III. Les filtres numériques IIR

1)Introduction

- Les FIR n’a pas d’équivalence analogique
- IIR peut être dérivé d’un filtre analogique équivalent
- L’introduction des pôles dans H(z) de IIR réduit considérablement le nbre de coeff par rapport à un filtre équivalent FIR
- Inconvénient: la stabilité des IIR doivent être vérifiées lors de sa conception

2)Définition :filtres récursif IIR

Filtres à réponse impulsionelle infinie (RII) ou IIR (Infinite Impulse Response), ces filtres sont encore appelés filtres récursifs. Dans ces filtres les coefficients aj sont différents de zéro, en conséquence un échantillon y(n) dépend de tous les échantillons x(n) présents et passés, et aussi en fonction des valeurs passées de la sortie y(n-1). La transformée H(z) de ces filtres s'écrit :

$$h(Z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i Z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{N} a_j Z^{-j}}$$

3)Equation d'un IIR

- Équation d'e/s :

$$Y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b[i]x[n-i] + \sum_{j=1}^{M} a[j]\, y[n-j]$$

x[n]	représente les valeurs successives du signal d'entrée,
aj, bi	représentent les coefficients de la fonction de transfert du filtres,
y[n]	représente les valeurs successives du signal de sortie,
N, M	représentent les ordres du numérateur et du dénominateur de *H(Z)* (*M* est souvent appelé l'ordre du filtre).

