TD2

Exercice 1

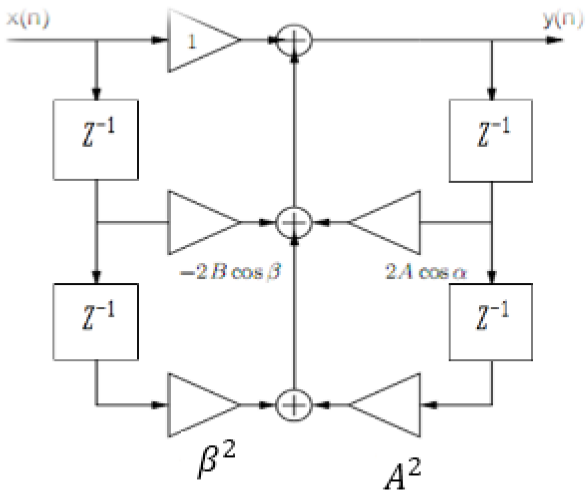
On considère l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

1. Donner le bloc-diagramme relatif au filtre décrit par l'équation aux différences $y(n)$.
2. Calculer la fonction $H(z)$ correspondante à ce filtre. Est-ce que c'est un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? expliquer.
3. Calculer la réponse impulsionnelle $h(n)$ correspondante à ce système.
4. Déterminer et représenter les pôles et les zéro du système. Est-ce que ce système est stable ?

Exercice 2

Soit le filtre représenté par son bloc fonctionnel sur la figure ci-dessous.



1. Donner l'équation aux différences de ce filtre.
2. Est-ce que c'est un filtre à réponse impulsionelle finie ou infinie ?
3. Calculer la fonction de transfert H(z) du filtre représenté sur la figure ci-dessus.

Exercice 3

Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{1 + 2Z^{-1} + Z^{-2}}{1 - 0.8Z^{-1} + 0.64Z^{-2}}$$

1. Trouver l'équation aux différences caractérisant ce filtre.
2. Est-ce que c'est un filtre récursif ou non récursif ? Expliquer.
3. Tracer le block diagramme de ce système.
4. Déterminer les pôles et les zéros, et les tracer dans le plan Z.

Exercice 4

Soit la fonction de transfert H(z) d'un filtre numérique :

$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 - z}{z^3 - 5z^2 + 7z - 3}$$

1. Calculer les pôles de la fonction de transfert H(z).
2. Trouver la réponse impulsionelle causale $\{an; n \in \mathbb{Z}\}$ du filtre numérique.
3. Trouver l'expression de l'équation aux différences décrivant le fonctionnement du filtre numérique.
4. En déduire la réalisation architecturale du filtre numérique considéré.

Exercice 9

Soit un filtre numerique dont le diagramme pôles/zeros est representé sur la figure ci-dessous.

1. Est-ce que c'est un filtre à reponse impulsionnelle finie ou infinie ?
2. Est il stable ?(justifier)
3. Donner l'allure du module de sa reponse fréquentielle.

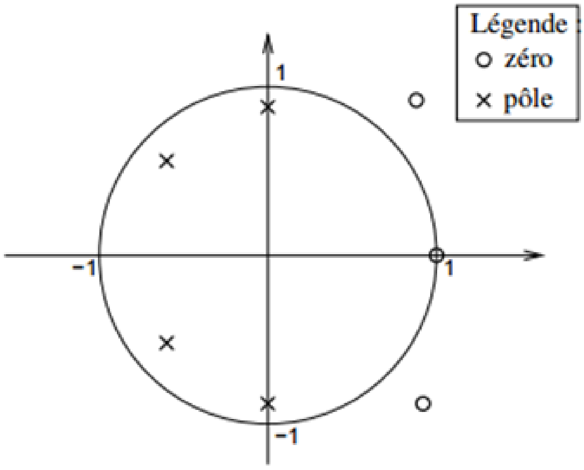


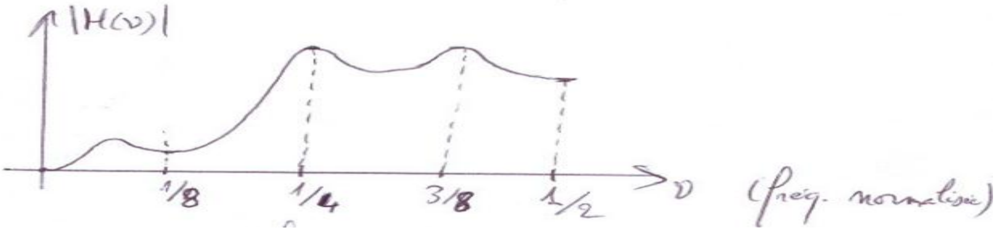
Diagramme pôles zéros

2.2. Analyse d'un filtre numérique

1) Le filtre a des pôles, donc RII

2) Tous les pôles sont à l'intérieur, strictement, du cercle unité. Donc filtre stable.

