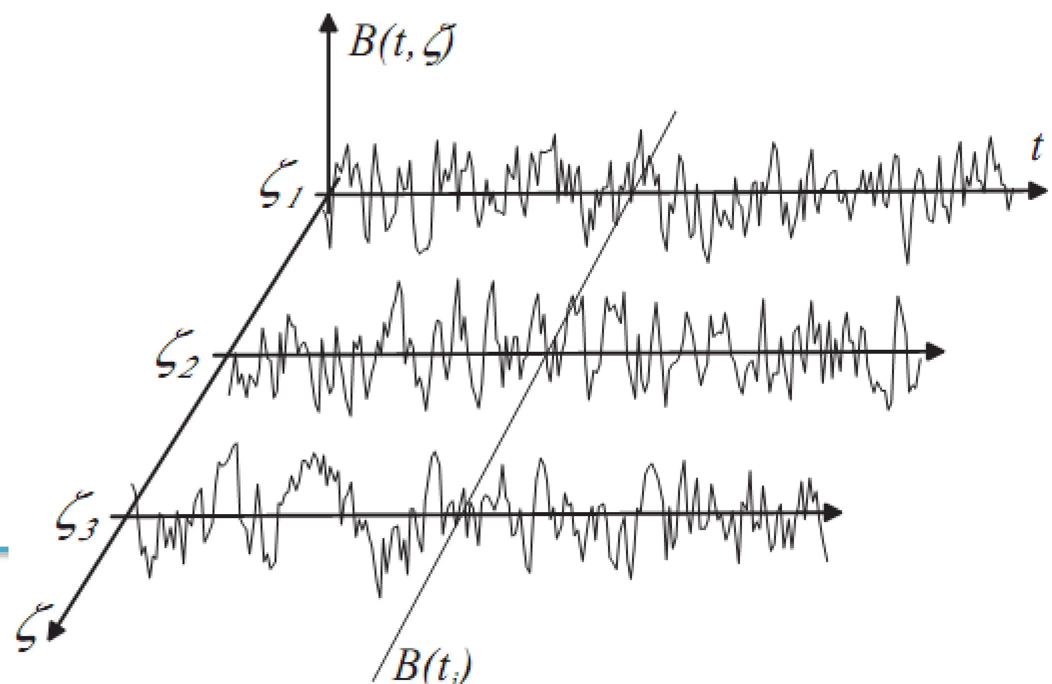
- **Bruit thermique dans un ensemble de résistances R={R$_i$, i=1,N} de même valeur ohmique**



- **t est une variable continue, R est une variable discrète**
- **X(t,R$_i$) est une représentation particulière du processus X(t,R) pour l'événement «R$_i$ a été choisie»**

1) Introduction

- Supposons que l'on effectue la même expérience sur N dispositifs similaires, on obtient N épreuves, notées B(t, ζj) du processus aléatoire B(t, ζ)



2)Notion de signal aléatoire

- A retenir : Un signal sera dit aléatoire si, lorsqu'on effectue N fois l'expérience dans les mêmes conditions, on observe N résultats différents (=N réalisations d'un même signal aléatoire).

épreuve=réalisation=échantillons

3)Les lois de probabilité usuelles

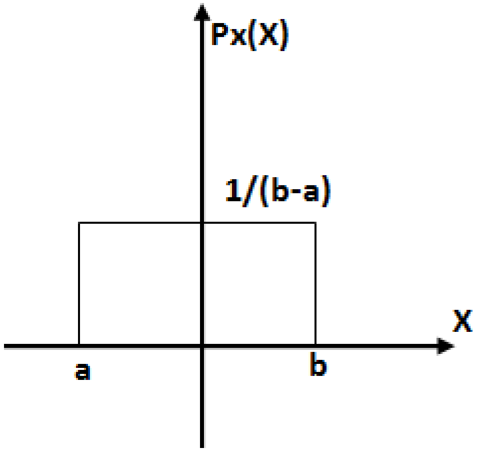
- La loi uniforme sur [a, b]

Définition. — Une variable aléatoire X à valeurs dans [a, b]($-\infty < a < b < +\infty$) est dite uniformément répartie sur [a, b] si elle est absolument continue et admet pour densité :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Cette v.a. est caractérisée par une densité de probabilité constante.