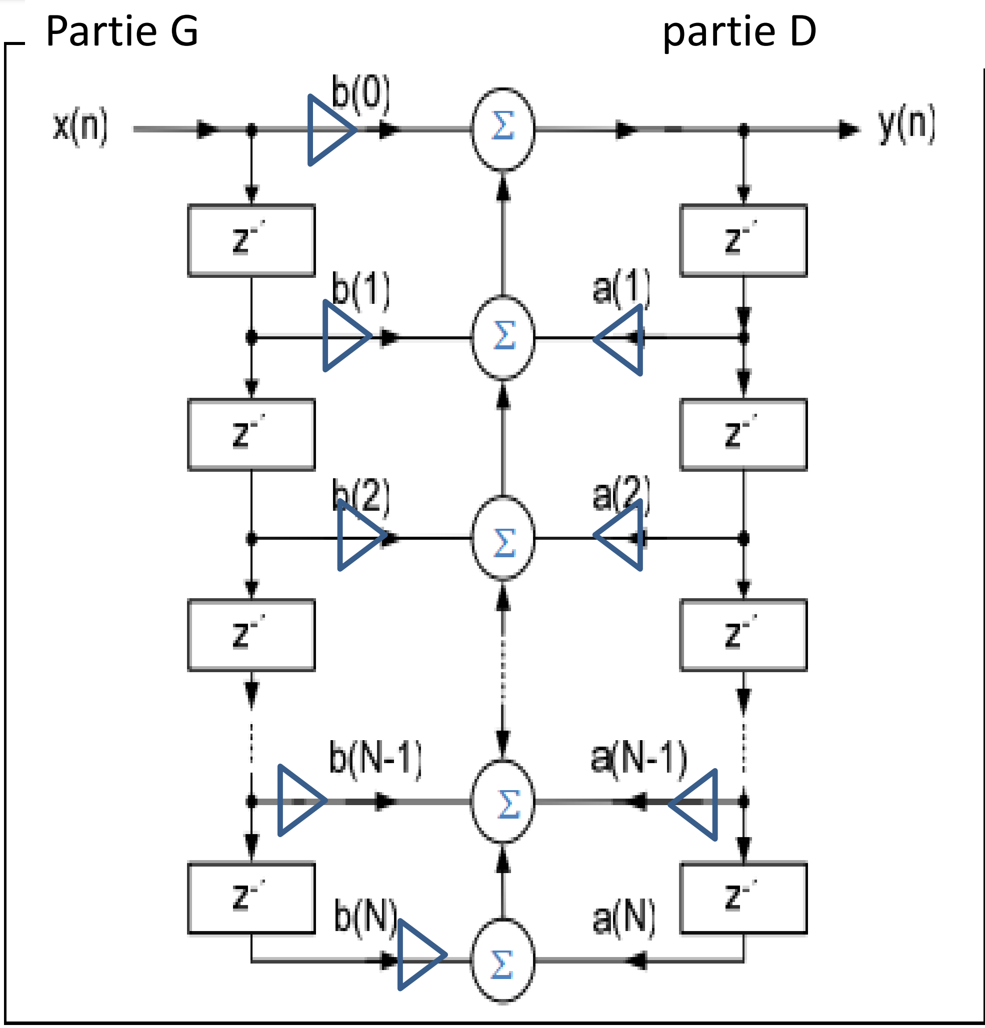
4)Implémentation d’un filtreIIR

1. Forme dircte 1
2. Forme directe 2
3. Forme directe transposée

4)Implémentation d’un filtreIIR

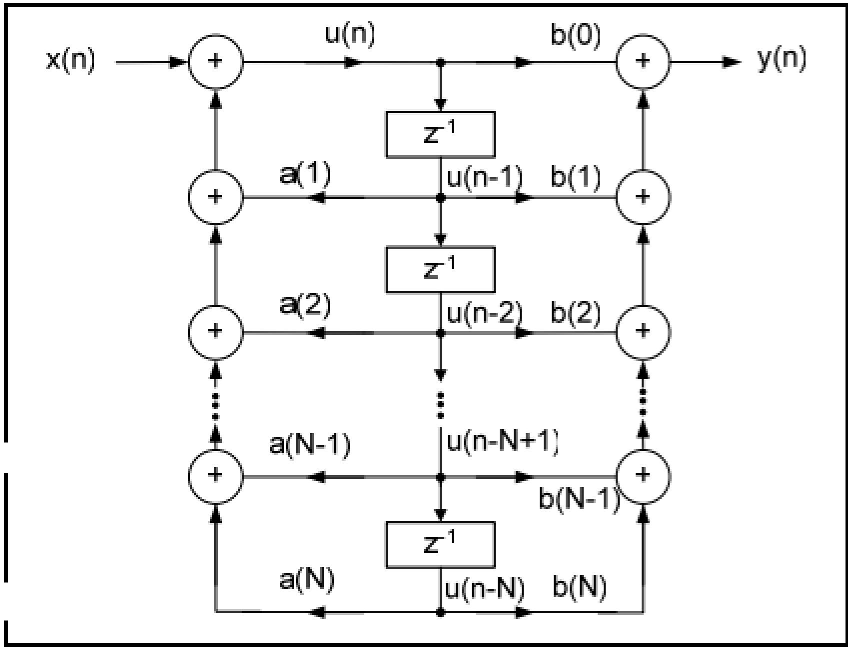
IIR: Forme directe 1

- La partie gauche du flux de signaux implémente des zéros et la partie droite du flux de signaux réalise des pôles.
- Nécessite 2N unités de mémoire pour sauvegarder les variables d'état.
    - Partie G: non récursive
    - Partie D: récursive



4)Implémentation d'un filtreIIR

IIR: Forme directe 2



- La structure canonique directe de type 2 nécessite moins de cellules mémoire que la structure canonique directe de type 1.

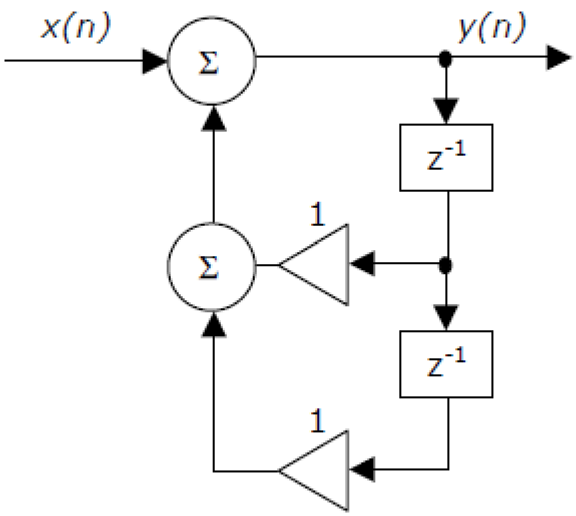
4)Implémentation d'un filtreIIR

Exemple

Soit l'équation aux différences suivante:

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n)$$

1) Représenter son schéma bloc.



