TD3

Exercice 1

Concevoir un filtre passe-bas à phase linéaire FIR selon les spécifications suivantes :

$$0.99 \le |H(e^{jw})| \le 1.01 \qquad 0 \le |w| \le 0.19\pi$$
$$|H(e^{jw})| \le 0.01 \qquad 0.21\pi \le |w| \le \pi$$

Exercice 2

Concevoir un filtre passe bas avec les spécifications suivantes :
$w_p = 0.4\pi$; $w_s = 0.6\pi$ avec une atténuation minimale dans la bande d'arrêt supérieure à 50dB.

Exercice 3

Soit le filtre analogique dont la fonction de transfert est donnée par : $H(p) = \frac{10}{p+10}$

La période d'échantillonnage est $T = 0.01\ s$

1. Calculer par la méthode de la transformation bilinéaire la fonction de transfert H(z) associée au filtre analogique H.
2. Déterminer les pôles et les zéros de ce filtre, et les représenter dans le plan des Z.

Exercice 4

Quelle est l'ordre du filtre Butterworth de type passe-bas qui est définit par les spécifications suivantes : $w_p = 0.375\pi$; $\delta_p = 0.01$; $w_s = 0.5\pi$ avec $\delta_s = 0.01$ et Ts=2sec.

Exercice 5

Soit à concevoir un filtre passe-bas de Butterworth qui vérifie les spécifications suivantes : *fp= 6 kHz; fs=10kHz et* $\delta_p = \delta_s$*=0.1.*

Exercice 6

Par l'utilisation de la transformation bilinéaire, concevoir un filtre de Butterworth d'ordre 1 de type passe-bas, qui possède une fréquence de coupure $w_c = 0.2\pi$ à -3dB.

Annexe

Les coefficients dans la fonction système d'un filtre de Butterworth normalisé ($\Omega_c = 1$) pour les ordres $1 \le N \le 8$.

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1.0000							
2	1.4142	1.0000						
3	2.0000	2.0000	1.0000					
4	2.6131	3.4142	2.6131	1.0000				
5	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361	1.0000			
6	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637	1.0000		
7	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940	1.0000	
8	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8462	13.1372	5.1258	1.0000

: Conception de filtres numériques

Exercice 9

Soit un filtre numerique dont le diagramme pôles/zeros est representé sur la figure ci-dessous.

1. Est-ce que c'est un filtre à reponse impulsionnelle finie ou infinie ?
2. Est il stable ?(justifier)
3. Donner l'allure du module de sa reponse fréquentielle.

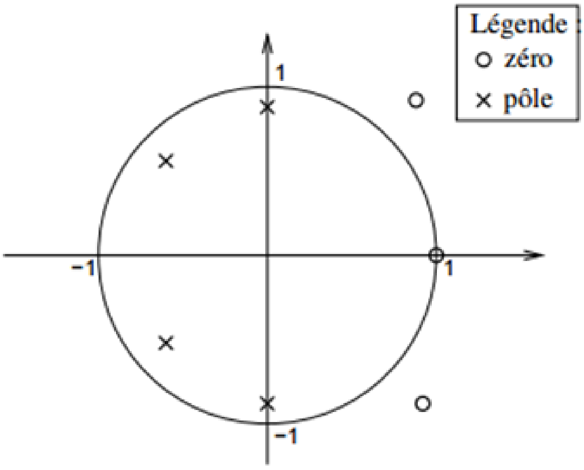


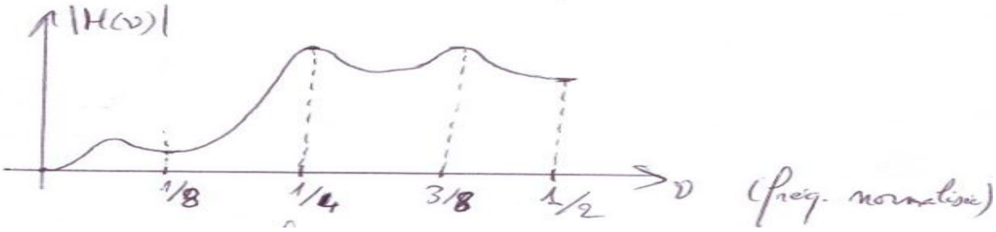
Diagramme pôles zéros

2.2. Analyse d'un filtre numérique

1) Le filtre a des pôles, donc RII

2) Tous les pôles sont à l'intérieur, strictement, du cercle unité. Donc filtre stable.