3)



5) Le filtre numérique dont le diagramme pôles-zéros est représenté sur la figure 2

- ☐ **est un filtre passe-bas**
- ☐ **est un filtre passe-haut**
- ☐ **est un filtre passe-bande**
- ☐ **est stable**

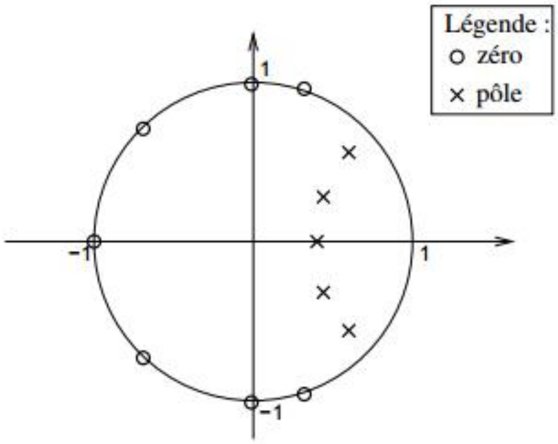


FIG. 2 – Diagramme pôles-zéros.

2.1 Analyse d'un filtre numérique (7,5 points)

La figure 3 représente le diagramme pôles-zéros d'un filtre numérique. Les zéros et les pôles ont pour modules respectifs λ et μ et pour arguments respectifs $\pm\alpha$ et $\pm\beta$.

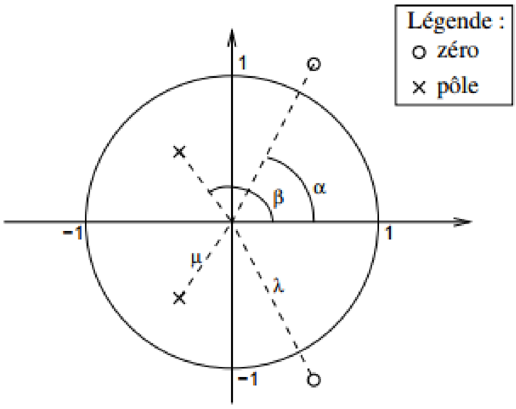


FIG. 3 – Diagramme pôles-zéros.

1) Indiquez la nature du filtre (passe-haut, passe-bas, ...). Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il stable ?

2) Ecrire la fonction de transfert $H(z)$ sous la forme :

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

1) Indiquez la nature du filtre (passe-haut, passe-bas, ...). Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il stable ?

2) Ecrire la fonction de transfert $H(z)$ sous la forme :

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

en précisant les valeurs des coefficients. **La suite de l'exercice peut toutefois être faite sans connaître ces valeurs.**

3) Ecrire l'équation aux différences et dessiner la structure du filtre.

2.1 : Analyse d'un filtre numérique

1) • Filtre passe-haut, car 1 zéro au milieu des basses-fréquences $\left(0 \to \frac{1}{4}\right)$ et 1 pôle au milieu des hautes-fréquences $\left(\frac{1}{4} \to \frac{1}{2}\right)$ pas trop proche du cercle unité.

• ∃ pôles, donc RII

• pôles à l'intérieur, strictement, du cercle unité, donc filtre stable.