5)Conception d’un IIR

Contrairement aux filtres RIF on ne part pas de la réponse impulsionnelle théorique d'un filtre analogique que l'on tronque mais directement de la fonction de transfert en (P) du filtre analogique. Cette fonction de transfert analogique n'étant pas tronquée, sa réponse impulsionnelle est entièrement conservée, c'est pourquoi on parle de filtre à réponse impulsionnelle infinie.

6)Méthodes de synthèse de filtres récursifs (IIR)

Il existe de nombreuses méthodes dont :

- La méthode de l’invariance impulsionnelle
- La méthode de l’invariance indicielle
- La méthode des pôles et des zéros
- La transformation bilinéaire

7)Synthèse de filtres RII par transformation bilinéaire

- **Principe**

On dispose d'un filtre continu ayant un gabarit fréquentiel répondant au cahier des charges demandées (synthèse de filtres analogiques de type Butterworth, Cauer, elliptique,…).

- **Objectif** :

Trouver le filtre numérique récursif ayant une réponse fréquentielle équivalente à celle du filtre analogique.

- Méthode de la transformation bilinéaire

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Te: période d'échantillonnage

8)Conception d’un filtre RII

Concevoir un filtre numérique consiste à déterminer la fonction de transfert en z du filtre qui va approcher au mieux les spécifications sur la réponse fréquentielle en amplitude

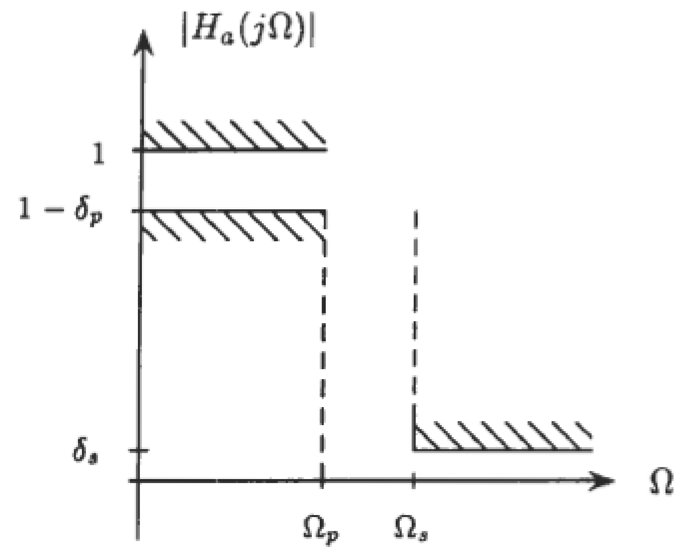
Toujours cinq étapes requises :

- 1. Spécification du filtre
- 2. Calcul des coefficients
- 3. Choix d’une architecture de mise en œuvre.
- 4. Simulation (conseillé)
- 5. Implémentation.

8)Conception d'un filtre RII

Étape 1 : spécification du filtre

- On utilise souvent un filtre passe bas de référence que l'on adapte
- Le filtre de référence doit être réalisable



8)Conception d'un filtre RII

Étape 2 : Calcul des coefficients

- Transformation bilinéaire

La conception d'un filtre digital à partir d'un filtre analogique nécessite la transformation

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

8)Conception d'un filtre RII

Liste des polynômes de Buterworth

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1.0000							
2	1.4142	1.0000						
3	2.0000	2.0000	1.0000					
4	2.6131	3.4142	2.6131	1.0000				
5	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361	1.0000			
6	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637	1.0000		
7	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940	1.0000	
8	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8462	13.1372	5.1258	1.0000