3)



5) Le filtre numérique dont le diagramme pôles-zéros est représenté sur la figure 2

- ☐ **est un filtre passe-bas**
- ☐ **est un filtre passe-haut**
- ☐ **est un filtre passe-bande**
- ☐ **est stable**

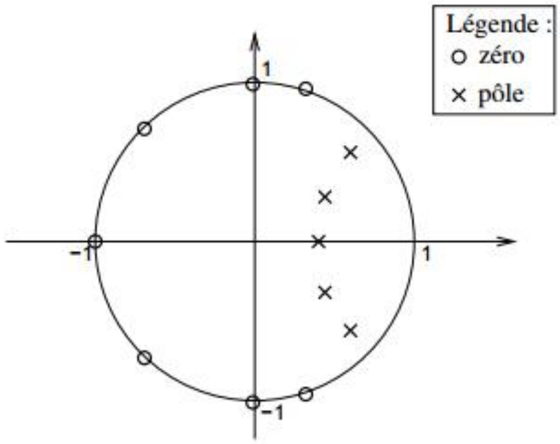


FIG. 2 – Diagramme pôles-zéros.

2.1 Analyse d'un filtre numérique (7,5 points)

La figure 3 représente le diagramme pôles-zéros d'un filtre numérique. Les zéros et les pôles ont pour modules respectifs λ et μ et pour arguments respectifs $\pm\alpha$ et $\pm\beta$.

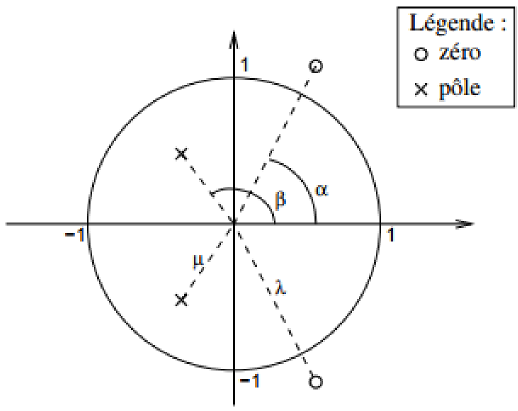


FIG. 3 – Diagramme pôles-zéros.

1) Indiquez la nature du filtre (passe-haut, passe-bas, ...). Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il stable ?

2) Ecrire la fonction de transfert $H(z)$ sous la forme :

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

: Conception de filtres numériques

1) Indiquez la nature du filtre (passe-haut, passe-bas, ...). Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il stable ?

2) Ecrire la fonction de transfert $H(z)$ sous la forme :

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

en précisant les valeurs des coefficients. **La suite de l'exercice peut toutefois être faite sans connaître ces valeurs.**

3) Ecrire l'équation aux différences et dessiner la structure du filtre.

: Conception de filtres numériques

2.1 : Analyse d'un filtre numérique

1) • Filtre passe-haut, car 1 zéro au milieu des basses-fréquences $\left(0 \to \frac{1}{4}\right)$ et 1 pôle au milieu des hautes-fréquences $\left(\frac{1}{4} \to \frac{1}{2}\right)$ pas trop proche du cercle unité.

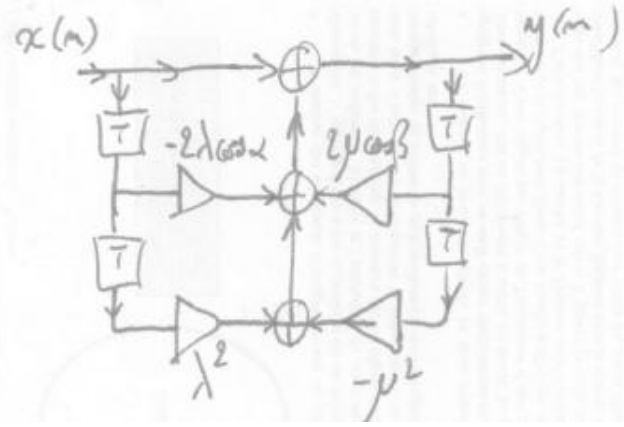
• $\exists$ pôles, donc RII

• pôles à l'intérieur, strictement, du cercle unité, donc filtre stable.