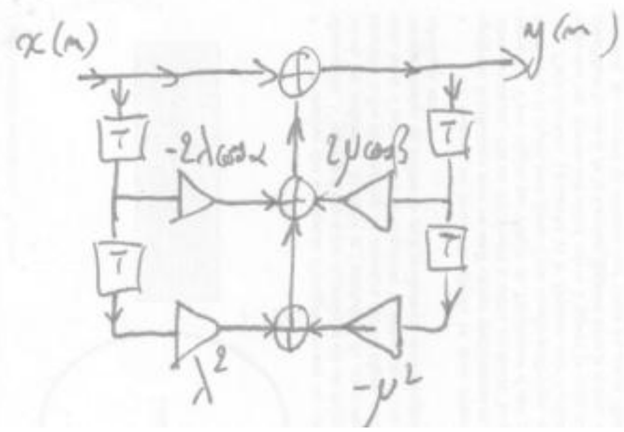
2) $$H(z) = \frac{(z - \lambda e^{j\alpha})(z - \lambda e^{-j\alpha})}{(z - \mu e^{j\beta})(z - \mu e^{-j\beta})}$$

$$= \frac{z^2 - 2\lambda \cos\alpha + \lambda^2}{z^2 - 2\mu\cos\beta + \mu^2}$$

$$= \frac{1 - (2\lambda\cos\alpha) z^{-1} + \lambda^2 z^{-2}}{1 - (2\mu\cos\beta) z^{-1} + \mu^2 z^{-2}}$$

3) $$y(m) - (2\mu\cos\beta)\, y(m-1) + \mu^2 y(m-2)$$
$$= x(m) - (2\lambda\cos\alpha)\, x(m-1) + \lambda^2 x(m-2)$$

3) Suite



2.3 Filtrage numérique 1D (4 points)

Soit un filtre numérique défini par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = \rho y(n-1) + x(n) + x(n-2)$$

Son diagramme pôle-zéros est représenté sur la figure 4 pour $\rho = 0,9$.

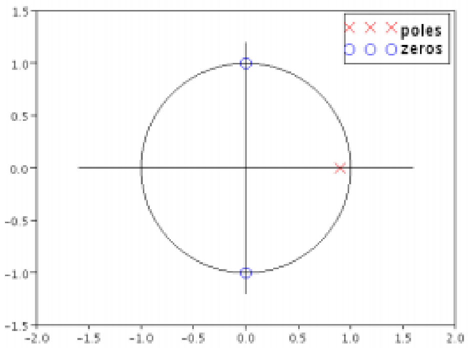


FIGURE 4 – Diagramme pôles-zéros du filtre.

a) Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Calculer sa fonction de transfert.

b) Le filtre est-il stable ou instable ? (justifier)

c) Dessinez l'allure de sa réponse fréquentielle.

d) On filtre un signal composé de deux sinusoïdes, de fréquences respectives 1/8 et 1/4 (en fréquences normalisées). Quel est le signal en sortie du filtre ?

2.2 Filtrage numérique

a) Equation aux différences récursive, donc filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

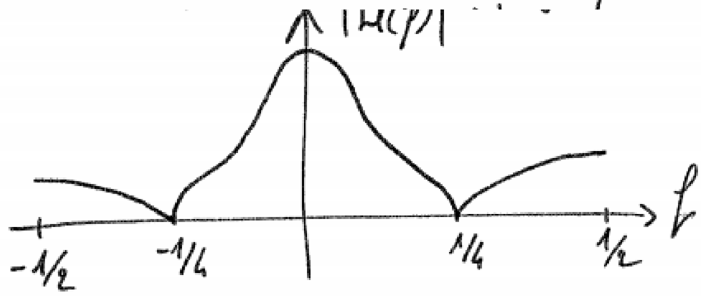
$$Y(z) = \rho z^{-1} Y(z) + X(z) + z^{-2} X(z)$$

(application de la TZ puis du théorème du retard à l'équation aux différences)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-2}}{1 - \rho z^{-1}}$$

b) Le pôle du filtre est à l'intérieur, strictement, du cercle unité. Donc le filtre est stable.

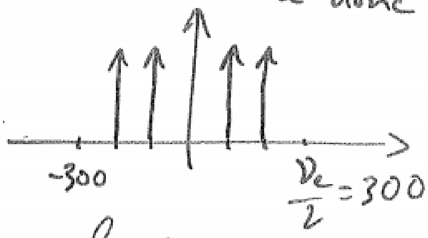
c)



d) La sinusoïde de fréquence 1/4 est absolument éliminée par le filtre (0 en $f = 1/4$)
A la sortie, il reste donc celle de fréquence $1/8$, pondérée par $|H(1/8)|$

c) La reconstruction se traduit par un filtrage passe-bas de fréquence de coupure $\frac{\nu_e}{2}$

