II. Les filtres numériques: FIR

1)Définition: FIR

les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou FIR (Finite Impulse Response). Dans ces filtres tous les coefficients aj sont nuls (seulement les coefficients bi sont présents):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{i=M} b_i z^{-i}$$

2)L'équation de récurrence d'un FIR

- Équation d'e/s : **y(n) est calculée en fonction des entrées (filtre non récursifs)**

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[n-i]$$

$x[n]$ représente les valeurs successives du signal d'entrée,

b_i représente les coefficients de la fonction de transfert du filtres,

$y[n]$ représente les valeurs successives du signal de sortie,

N est le nombre de coefficients du filtre (l'ordre).

3)Propriétés des FIRs

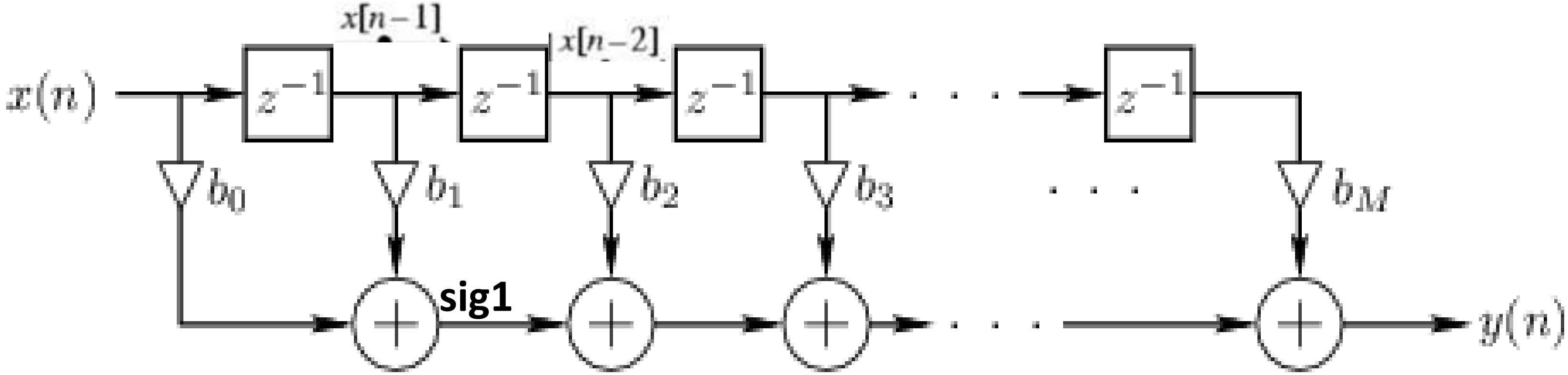
– Réponse stable par défaut

– Réponse en phase linéaire pour un filtre réalisable

– Peuvent demander un temps de calcul excessif

4)Implementation du filtre FIR

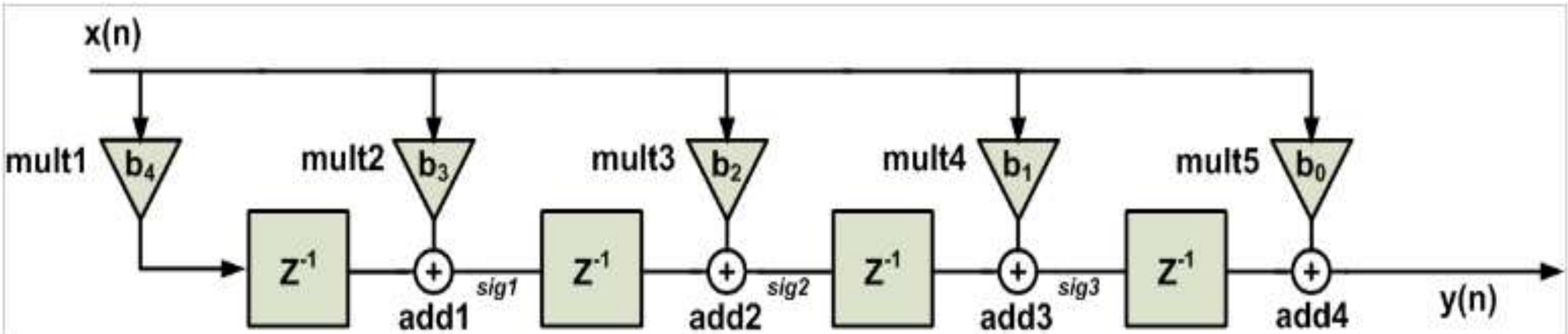
a) Structure directe



Sig1=b0x(n)+b1x(n-1)