2)
$$H(z) = \frac{(z - \lambda e^{j\alpha})(z - \lambda e^{-j\alpha})}{(z - \mu e^{j\beta})(z - \mu e^{-j\beta})}$$
$$= \frac{z^2 - 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2}{z^2 - 2\mu\cos\beta + \mu^2}$$
$$= \frac{1 - (2\lambda\cos\alpha) z^{-1} + \lambda^2 z^{-2}}{1 - (2\mu\cos\beta) z^{-1} + \mu^2 z^{-2}}$$

3)
$$y(n) - (2\mu\cos\beta)\, y(n-1) + \mu^2 y(n-2)$$
$$= x(n) - (2\lambda\cos\alpha)\, x(n-1) + \lambda^2 x(n-2)$$

3) Suite



2.3 Filtrage numérique 1D (4 points)

Soit un filtre numérique défini par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = \rho y(n-1) + x(n) + x(n-2)$$

Son diagramme pôle-zéros est représenté sur la figure 4 pour $\rho = 0,9$.

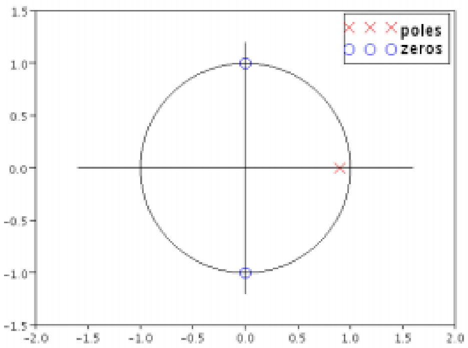


FIGURE 4 – Diagramme pôles-zéros du filtre.

a) Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Calculer sa fonction de transfert.

b) Le filtre est-il stable ou instable ? (justifier)

c) Dessinez l'allure de sa réponse fréquentielle.

d) On filtre un signal composé de deux sinusoïdes, de fréquences respectives 1/8 et 1/4 (en fréquences normalisées). Quel est le signal en sortie du filtre ?

: Conception de filtres numériques

2.2 Filtrage numérique

a) Equation aux différences récursive, donc filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

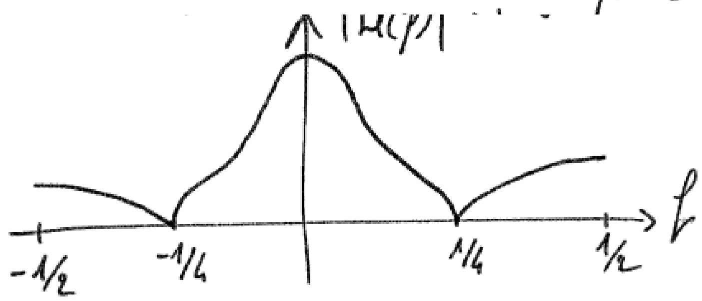
$$Y(z) = \rho z^{-1} Y(z) + X(z) + z^{-2} X(z)$$

(application de la TZ puis du théorème du retard à l'équation aux différences)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-2}}{1 - \rho z^{-1}}$$

b) Le pôle du filtre est à l'intérieur, strictement, du cercle unité. Donc le filtre est stable.

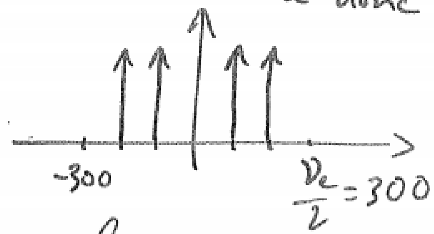
c)



d) La sinusoïde de fréquence 1/4 est absolument éliminée par le filtre (0 en f = 1/4)
A la sortie, il reste donc celle de fréquence 1/8, pondérée par $|H(1/8)|$

c) La reconstruction se traduit par un filtrage passe-bas de fréquence de coupure $\frac{\nu_e}{2}$

Le signal reconstruit a donc pour spectre d'amplitude :



C'est donc la somme de 2 sinusoïdes de fréquences 100 et 200 Hz (i.e. ν_1 et $2\nu_1$) :