Le signal reconstruit a donc pour spectre d'amplitude :

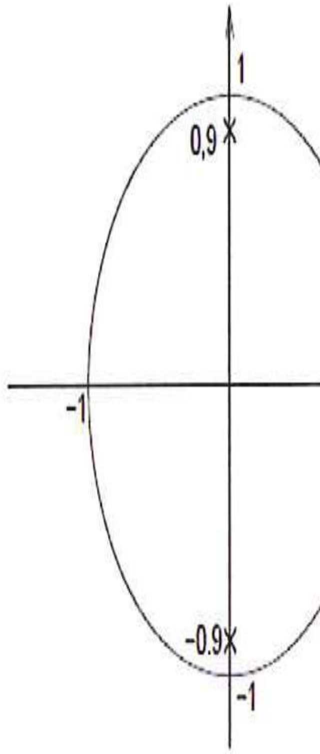


C'est donc la somme de 2 sinusoïdes de fréquences 100 et 200 Hz (i.e. ν_1 et $2\nu_1$) :

$$\tilde{x}(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(4\pi\nu_1 t)$$

On ne retrouve pas $x(t)$ car la condition du théorème de Shannon n'a pas été respectée : $\nu_e < 2\nu_{max}$, ce qui produit un repliement de spectre

1. [35/100] Soit le système caractérisé par le diagramme pôles-zéros ci-contre.
   A. Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ? pourquoi ?
   B. Donner sa fonction de transfert H(z)
   C. Donner son équation de récurrence
   D. Dessiner l'allure de sa réponse en fréquence
   E. Dessinez sa structure directe II transposée



2. [30/100] Dans le système ci-dessous, C/D est un

a) non → pôles → récursivité.

b) $H(z) = K \dfrac{1 - z_1 z^{-1}}{(1-p_1 z^{-1})(1-p_1^* z^{-1})}$ avec $\left| \begin{array}{l} z_1 = 1,2 \\ p_1 = j\,0,9 \end{array} \right.$

$= K \dfrac{(1-z_1 z^{-1})}{1 - (p_1 + p_1^*) z^{-1} + |p_1|^2 z^{-1}} = K \dfrac{(1-z_1 z^{-1})}{(1 - 0 + 0,81 z^{-2})}$

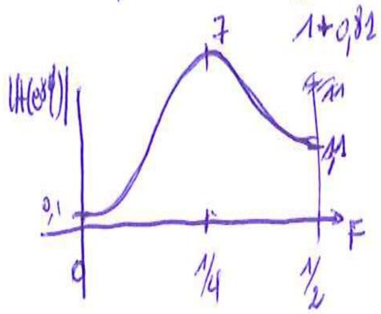
(soit $K = 1$)

c) $Y(z) = H(z) X(z)$

$y(n) + 0,81\, y(n-2) = x(n) - x(n-1) \cdot 1,2$

d) $H(e^{j0}) = H(1) = \dfrac{1-1,2}{1+0,81} = \dfrac{-0,2}{1,81} \simeq -0,1$

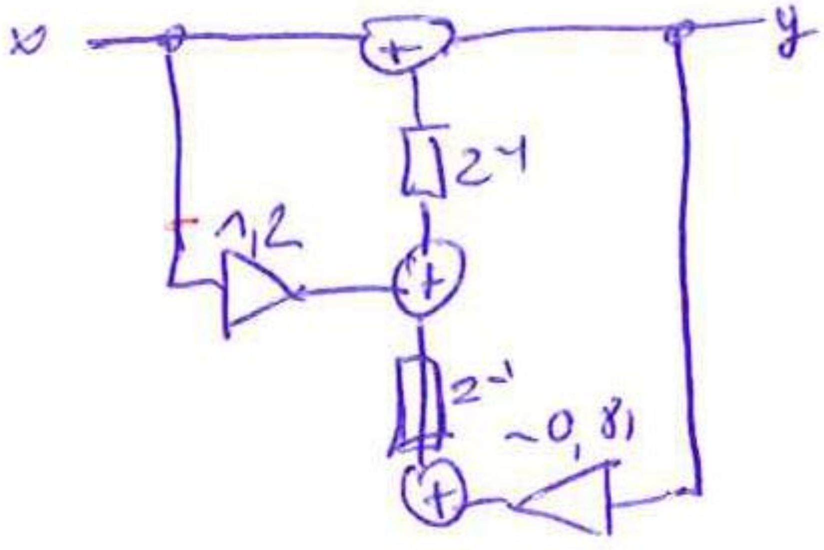
$H(e^{j\pi}) = H(-1) = \dfrac{1+1,2}{1+0,81} = \dfrac{2,2}{1,81} \simeq 1,1$