Matlab: rand

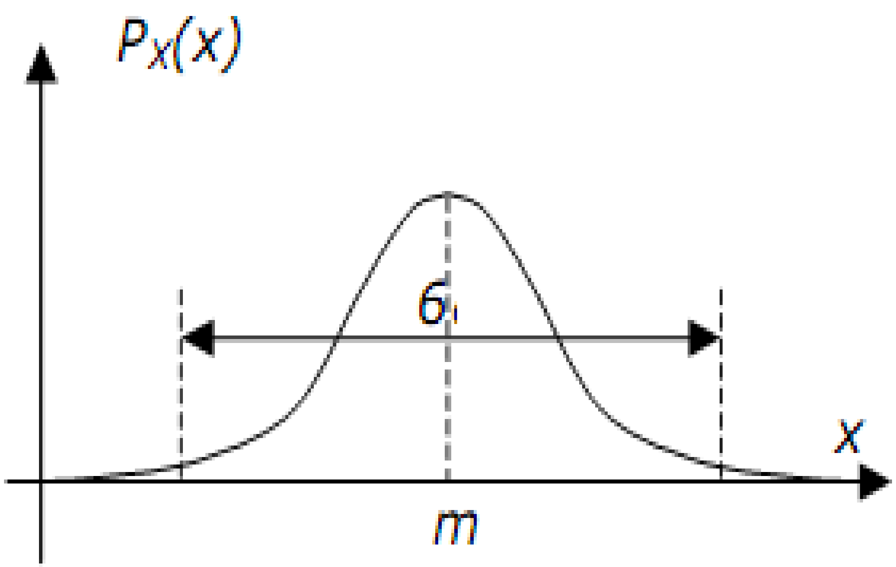


3)Les lois de probabilité usuelles

- La loi normale Guauss $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Définition. — Une variable aléatoire X à valeurs dans R est dite normale si elle est absolument continue et admet pour densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) (x \in R)$$



m : La moyenne

σ^2 : La variance

σ : L'écart type

Matlab: randn

4)Fonction de répartition et densité de probabilité

Fonction de répartition (distribution) Fx

Soit X une variable aléatoire. La loi de probabilité de X est définie par la fonction Fx , appelée fonction de répartition de la variable X, définie par :

$$\begin{aligned} F_X : \quad \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}(X \leq x). \end{aligned}$$

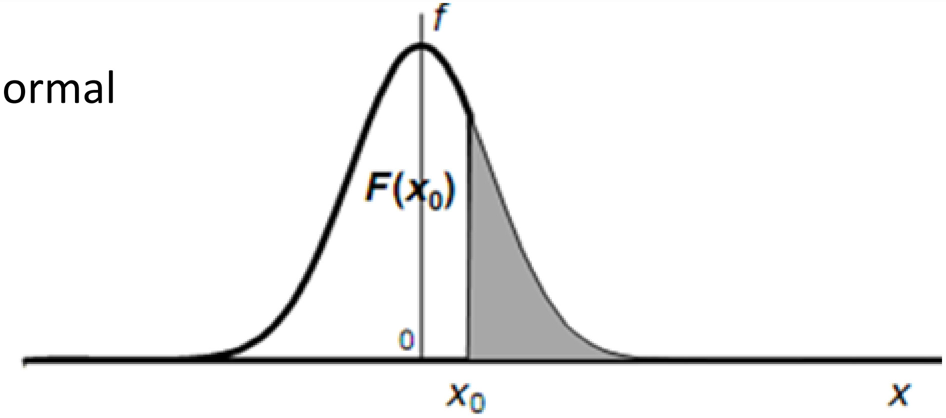
Densité de probabilité F(x)