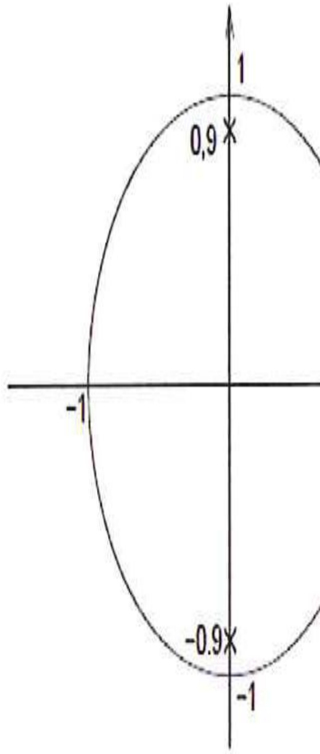
$$\tilde{x}(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(4\pi\nu_1 t)$$

On ne retrouve pas $x(t)$ car la condition du théorème de Shannon n'a pas été respectée :

$\nu_e < 2\nu_{max}$, ce qui produit un repliement de spectre

: Conception de filtres numériques

1. [35/100] Soit le système caractérisé par le diagramme pôles-zéros ci-contre.
   A. Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ? pourquoi ?
   B. Donner sa fonction de transfert H(z)
   C. Donner son équation de récurrence
   D. Dessiner l'allure de sa réponse en fréquence
   E. Dessinez sa structure directe II transposée



2. [30/100] Dans le système ci-dessous, C/D est un convertisseur analogique/numérique (un échantillonneur)

a) non ⇒ pôles ⇒ récursivité.

b) $H(z) = K \dfrac{1 - z_1 z^{-1}}{(1-p_1 z^{-1})(1-p_1^* z^{-1})}$ avec $z_1 = 1,2$; $p_1 = j\,0,9$

$$= K \frac{(1-z_1 z^{-1})}{1-(p_1+p_1^*)z^{-1}+|p_1|^2 z^{-1}} = K \frac{(1-z_1 z^{-1})}{(1-0+0,81\, z^{-2})}$$

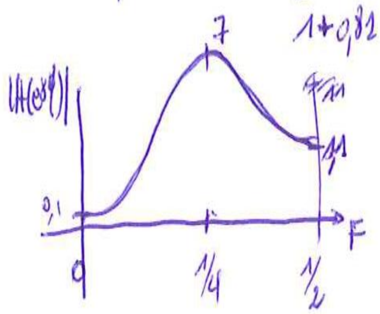
(soit $K=1$)

c) $Y(z) = H(z)X(z)$

$$y(n) + 0,81\, y(n-2) = x(n) - x(n-1).1,2$$

d) $H(e^{j0}) = H(1) = \dfrac{1-1,2}{1+0,81} = \dfrac{-0,2}{1,81} \simeq -0,1$

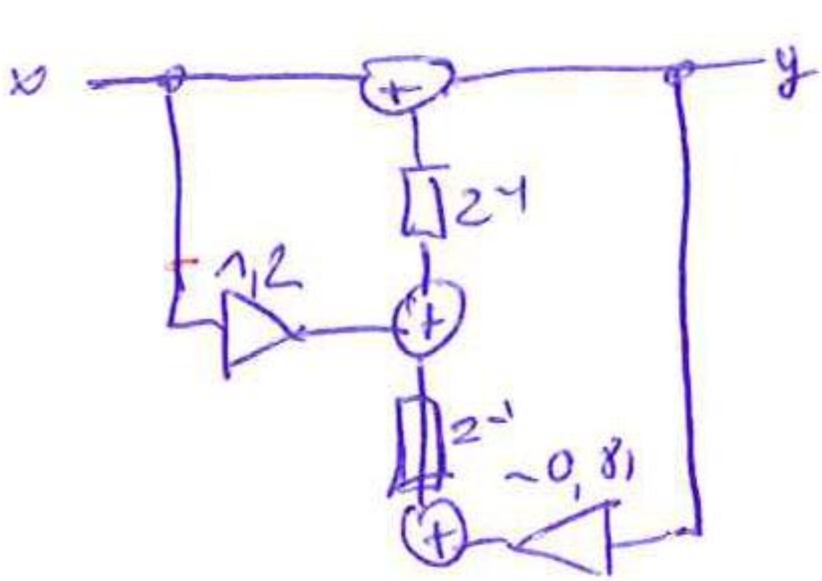
$H(e^{j\pi}) = H(-1) = \dfrac{1+1,2}{1+0,81} = \dfrac{2,2}{1,81} \simeq 1,1$