4)Implementation du filtre FIR

b)Structure transposée



$$sig1 = b_4x(n-1) + b_3x(n).$$

$$sig2 = b_4x(n-2) + b_3x(n-1) + b_2x(n).$$

$$sig3 = b_4x(n-3) + b_3x(n-2) + b_2x(n-1) + b_1x(n).$$

$$y(n) = b_4x(n-4) + b_3x(n-3) + b_2x(n-2) + b_1x(n-1) + b_0x(n).$$

5)Synthèse des filtres FIR

- 1) Méthode de fenêtrage (domaine temporel)
- 2) Méthodes par échantillonnage fréquentielle
- 3) Synthèse par optimisation (algo. Remez)

➢ Le calcul des coefficients repose sur l'utilisation de la transformée numérique et des fenêtres spectrales ((rectangulaire, Hanning, Hamming,...).

6)Conception de FIR par fenêtrage

Spécifications

w_p : Pulsation de la bande passante

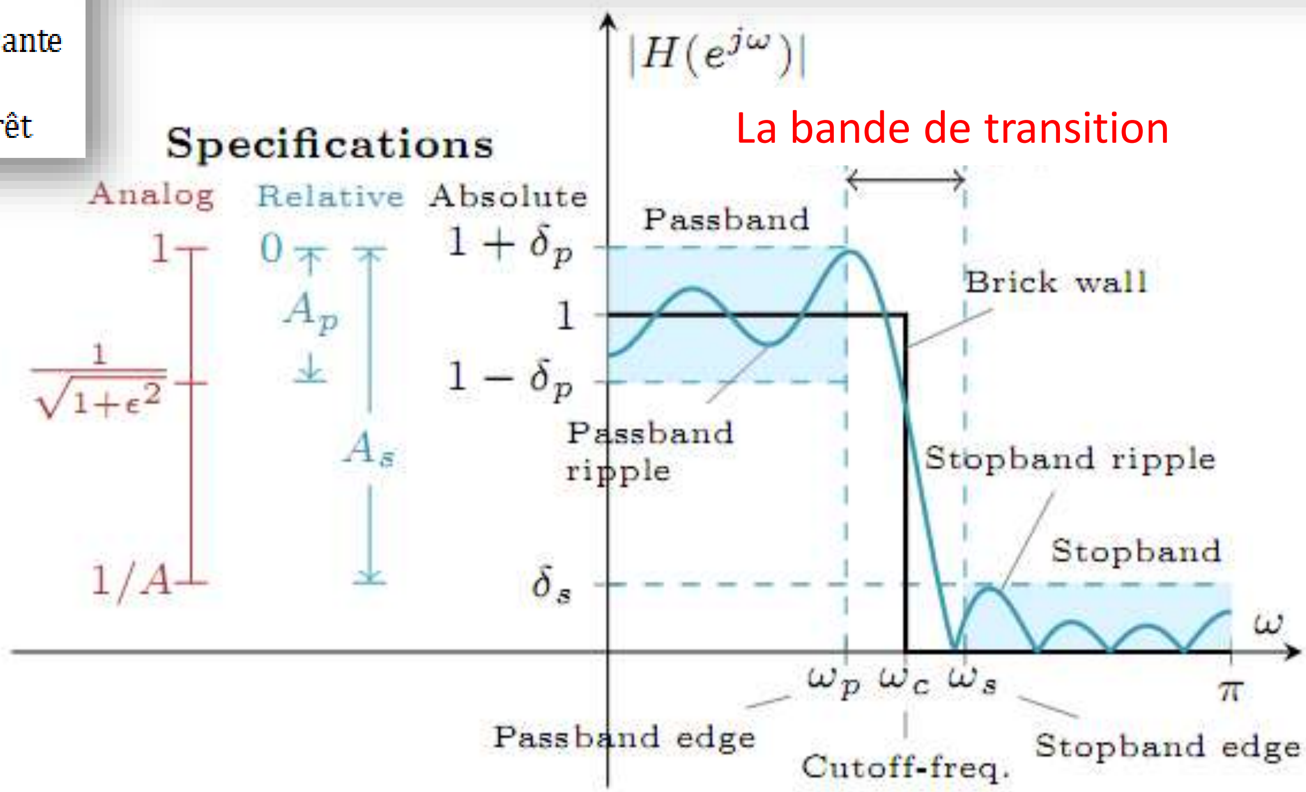
w_s : Pulsation de la bande d'arrêt

δ_p : Déviation de la bande passante

δ_s : Déviation de la bande d'arrêt

- La bande passante est définie par :$0 \le w \le w_p$, on a besoin $|G(e^{jw})| \cong 1$ avec une erreur$\mp\delta_p$, c'est-à-dire$1 - \delta_p \le |G(e^{jw})| \le 1 + \delta_p$, $|w| \le w_p$
- La bande d'arrêt, définie par$w_s \le w \le \pi$, on a besoin$|G(e^{jw})| \cong 0$, avec une erreur δ_s, c'est-à-dire $|G(e^{jw})| \le \delta_s$, $w_s \le |w| \le \pi$

Paramètres à considérer



6)Conception de FIR par fenêtrage

- Concevoir un filtre numérique consiste à déterminer la fonction de transfert en z du filtre qui va approcher au mieux les spécifications sur la réponse fréquentielle en amplitude
- Dans la méthode de la fenêtre, nous développons un filtre FIR de phase linéaire causal en multipliant un filtre idéal (hd(n))qui a une réponse impulsionnelle de durée infinie (IIR) par une fonction fenêtre (w(n))de durée finie:

$$h[n] = h_d(n)w[n]$$

7)Réponse impulsionelle des filtres idéals

A. Lowpass filters

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} Ge^{-j\omega n_d}, & 0 \le |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$h_d[n] = G\frac{\sin(\omega_c(n-n_d))}{\pi(n-n_d)}$$

B. Highpass filters

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} Ge^{-j\omega n_d}, & \omega_c \le |\omega| \le \pi \\ 0, & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

$$h_d[n] = G\left(\delta[n-n_d] - \frac{\sin(\omega_c(n-n_d))}{\pi(n-n_d)}\right)$$

C. Bandpass filters

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} Ge^{-j\omega n_d}, & \omega_1 \le |\omega| \le \omega_2 \\ 0, & |\omega| \le \omega_1 \\ 0, & \omega_2 \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$h_d[n] = G\left(\frac{\sin(\omega_2(n-n_d))}{\pi(n-n_d)} - \frac{\sin(\omega_1(n-n_d))}{\pi(n-n_d)}\right)$$ or, equivalently,

$$h_d[n] = 2G\cos\left(\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)(n-n_d)\right)\frac{\sin\left(\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)(n-n_d)\right)}{\pi(n-n_d)}$$

8)Implementation en Matlab

- `w=boxcar(M)` returns the M-point rectangular window function in array `w`.
- `w=bartlett(M)` returns the M-point Bartlett window function in array `w`.
- `w=hann(M)` returns the M-point Hann window function in array `w`.
- `w=hamming(M)` returns the M-point Hamming window function in array `w`.
- `w=blackman(M)` returns the M-point Blackman window function in array `w`.
- `w=kaiser(M,beta)` returns the `beta`-valued M-point rectangular window function in array `w`.

