Chapitre 2

I. Les filtres numériques: Généralités

1)Introduction

Des exemples d'utilisation de filtrage sont :

– Réduction de bruit pour des signaux radio, des images issues de capteurs, ou encore des signaux audio.

– Modification de certaines zones de fréquence dans un signal audio ou sur une image.

– Limitation à une bande fréquentielle pré-définie.

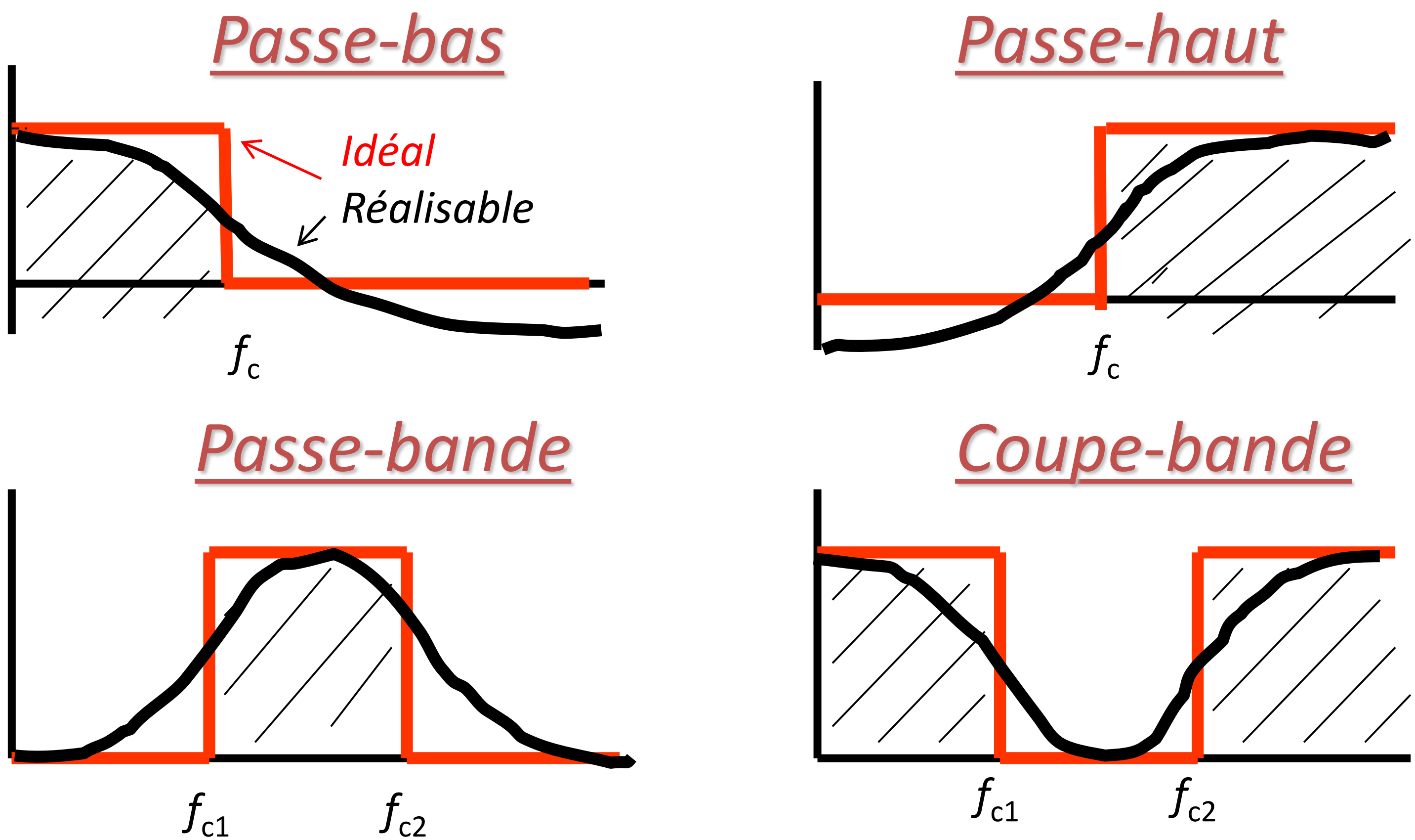
– Fonctions spéciales (dérivation, intégration, transformée de Hilbert, ...).