La densité de probabilité de processus aléatoire x(t) est par définition la dérivée de la fonction de répartition par rapport à x :

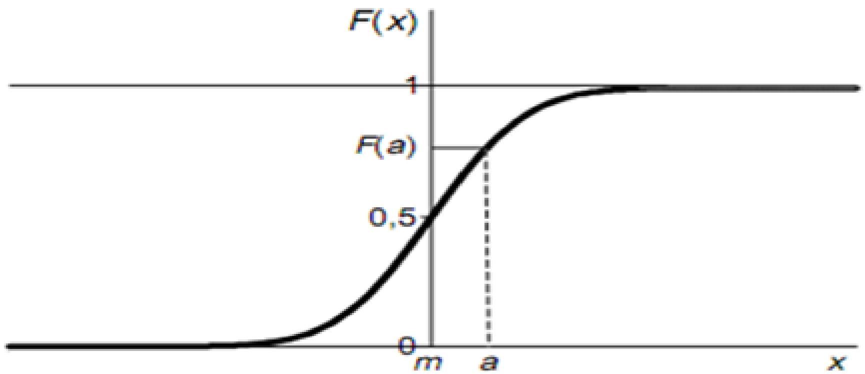
$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

4)Fonction de répartition et densité de probabilité

Exemple de la loi normal



Densité de probabilité de la loi normale



Fonction de répartition normale

5)Caractéristiques d'un processus aléatoire

Moment statistique d'ordre 1: la moyenne statistique

Esperance mathématique

$$\boxed{m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x;t)dx}$$

X: la variable aléatoire
Fx(X):la loi de probabilité

Processus aléatoire centré : mX (t) = 0

5)Caractéristiques d'un processus aléatoire

Propriétés de l'espérance E(.)

$E(X.Y)=E(X).E(Y)$

Si les deux variables sont indépendantes

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$E(aX)=aE(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$

5)Caractéristiques d'un processus aléatoire

Moment statistique d'ordre 2: Autocorrélation statistique

$$R_{xx}(\tau)) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

τ Le décalage temporel

Corrélation statistique

5)Caractéristiques d'un processus aléatoire

La variance σ_X^2

C'est un paramètre de dispersion qui correspond au moment centré d'ordre 2 de la variable aléatoire X.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- Propriétés de la variance

Proposition 1.1.3 (Propriétés de la variance)

- $\mathrm{Var}(X) \geq 0$.
- $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ *(Formule de Koenig)*.
- $\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.
- $\mathrm{Var}(X + b) = \mathrm{Var}(X)$ *pour toute constante* $b \in \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Var}(X) = 0$ *ssi* X *est constante ps (et vaut alors* $\mathbb{E}[X]$*)*.

5)Caractéristiques d'un processus aléatoire

La covariance

Soient X, Y deux variables aléatoires avec des variances finies, on définit la covariance de X et de Y par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Propriétés de cov

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY - Y\mathbb{E}[X] - X\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X]] - \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y]] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

5)Caractéristiques d'un processus aléatoire

Moment temporel d'ordre 1: la moyenne temporelle

– cas continu :

$$< x(t) >= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \omega)\ dt$$

– cas discret :

$$< x(n) >= \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=N} x(n, \omega)$$

5)Caractéristiques d'un processus aléatoire

Moment temporel d'ordre 2: la corrélation temporelle

– cas continu :

$$< x(t)x(t-\tau) >= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t,\omega)x^*(t-\tau,\omega)\ \mathrm{d}t$$

– cas discret :

$$< x(n)x(n-k) >= \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=N} x(n,\omega)x^*(n-k,\omega)$$

6)Stationnarité

La stationnarité fait référence à l'invariance temporelle d'une partie ou de la totalité des statistiques d'un processus aléatoire, comme la moyenne, l'autocorrélation et la distribution de l'ordre n.