$H(e^{j\pi/2}) = H(j) = \dfrac{1-1,2.(-j)}{1+0,81(-j^2)} = \dfrac{1+j\,1,2}{0,19}$

$|H(j)| \simeq \dfrac{\sqrt{2}}{0,19} \simeq 1,4.5 = 7$

e)



Solution ex8

Exercice 10

Exercice 3 : Un système LIT causal est décrit par l'équation aux différences suivante *y[n]=y[n-1]+y[n-2]+x[n-1]*.
(a) Trouver la fonction de transfert du système, calculer ses pôles et ses zéros et déterminer le domaine de convergence.
(b) Trouver la réponse impulsionnelle du système.
(c) Le système est-il stable ? Pourquoi ?
(d) Trouver la réponse impulsionnelle d'un système stable (non-causal) qui vérifie l'équation aux différences.

Solution

Ex.3

(a) TZ ➔ $Y(z)[1-z^{-1}-z^{-2}]=X(z)z^{-1}$ ➔ $H(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}=\dfrac{z}{z^2-z-1}$

Un zéro en z=0, deux pôles en $z=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

système causal ➔ domaine de convergence à l'extérieur d'un cercle et contenant l'infini ➔ il est défini par $|z|>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(b) $$H(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z^{-1}\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z^{-1}}-\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z^{-1}}$$

➔ $$h[n]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]$$

(c) Le domaine de convergence ne contient pas le cercle unité ➔ le système n'est pas stable.

(d) Pour obtenir un système stable, il faut que le domaine de convergence contienne le cercle unité. Etant donné que le domaine de convergence exclut les pôles du système, le seul choix possible est : $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<|z|<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ➔

$$h[n]=\frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n u[-n-1]-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]$$

Exercice

: Conception de filtres numériques

A second-order filter has poles at $z = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}$ and two zeros at $z = \pm 1$.

(a) Write the time-domain description of this system—in the form of a difference equation.

(b) Determine the response of the system to an input that is an impulse. Give the answer as a formula and as a plot.

Solution

: Conception de filtres numériques

(a) $$H(z) = \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{\left(1-(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\sqrt{3})z^{-1}\right)\left(1-(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\sqrt{3})z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{1-z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$

poles @ $1e^{j\pi/3}$ & $1e^{-j\pi/3}$

$$\therefore \quad y[n] = y[n-1] - y[n-2] + x[n] - x[n-2].$$

(b) $y[0] = 0 - 0 + 1 - 0 = 1$

$y[1] = 1 - 0 + 0 - 0 = 1$

$y[2] = 1 - 1 + 0 - 1 = -1$

REPEATS.

After $n > 2$, the input is gone

$y[3] = -1 - 1 = -2$ | $y[6] = 1-(-1) = 2$

$y[4] = -2-(-1) = -1$ | $y[7] = 2-1 = 1$

$y[5] = -1-(-2) = 1$ | $y[8] = 1-2 = -1$

For $n>2$: $y[n] = \alpha_1 e^{j\pi n/3} + \alpha_2 e^{-j\pi n/3}$

Make 2 eqns in 2 unknowns.

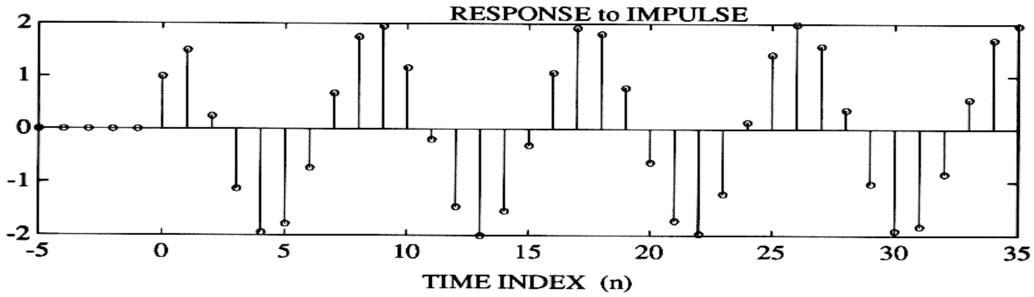
$-2 = y[3] = \alpha_1 e^{j\pi} + \alpha_2 e^{-j\pi} = -\alpha_1 - \alpha_2$