$H(e^{j\pi/2}) = H(j) = \dfrac{1 - 1,2 \cdot (-j)}{1 + 0,81 (-j^2)} = \dfrac{1 + j1,2}{0,19}$

$|H(j)| \simeq \dfrac{\sqrt{2}}{0,19} \simeq 1,4 \cdot 5 = 7$

e/



Solution ex8

Exercice 10

Exercice 3 : Un système LIT causal est décrit par l'équation aux différences suivante $y[n]=y[n-1]+y[n-2]+x[n-1]$.
(a) Trouver la fonction de transfert du système, calculer ses pôles et ses zéros et déterminer le domaine de convergence.
(b) Trouver la réponse impulsionnelle du système.
(c) Le système est-il stable ? Pourquoi ?
(d) Trouver la réponse impulsionnelle d'un système stable (non-causal) qui vérifie l'équation aux différences.

Solution

Ex.3

(a) TZ ➔ $Y(z)[1-z^{-1}-z^{-2}]=X(z)z^{-1}$ ➔ $H(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}=\dfrac{z}{z^2-z-1}$

Un zéro en z=0, deux pôles en $z=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

système causal ➔ domaine de convergence à l'extérieur d'un cercle et contenant l'infini ➔ il est défini par $|z|>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\textbf{(b)}\quad H(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z^{-1}\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z^{-1}}-\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z^{-1}}$$

$$➔\ h[n]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]$$

(c) Le domaine de convergence ne contient pas le cercle unité ➔ le système n'est pas stable.

(d) Pour obtenir un système stable, il faut que le domaine de convergence contienne le cercle unité. Etant donné que le domaine de convergence exclut les pôles du système, le seul choix possible est : $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<|z|<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ➔

$$h[n]=\frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n u[-n-1]-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]$$

Exercice

A second-order filter has poles at $z = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}$ and two zeros at $z = \pm 1$.

(a) Write the time-domain description of this system—in the form of a difference equation.

(b) Determine the response of the system to an input that is an impulse. Give the answer as a formula and as a plot.

Solution

(a)
$$H(z) = \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{\left(1-\left(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)z^{-1}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)z^{-1}\right)}$$
$$= \frac{1-z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$

poles @ $1e^{j\pi/3}$ & $1e^{-j\pi/3}$

$\therefore$
$$y[n] = y[n-1] - y[n-2] + x[n] - x[n-2].$$

(b) $y[0] = 0 - 0 + 1 - 0 = 1$

$y[1] = 1 - 0 + 0 - 0 = 1$

$y[2] = 1 - 1 + 0 - 1 = -1$

REPEATS.

After $n > 2$, the input is gone

$y[3] = -1 - 1 = -2$

$y[4] = -2 - (-1) = -1$

$y[5] = -1 - (-2) = 1$

$y[6] = 1 - (-1) = 2$

$y[7] = 2 - 1 = 1$

$y[8] = 1 - 2 = -1$

For $n > 2$: $y[n] = \alpha_1 e^{j\pi n/3} + \alpha_2 e^{-j\pi n/3}$

Make 2 eqns in 2 unknowns.

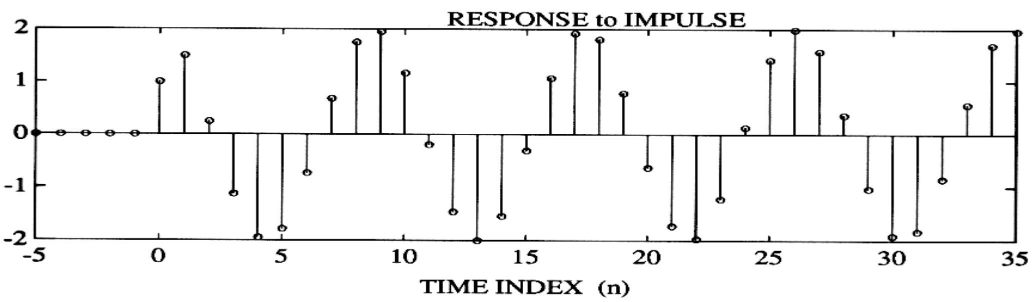
$-2 = y[3] = \alpha_1 e^{j\pi} + \alpha_2 e^{-j\pi} = -\alpha_1 - \alpha_2$