2) Filtres analogiques

- **Basés sur des composants analogiques**

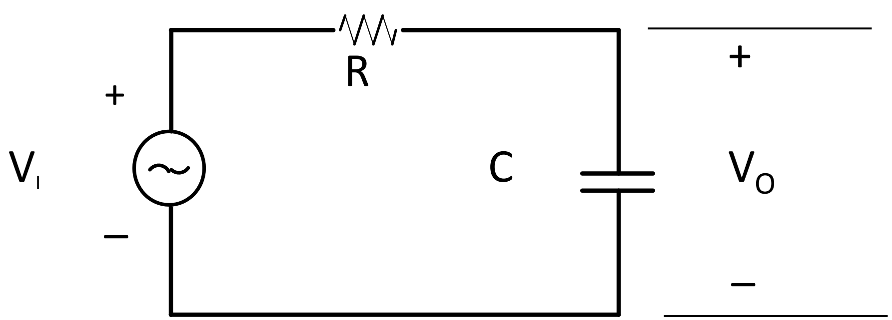
- **Les filtres passifs utilisent uniquement R, L et C et ont un gain inférieurs à 1.**
- **Les filtre analogiques actifs ajoutent des composants actifs (habituellement des amplificateurs opérationnels) pour un gain arbitraire**

2) Filtres analogiques :Quatres types



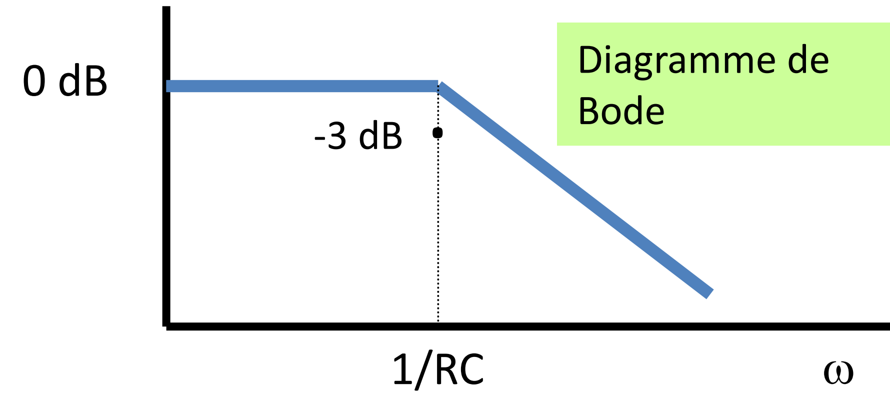
- L’analyse de la réponse en fréquence se fait généralement avec la transformée de Fourier
- La synthèse part de la transformée de Laplace

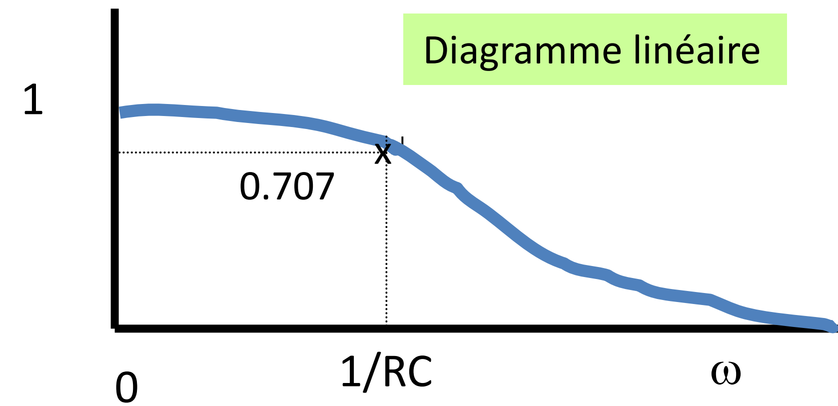
2)Filtre analogiques passifs



Filtre passe-bas de permier ordre

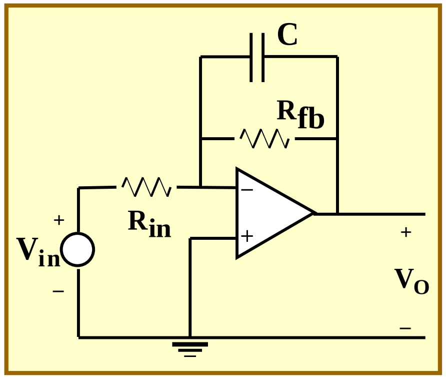
$$\frac{V_o(jw)}{V_i(jw)} = \frac{\frac{1}{jwC}}{R+\frac{1}{jwC}} = \frac{1}{1+jwRC}$$