$-1 = y[4] = \alpha_1 e^{j4\pi/3} + \alpha_2 e^{-j4\pi/3}$

Solution is $\alpha_1 = 1$ & $\alpha_2 = 1$

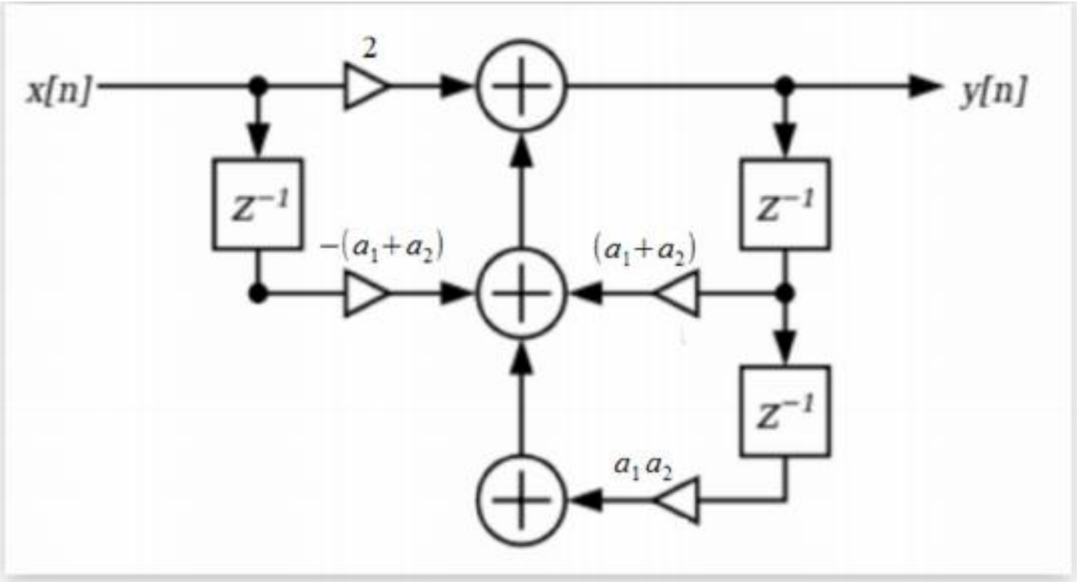
$\therefore \quad y[n] = e^{j\pi n/3} + e^{-j\pi n/3} = 2\cos\frac{\pi n}{3}$

This formula applies for $n > 0$.



Exercice

$$y[n] = 2x[n] - (a_1 + a_2)x[n-1] - (a_1 + a_2)y[n-1] + a_1 a_2 y[n-2],$$



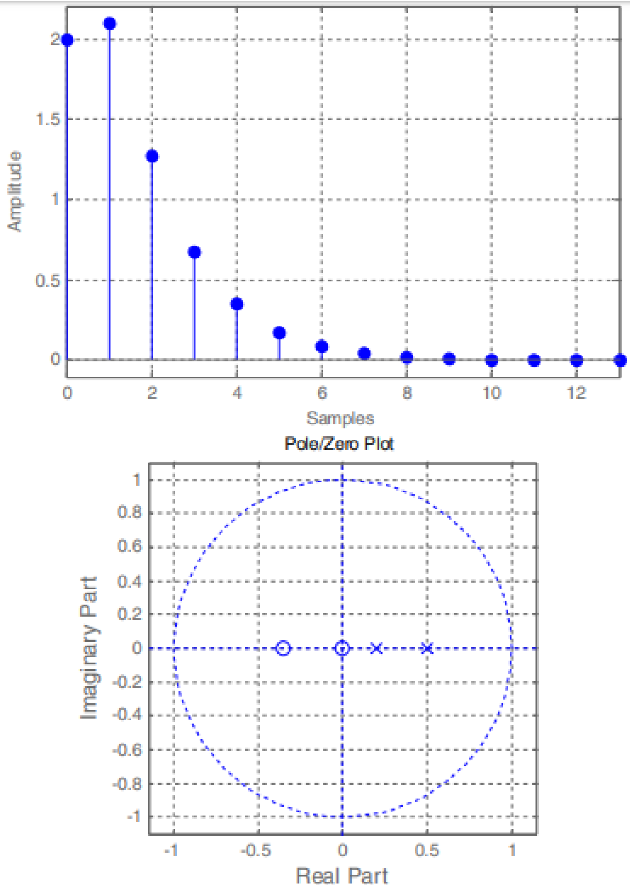


Figure 2: Zero-pole diagram of a system with a1 =0.5 and a2 = 0.2 (bottom panel) and the corresponding pulse response (top panel)