6)Stationnarité

- ***Stationnarité au sens strict***
  - Les densités de probabilités conjointes ne dépendent pas de l'instant t_i
  - Toutes ses propriétés statistiques sont donc invariantes dans le temps

- ***Stationnarité au sens large (ou au second ordre)***
  - Un processus aléatoire est stationnaire au sens large si ses statistiques d'ordre 1 et 2
    - Moyenne, variance
    - Fonction d'auto-corrélation

    sont ***invariantes dans le temps***

6)Stationnarité

Stationnarité au sens strict (SSS):stationnarité forte

SSS: Strict Sense Stationnary

- On dit que le processus stochastique X(t) est fortement stationnaire, ou stationnaire au sens strict, si sa fonction de répartition est invariante pour tout changement d'origine (invariante par translation temporelle).

6)Stationnarité
Stationnarité au sens large (WSS)

WSS: Wide Sense Stationnary

- Un processus est dit stationnaire au second ordre, ou stationnaire au sens faible si les conditions suivantes sont satisfaites:

- la moyenne est indépendante du temps, $E[X(t)]=mx$

- la fonction d'autocorrélation ne dépend que de la différence entre les temps d'observation. (la fonction d'autocorrelation ne dépend que de la différence τ)

- RQ: si un p.a est stationnaire au sens stricte, il est automatiquement stationnaire au sens large. Par contre la réciproque n'est pas vraie.

7)Ergodicité

- Ergodicité au sens strict

__ Un processus aléatoire est ergodique au sens strict si tous ses moments statistiques sont égaux aux moments temporels

- Ergodicité au sens large (au second ordre)

__ Un processus aléatoire est ergodique au sens large si ses moments statistiques d’ordre 1 et 2 sont égaux aux moments temporels d’ordre 1 et 2

– Densité de probabilité = histogramme

Ergodicité $\Rightarrow$ Stationnarité

Stationnarité $\nRightarrow$ Ergodicité

7) Ergodicité

Exemple 1 *Le signal* $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi)$ *est :*

- *déterministe si* a, ω_0 *et* ϕ *sont des constants.*
- *aléatoire si par exemple* a, ω_0 *sont constants et* ϕ *est aléatoire.*

- *si* ϕ *est équirépartie sur l'intervalle* $[0, 2\pi]$, *le signal aléatoire est stationnaire et ergodique.*
- *si* ϕ *est équirépartie sur l'intervalle* $[0, \pi]$, *le signal aléatoire est toujours ergodique mais non stationnaire.*

Partie II: La densité spectrale de puissance (PSD)
Analyse spectrale paramétrique

1) Introduction

- **PSD :La densité spectrale de puissance PSD (Power Spectral Density)**
- **Pour étudier le contenu fréquentiel d'un signal aléatoire, on utilise la notion de la densité spectrale de puissance.**
- **La densité spectrale d'un signal représente la répartition de sa puissance sur l'axe des fréquences.**

2) Estimation de la DSP

- Il existe deux grandes approches pour l'estimation spectrale.
  - La première contient des méthodes dites classiques ou non-paramétriques: ne repose pas sur un modèle à priori du signal(périodogramme et correlogramme).
  - La seconde classe contient des méthodes dites non-classiques ou paramétriques: la tache consiste à estimer les paramètres de modèle qui décrit le processus stochastique (modèle AR, MA et ARMA).

2) Estimation de la DSP

- Problématique:
- Soit x un processus aléatoire stationnaire du second ordre

estimer $S_x(f)$ à partir d'une séquence aléatoire $\{x(n)\}$, $n=0,1, \ldots, N-1$ pour les signaux aléatoires stationnaires et ergodiques.