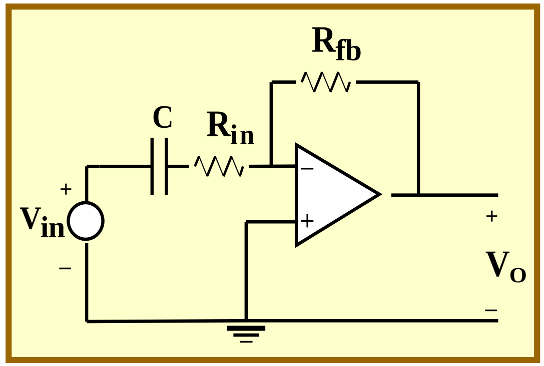


Réponse en amplitude

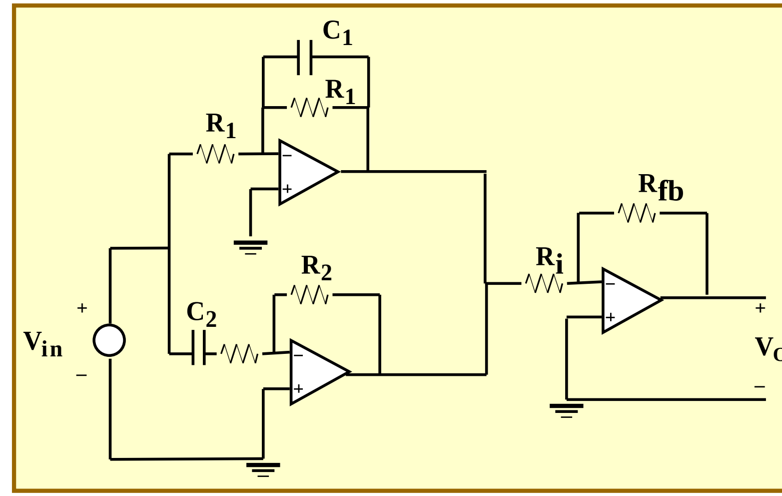
2)Filtre analogiques actifs



Filtre passe-bas du 1er ordre



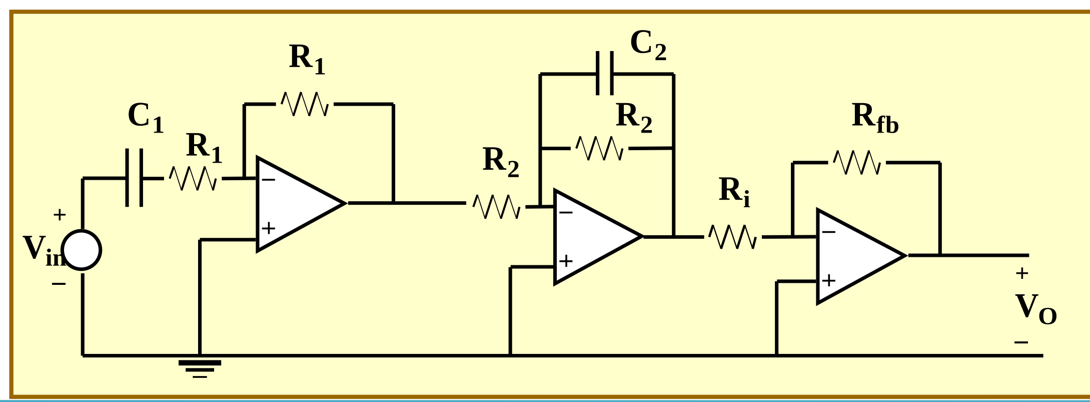
Filtre passe-haut du 1er ordre



Filtre coupe-bande du 2nd ordre

Rappel :

Pour un ampli-op inverseur : $G=-Z_f/Z_i$



Filtre passe-bande du 2nd ordre

3)Les filtres numériques

Définition

Un filtre numérique est un algorithme de calcul qui fait correspondre à une suite d'échantillons x(n) une autre suite d'échantillons y(n):

Equation aux différences : **Une équation reliant le nième terme à ses prédécesseurs est appelée équation récurrente ou équation aux différences**

$$y(n) = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x(n-i) + \sum_{j=1}^{N} a_j y(n-j)$$

X(n): l'entrée du filtre
y(n): la sortie du filtre
aj, bi: les coefficients du filtre

Implémentés : DSP, microprocesseur, microcontrôleurs, FPGA ou …

3)Les filtres numériques

➢une partie fonction de la valeur courante et des valeurs précédentes de l'entrée x(n),

➢et une partie fonction des valeurs précédentes de la sortie y(n).