La fonction de transfert de Butterworth: $$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

8)Conception d’un filtre RII

Conception de filtre pass bas de Buterworth : Méthodologie

1. Calculer la valeur des paramètres k (facteur de discrimination) et d (facteur de sélectivité)

$$K = \frac{\Omega_p}{\Omega_c}$$

$$d = [\frac{(1-\delta_p)^{-2}-1}{\delta_s^{-2}-1}]^{1/2}$$

2. Déterminer l’ordre du filtre N=?

$$N \geq \frac{log\ d}{\log k}$$

3. Déterminer la valeur de $\overline{\Omega_c}$ dans le rang

$$\Omega_p[(1-\delta_p)^{-2}-1]^{-1/2N} \geq \Omega_c \geq \Omega_s[\delta_s^{-2}-1]^{-1/2N}$$

8)Conception d'un filtre RII

Conception de filtre pass bas de Buterworth

4. Avec la valeur de l'ordre, trouver la fonction de transfert Ha(s), en substituant s par $\frac{S}{\Omega_c}$

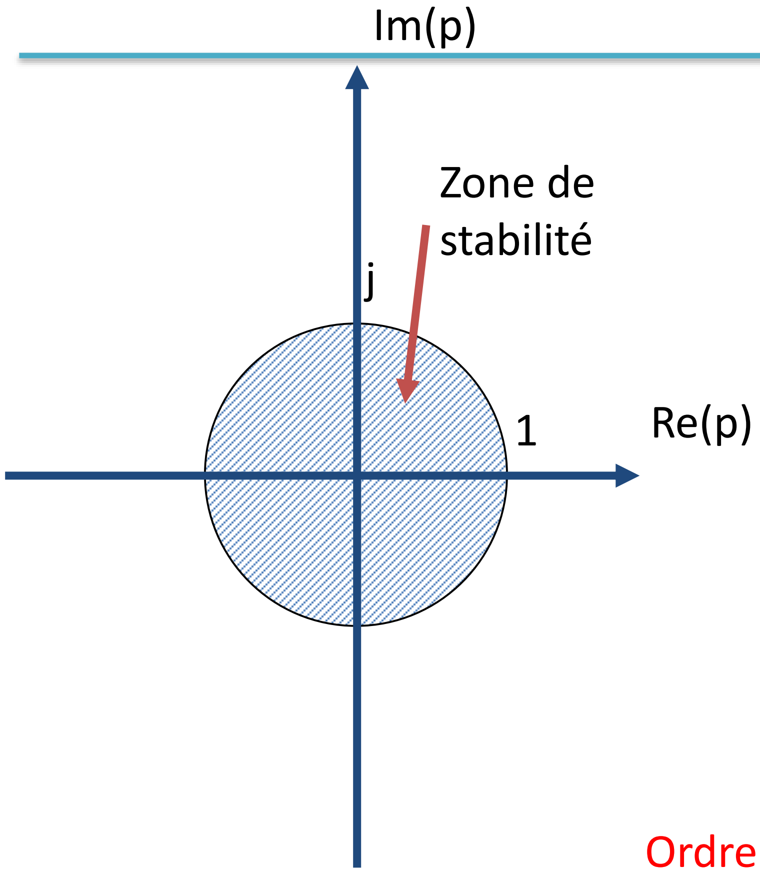
5. Convertir la fonction analogique Ha(s)à la fonction numérique en utilisant la méthode bilinéaire

8)Conception d'un filtre RII

Soit à concevoir un filtre passe bas de type Butterworth par la méthode bilinéaire qui vérifie les spécifications suivantes :

$$fp = 6KHz \,;\, fs = 10KHz \,;\, \delta_p = \delta_s = 0.1$$

9) Filtres à minimum de phase



Le filtre est stable si:

$$\forall i, |p_i| < 1$$

Le filtre est à minimum de phase si:

$$\forall i, |z_i| < 1$$

Ordre du filtre = max(nb pôles,nb zéros)