$-1 = y[4] = \alpha_1 e^{j4\pi/3} + \alpha_2 e^{-j4\pi/3}$

Solution is $\alpha_1 = 1$ & $\alpha_2 = 1$

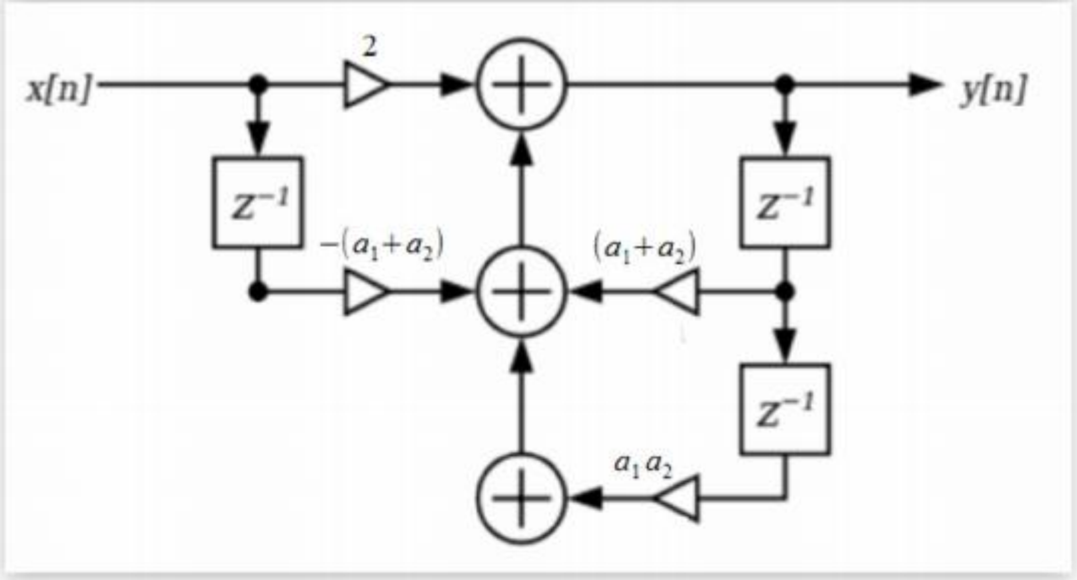
$\therefore y[n] = e^{j\pi n/3} + e^{-j\pi n/3} = 2\cos\frac{\pi n}{3}$

This formula applies for $n > 0$.



Exercice

$$y[n] = 2x[n] - (a_1 + a_2)x[n-1] - (a_1 + a_2)y[n-1] + a_1 a_2 y[n-2],$$



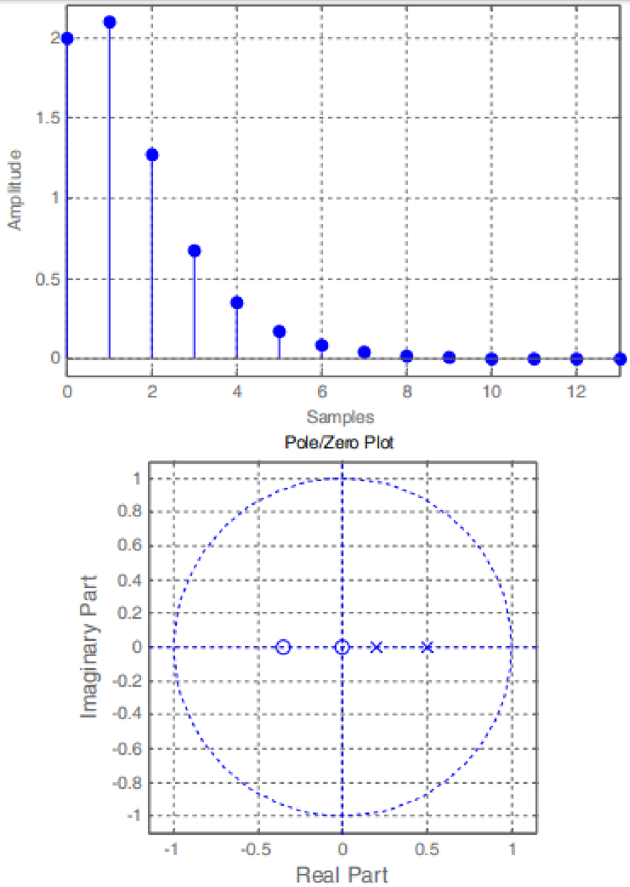


Figure 2: Zero-pole diagram of a system with a1 =0.5 and a2 = 0.2 (bottom panel) and the corresponding pulse response (top panel)