9)Exemple de fenêtre:wvtool

M: ordre du filtre

$$w[n] = \begin{cases} 1, 0 \le n \le M \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

Rectangulaire

Bartelett :

$$w(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{M} & 0 \le n \le \dfrac{M}{2} \\ 2 - \dfrac{2n}{M} & \dfrac{M}{2} \le n \le M \end{cases}$$

Hanning :

$$w(n) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right] \qquad 0 \le n \le M$$

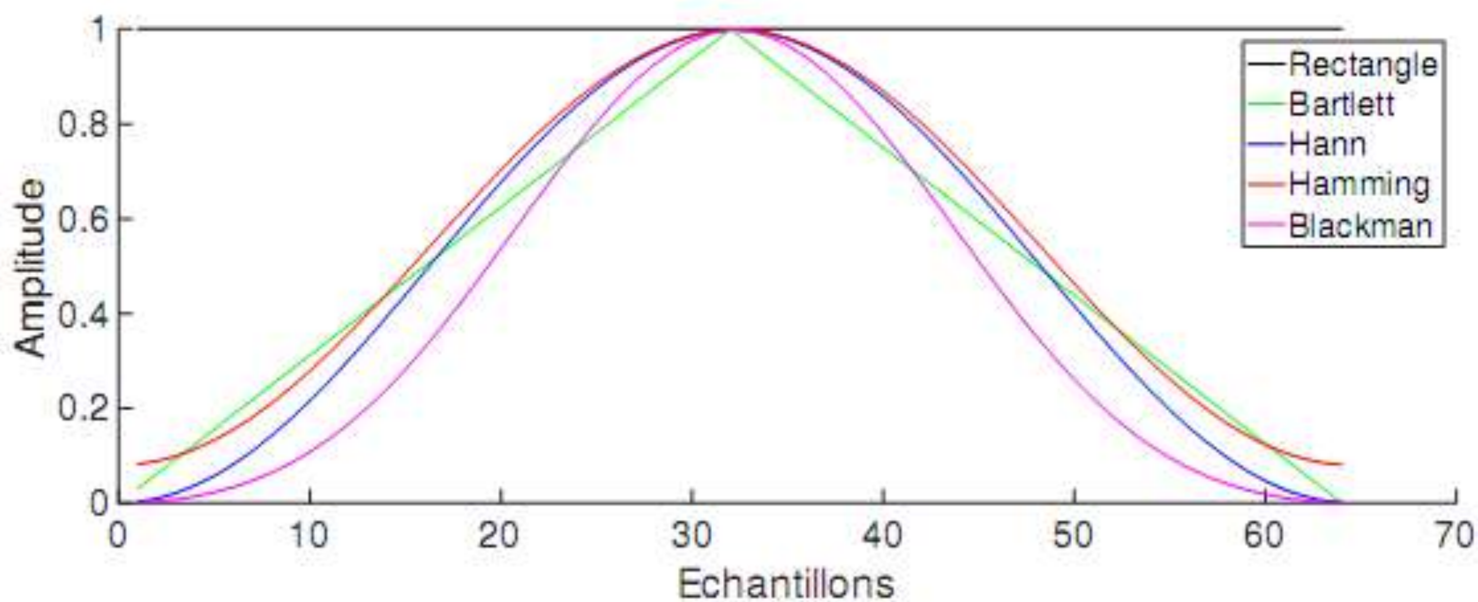
Hamming :

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \qquad 0 \le n \le M$$

Blackman :

$$w(n) = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) \qquad 0 \le n \le M$$