Let us consider another example. The pulse response sequence of a system is $h[n] = 0.5^{n-1}\cos(\frac{\pi}{3}n)$. We can then represent it as a sum of two exponential sequences using the following identity

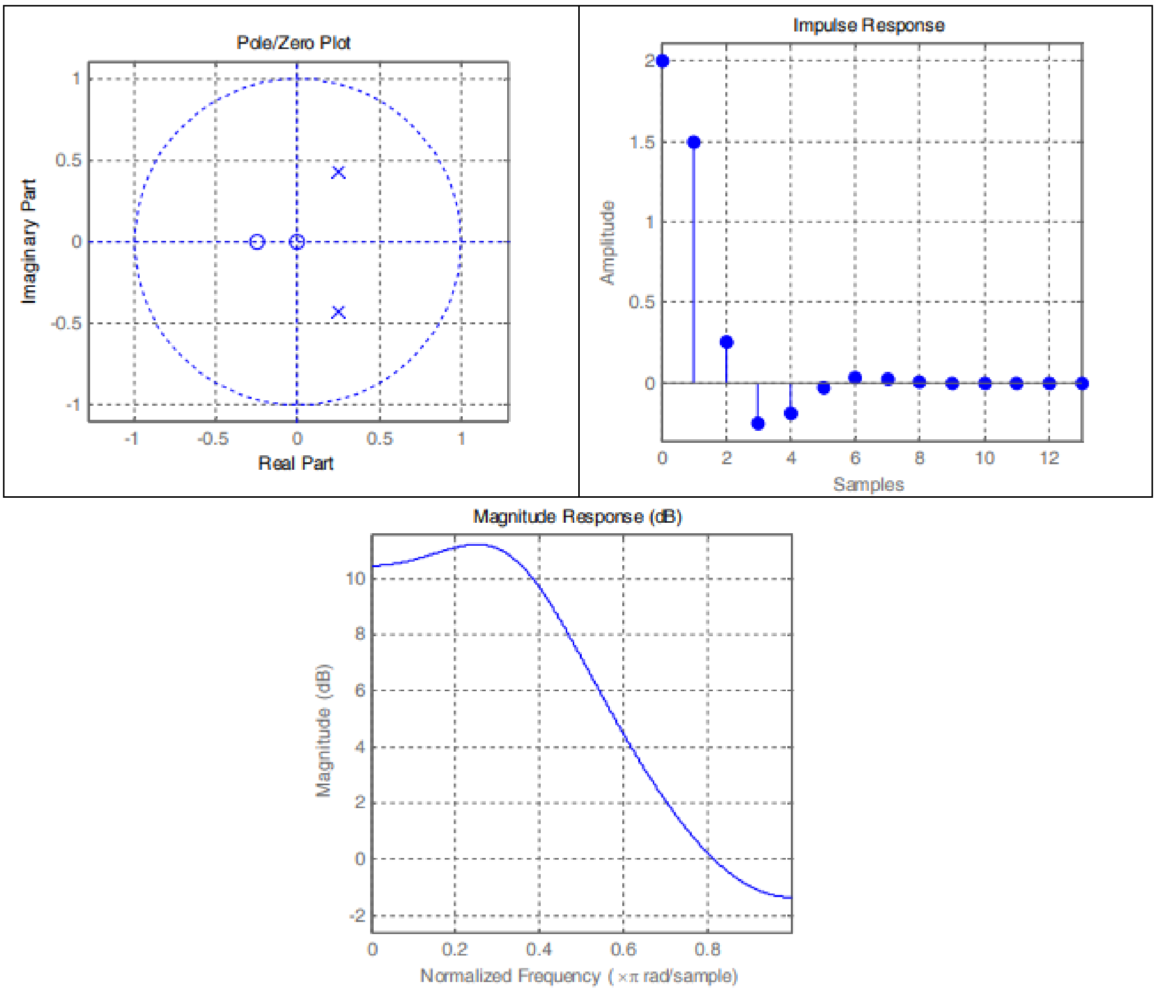
$$\cos(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}$$