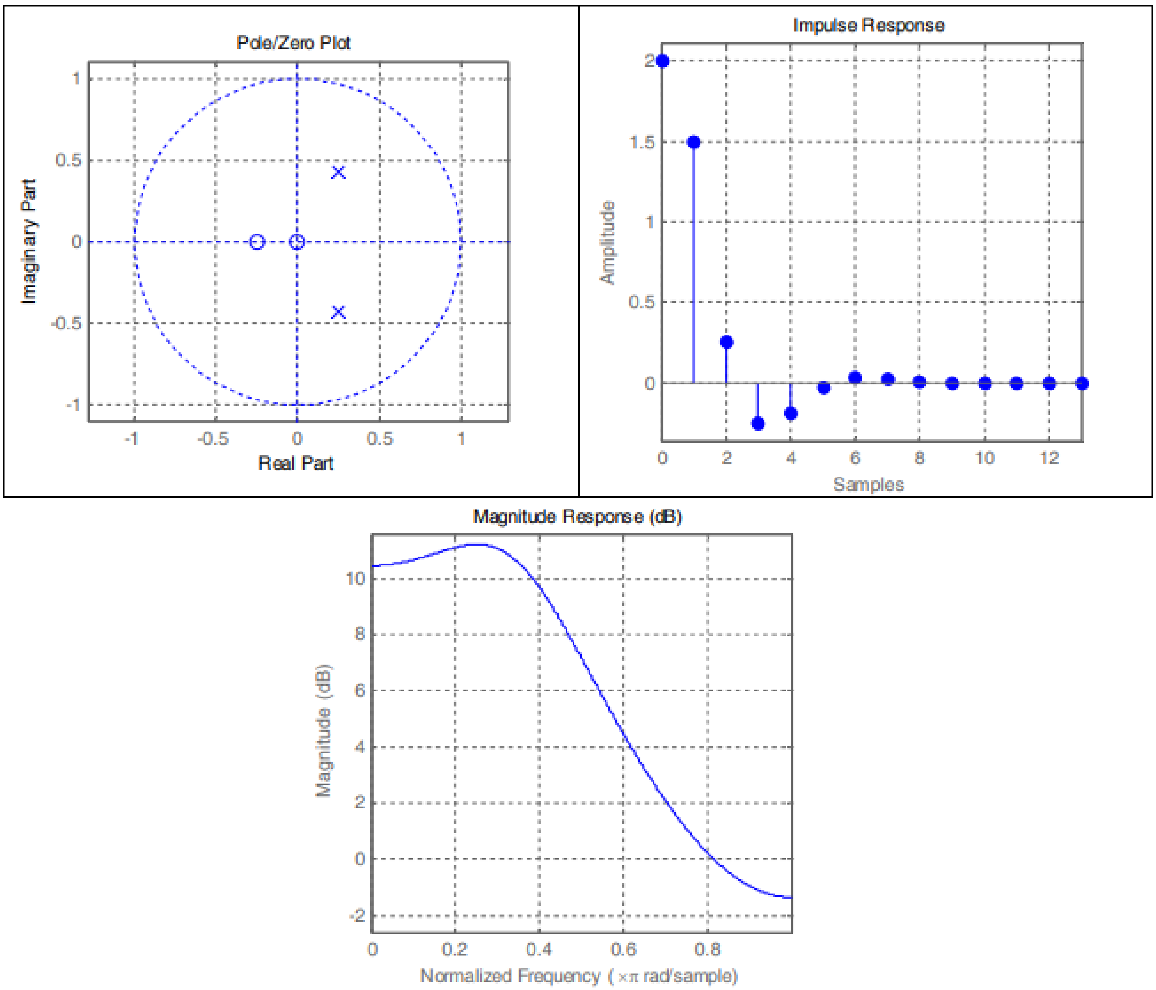
Let us consider another example. The pulse response sequence of a system is $h[n] = 0.5^{n-1}\cos(\frac{\pi}{3}n)$. We can then represent it as a sum of two exponential sequences using the following identity

$$\cos(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}$$

Thus, $h[n] = 0.5^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) = 0.5^{n-1}\frac{e^{j\pi/3n}+e^{-j\pi/3n}}{2} = (0.5e^{j\pi/3})^n + (0.5e^{-j\pi/3})^n = a_1^n + a_2^n$