Fonctions de transfert rationnelle

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i Z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{N} a_j Z^{-j}}$$

➢Selon si les aj sont non nuls ou nuls, on parlera donc de filtres récursifs (IIR) ou de filtres non récursifs (FIR).

3)Les filtres numériques

- **passage de la transformée en z à l’équation de récurrence**

multiplier par z^{-i} ***revient à retarder de*** T_E
(théorème du retard).

4)Equations aux différences

Exemple

Soit la fonction de transfert suivante

Soit $H(z) = \dfrac{z^2 - 3z}{z^2 - 3z + 2}$.

Trouver l'expression de l'équation aux différences

Solution

① Multiplication du numérateur et du dénominateur Par z^{-2} pour n'avoir que des puissances négatives :

$$H(z) = \frac{z^2 - 3z \times z^{-2}}{z^2 - 3z + 2 \times z^{-2}} = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

② Produit en croix :

$$Y(z)\left(1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}\right) = X(z)\left(1 - 3z^{-1}\right).$$

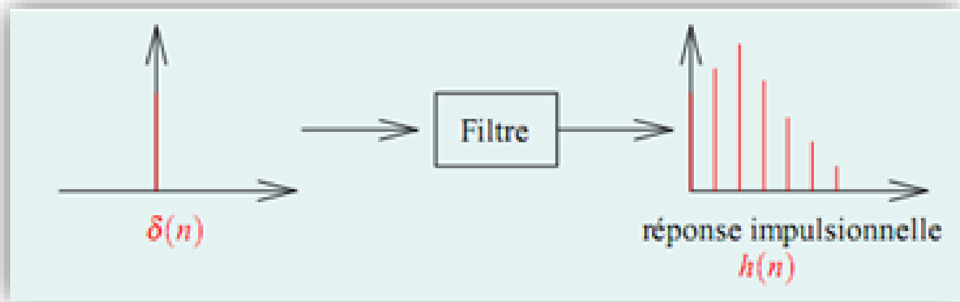
③ Utilisation du théorème du retard :

$$y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = x_n - 3x_{n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_n = x_n - 3x_{n-1} + 3y_{n-1} - 2\, y_{n-2}}$$ C'est l'équation de récurrence.

5)Réponse impulsionnelle (RI)

- ✓ La réponse fournit si la fonction d'entrée est une impulsion de Dirac
- ✓ La réponse impulsionnelle, notée h(n)



La réponse impulsionnelle (RI) est la fonction en z inverse de H(z).

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n).z^{-n}$$

5)Réponse impulsionnelle

Exemple

Soit la fonction de transfert suivante

$$H(z)=\frac{5+2z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$$

1) calculer RI

2) Trouver l'expression de l'équation aux différences

Solution

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{5+2z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} \\ (1-0.8z^{-1})H(z) &= (5+2z^{-1}) \\ H(z) &= 0.8z^{-1}H(z)+5+2z^{-1} \end{aligned}$$

Il est facile d'en déduire l'équation aux différences pour h:

$$h(n)=0.8h(n-1)+5\delta(n)+2\delta(n-1)$$

5)Réponse impulsionnelle

L'équation aux différences peut également être obtenus par la transformée en z:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$y(n) = 0.8y(n-1) + 5x(n) + 2x(n-1)$$

- remplacer δ par x
- remplacer h par y

6)Réponse fréquentielle

La réponse en fréquence peut être obtenue à partir de la fonction de transfert H(z) en remplaçant z par $e^{j\omega}$.

La réponse en fréquence d'un signal discret $h(n)$ est donnée par :

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-jw} = H(z)|_{z=e^{jw}}$$

6)Réponse fréquentielle

Exemple

Soit la fonction de transfert: $$H(z) = \frac{5+2z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$$

Calculer $|H(f)|$

Solution

$$H(\exp^{2\pi jf}) = \frac{5(1+0.4\exp^{-2\pi jf})}{1-0.8\exp^{-2\pi jf}}$$

$$|1-a\exp^{-jx}| = \sqrt{1-2a\cos x+a^2}$$

$$|H(f)| = \frac{5\sqrt{1+0.8\cos(2\pi f)+0.16}}{\sqrt{1-1.6\cos(2\pi f)+0.64}}$$

7)Lien entre réponse fréquentielle et diagramme pole /zéros

- Une « zéro » situé proche du cercle unité entraine « un creux » sur le module de la réponse fréquentielle au voisinage de la fréquence correspondante. Une zéros situé sur le cercle unité annule la réponse fréquentielle pour la fréquence correspondante.
- Un « pôle » proche du cercle unité entraine un « pic » sur la réponse fréquentielle de la fréquence correspondante.