3)Méthodes non paramétriques:
a) Périodogramme

- Utilise directement le signal x(n)
- la transformée de Fourier du signal x(n)

$$\widehat{S}_{PER}(f) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nf}\right|^2$$

Periodogram

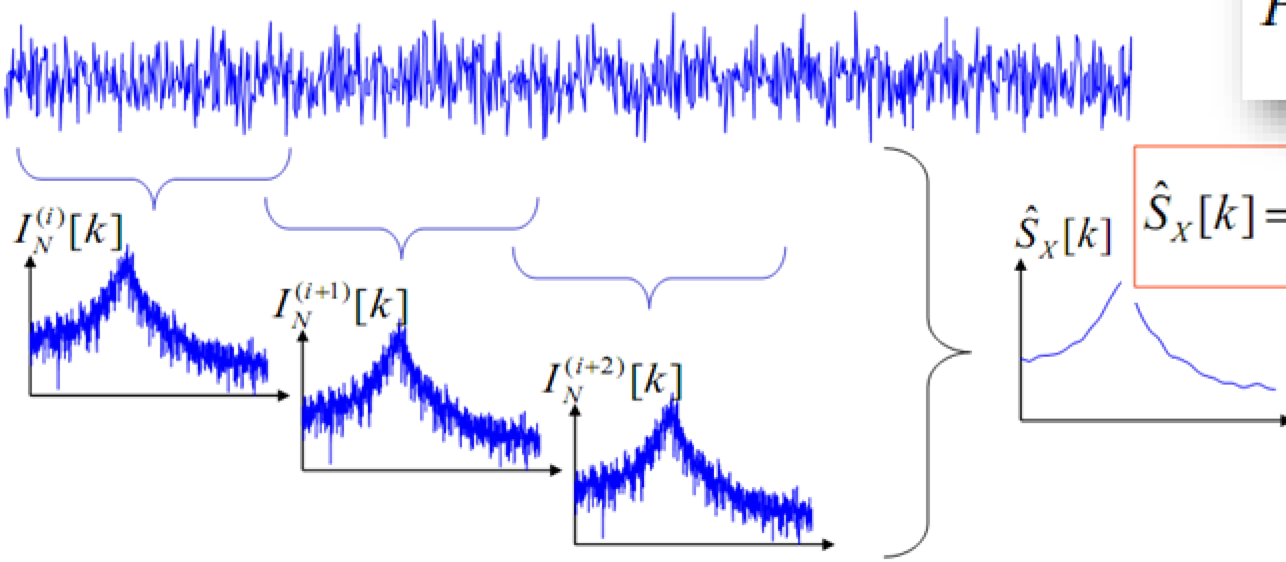
b) Méthode du périodogramme moyenné

- le signal à analyser est découpé en segments comportant N échantillons. Ces segments peuvent se recouvrir partiellement ;
- les valeurs de chaque segment sont pondérées par une fenêtre temporelle (rectangulaire, bartelett, Blackman,…;
- le module au carré de la transformée de Fourier de chaque segment pondéré est calculé ;
- enfin, la densité spectrale de puissance est estimée par la moyenne des spectres de L segments consécutifs.

c) Méthode du périodogramme moyenné: Welch

Cette technique consiste à estimer la Densité Spectrale de Puissance (DSP) du x par moyennage des L périodogrammes partiels propres à chaque segment modifié par la fenêtre de pondération ω(t).

$$P_{welch}(f) = \frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1} P_l(f)$$



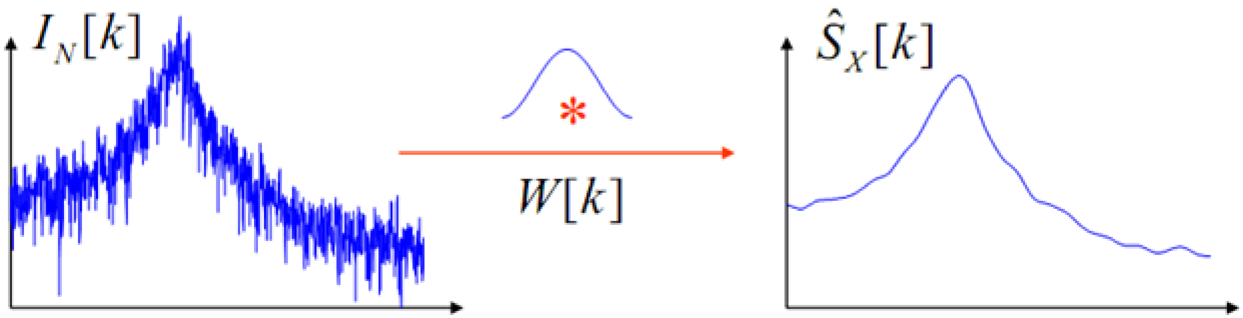
$$\hat{S}_X[k] = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} I_N^{(i)}[k], \quad k = 0, \ldots, N-1$$