We can then

$$H(z) = \frac{1}{1-0.5e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{1}{1-0.5e^{-j\pi/3}z^{-1}} = \frac{2-0.5(e^{j\pi/3}+e^{-j\pi/3})z^{-1}}{(1-0.5e^{j\pi/3}z^{-1})(1-0.5e^{-j\pi/3}z^{-1})} = \frac{2-0.5(e^{j\pi/3}+e^{-j\pi/3})z^{-1}}{1-0.5(e^{j\pi/3}+e^{-j\pi/3})z^{-1}+0.25z^{-2}} = \frac{2-\cos(\pi/3)z^{-1}}{1-\cos(\pi/3)z^{-1}+0.25z^{-2}}$$



4.5 For the transfer function

$$H(z) = z^{-1} + z^{-6}$$

of an FIR linear-phase filter,

(a) sketch the impulse response

(b) what is the type of the filter (I, II, III, or IV)?

(c) sketch the frequency response magnitude $|H^f(\omega)|$.

(d) sketch the zero diagram

Solution:

This is a Type 2 FIR filter.

To find the zeros of $H(z)$,

$$z^{-1} + z^{-6} = 0 \tag{17}$$

$$z^5 + 1 = 1 \tag{18}$$

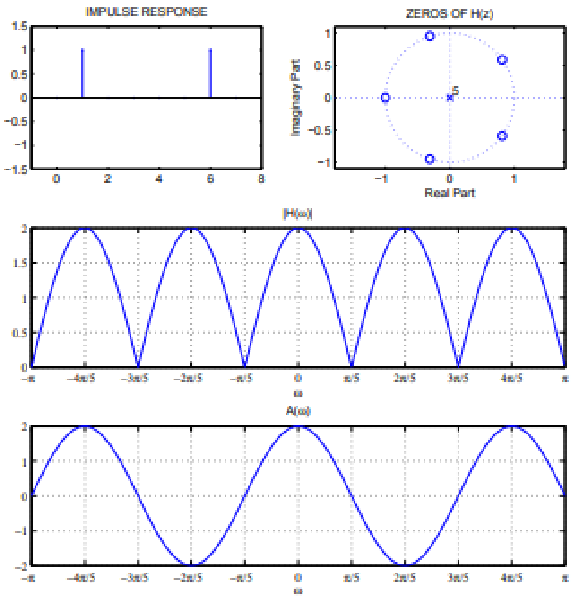
$$z^5 = -1 \tag{19}$$

$$z^5 = e^{j\,\pi} \tag{20}$$

$$z^5 = e^{j\,\pi + j\,2\,\pi\,k} \tag{21}$$

$$z = e^{j\,\pi/5 + j\,(2\,\pi/5)\,k} \tag{22}$$

which for different integer values of k gives the values $z = e^{j\,\pi/5}$, $z = e^{j\,3\,\pi/5}$, $z = e^{j\,5\,\pi/5} = -1$, $z = e^{j\,7\,\pi/5}$, $z = e^{j\,9\,\pi/5}$, and which are shown in the zero diagram.



All the zeros lie on the unit circle, with equal spacing between them. From that, we can sketch the frequency response.

3.6 An FIR digital filter has the transfer function

$$H(z) = (1 - z^{-1})^3 \, (1 + z^{-1})^3$$

(a) Sketch the pole-zero diagram of this system.

(b) Sketch $|H^f(\omega)|$.

(c) Would you classify this as a low-pass, high-pass, band-pass, or band-stop filter? Please briefly explain.

Solution:

Note that because the zero at $z = 1$ is of third order, not only is $H^f(\omega = 0)$ equal to one, but so is its first and second derivative, so the frequency response is flat at $\omega = 0$. The same is true for $\omega = \pi$.