Thus, $h[n] = 0.5^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) = 0.5^{n-1}\frac{e^{j\pi/3n}+e^{-j\pi/3n}}{2} = (0.5e^{j\pi/3})^n + (0.5e^{-j\pi/3})^n = a_1^n + a_2^n$

We can then

$$H(z) = \frac{1}{1-0.5e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{1}{1-0.5e^{-j\pi/3}z^{-1}} = \frac{2-0.5(e^{j\pi/3}+e^{-j\pi/3})z^{-1}}{(1-0.5e^{j\pi/3}z^{-1})(1-0.5e^{-j\pi/3}z^{-1})} =$$

$$\frac{2-0.5(e^{j\pi/3}+e^{-j\pi/3})z^{-1}}{1-0.5(e^{j\pi/3}+e^{-j\pi/3})z^{-1}+0.25z^{-2}} = \frac{2-\cos(\pi/3)z^{-1}}{1-\cos(\pi/3)z^{-1}+0.25z^{-2}}$$



4.5 For the transfer function

$$H(z) = z^{-1} + z^{-6}$$

of an FIR linear-phase filter,

(a) sketch the impulse response

(b) what is the type of the filter (I, II, III, or IV)?

(c) sketch the frequency response magnitude $|H^f(\omega)|$.

(d) sketch the zero diagram

Solution:

This is a Type 2 FIR filter.

To find the zeros of $H(z)$,

$$z^{-1} + z^{-6} = 0 \tag{17}$$

$$z^5 + 1 = 1 \tag{18}$$

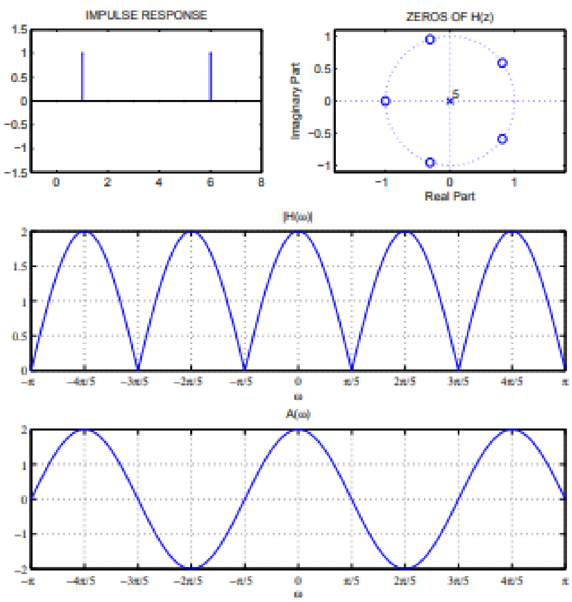
$$z^5 = -1 \tag{19}$$

$$z^5 = e^{j\pi} \tag{20}$$

$$z^5 = e^{j\pi + j2\pi k} \tag{21}$$

$$z = e^{j\pi/5 + j(2\pi/5)k} \tag{22}$$

which for different integer values of k gives the values $z = e^{j\pi/5}$, $z = e^{j3\pi/5}$, $z = e^{j5\pi/5} = -1$, $z = e^{j7\pi/5}$, $z = e^{j9\pi/5}$, and which are shown in the zero diagram.



All the zeros lie on the unit circle, with equal spacing between them. From that, we can sketch the frequency response.

3.6 An FIR digital filter has the transfer function

$$H(z) = (1 - z^{-1})^3 \, (1 + z^{-1})^3$$

(a) Sketch the pole-zero diagram of this system.

(b) Sketch $|H^f(\omega)|$.

(c) Would you classify this as a low-pass, high-pass, band-pass, or band-stop filter? Please briefly explain.

Solution:

Note that because the zero at $z = 1$ is of third order, not only is $H^f(\omega = 0)$ equal to one, but so is its first and second derivative, so the frequency response is flat at $\omega = 0$. The same is true for $\omega = \pi$.