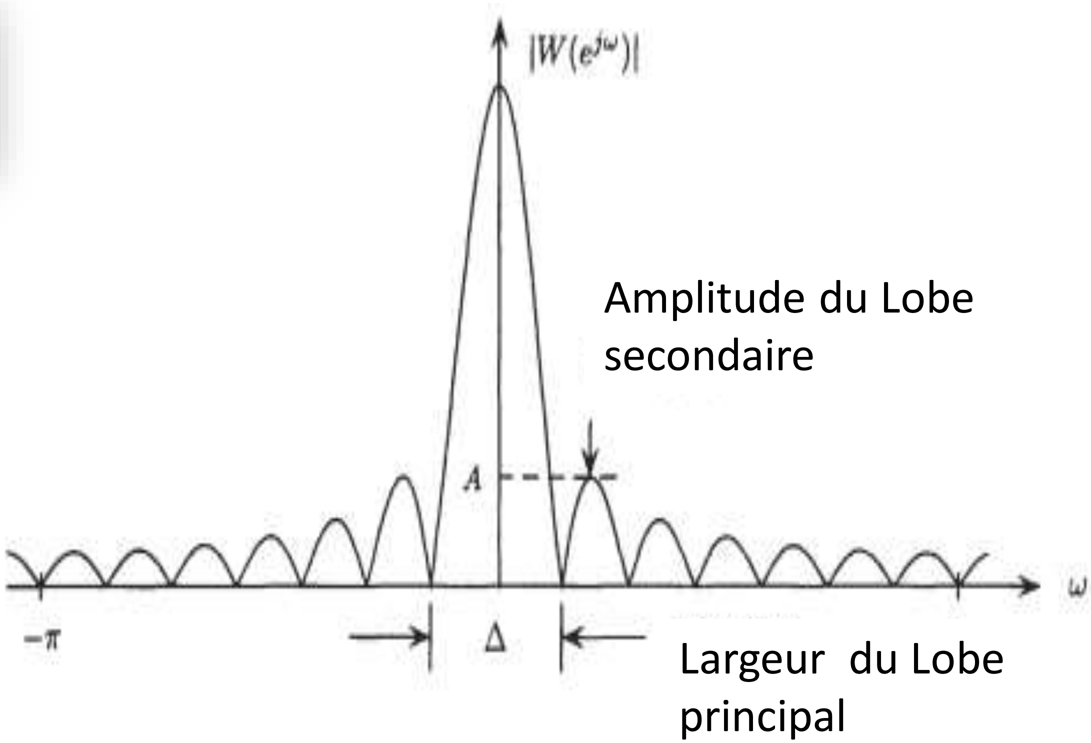
9)Exemple de fenêtre:temporelle



Fenêtres populaires : représentation temporel

10)Fenêtres et leurs propriétés

- La largeur du lobe principale
- L'amplitude du lobe secondaire



11)La méthode des fenêtres

On trouve l'ordre du filtre selon la largeur de la bande de transition, une fois l'atténuation est déterminée dans la bande d'arrêt.

N: la longueur de la fenêtre
Δf=fs−fp
Ordre M=N−1

Fenêtre	Bande de transition normalisée (Δf(Hz))	Ondulation dans la bande passante (dB)	Atténuation dans la bande d'arrêt (dB)	Amplitude du lobe secondaire (dB)	β de la fenêtre de Kaiser équivalente
Rectangulaire	$\frac{0.9}{N}$	0.7416	-21	-13	0
Hanning	$\frac{3.1}{N}$	0.0546	-44	-31	3.86
Hamming	$\frac{3.3}{N}$	0.0194	-53	-41	4.86
Blackman	$\frac{5.5}{N}$	0.0017	-74	-57	7.04
Kaiser	$\frac{2.93}{N} \rightarrow \beta = 4.54$ $\frac{5.71}{N} \rightarrow \beta = 8.96$	0.0274 0.000275	-50 -90		

12)Méthode de la conception

Soit les spécifications suivantes : $\{w_p, w_s,\ \delta_p, \delta_s\}$

1- $\delta = \min\{\ \delta_p, \delta_s\}$

2- $w_c = \frac{w_p + w_s}{2}$

3- Calcul de l'atténuation $A_s = -20\log_{10}\delta$ et $\Delta w = w_s - w_p$ (A_s atténuation minimale de la bande coupée)

4- Choisir une fenêtre (à partir de la table) :

- Sélectionner la forme de fenêtre qui possède le petit A qu'est plus grand que A_s
- Sélectionner une longueur de fenêtre minimale (N= ?)

5- Calculer la réponse impulsionelle par $h_d[n] = \frac{\sin[w_c(n - \frac{M}{2})]}{\pi(n - \frac{M}{2})}$ (pour un filtre Passe-bas)

6- Calculer la réponse impulsionelle fenêtrée par (multiplier les coefficients par la fenêtre) $h[n] = h_d[n]w[n]$