- **Le moyennage permet de diminuer la variance**
- **Le biais ne change pas puisqu'il ne dépend que de N**

d) Méthode du périodogramme lissée

- Pondération de la fonction d'autocorrélation et non pas les échantillons

$$\boxed{\hat{S}_X[k] = (I_N * W)[k], \quad k = 0, \ldots, N-1}$$



4) Méthodes non paramétriques: a)Corrélogramme

Théorème de Wiener-Khintchin

PSD d'un processus stochastique stationnaire au sens large, égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

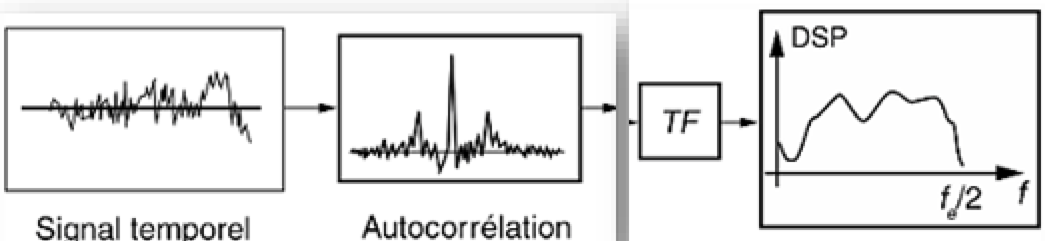
$$S_{xx}(f) = TF\left[R_{xx}(\tau)\right]$$

Signaux à temps continu

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau}.d\tau$$

Signaux à temps discret

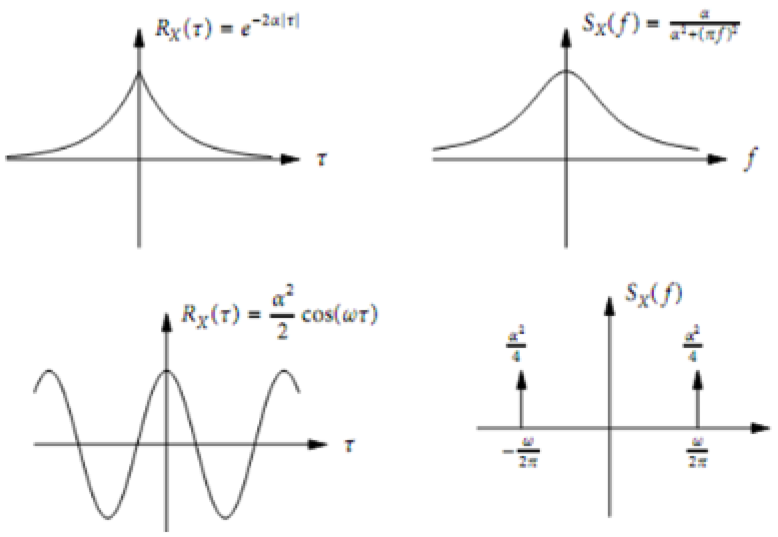
$$S_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} R_x(k) e^{-j2\pi fk}$$



5) Propriétés de la fonction PSD

- Paire S(f)=S(-f)
- Réel (non complexe)
- Non négative (>0)

Exemple



pair

>0, réel

Exemple

La fonction d'autocorrélation du processus aléatoire du télégraphe est donnée par :

$$R_X(\tau) = e^{-2\alpha|\tau|}.$$

1) Calculer la PSD par la méthode de Wienner Khintchine