7)Lien entre réponse fréquentielle et diagramme pole /zéros

Exemple

Soit le système définit par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

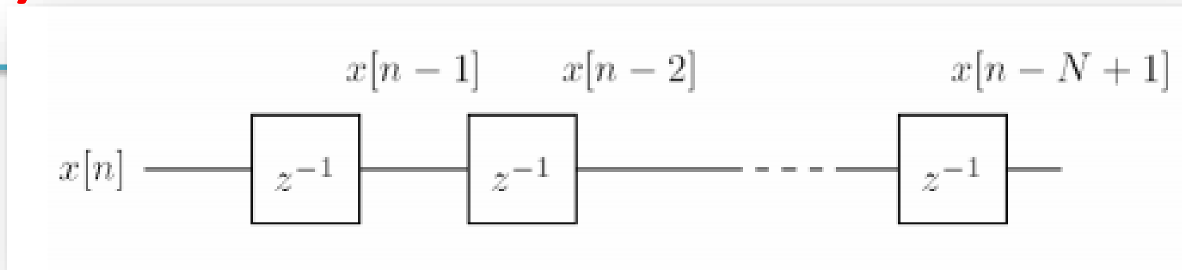
Tracer le module de la réponse fréquentielle de ce système.

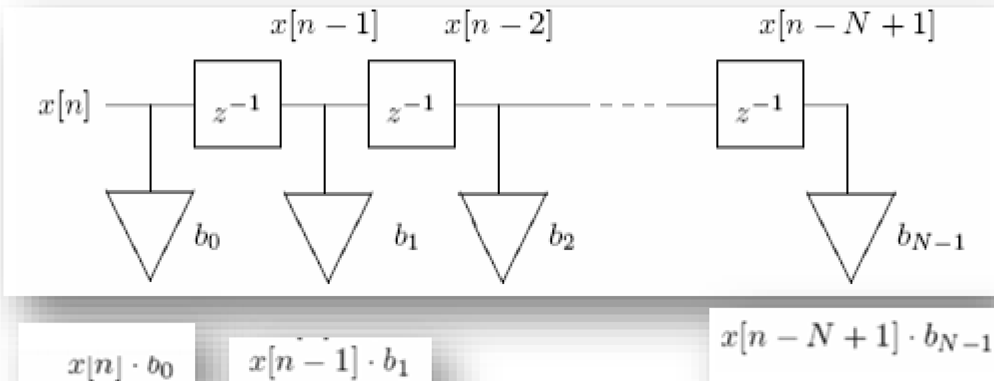
8)Structure d'un filtre numérique

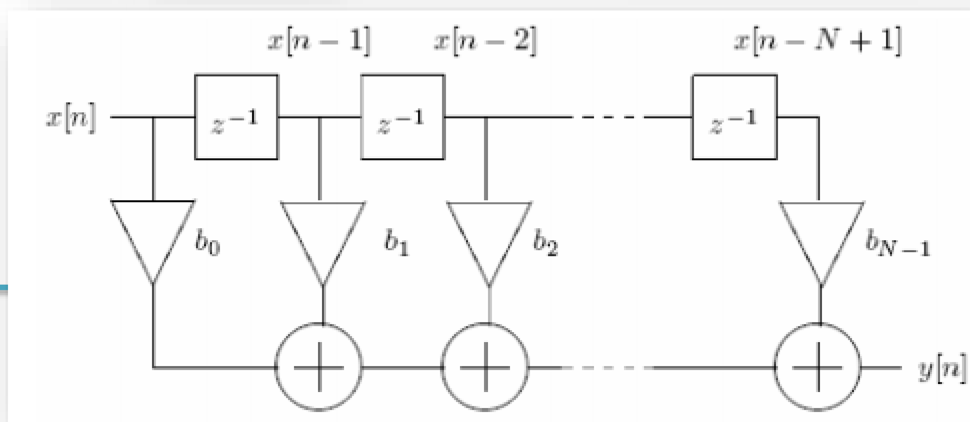
c'est un schéma qui représente l'équation aux différences à partir de trois éléments de base:

- L'additionneur, symbolisé par Σ , qui additionne les signaux à ses entrées.
- Le multiplieur, symbolisé par $\triangleright a$, qui multiplie un signal par un scalaire *a*
- L'élément « délai », symbolisé par $\boxed{z^{-1}}$, qui produit une sortie retardée d'une valeur par rapport à son entrée.

8)Structure d'un filtre numérique







8)Structure d'un filtre numérique

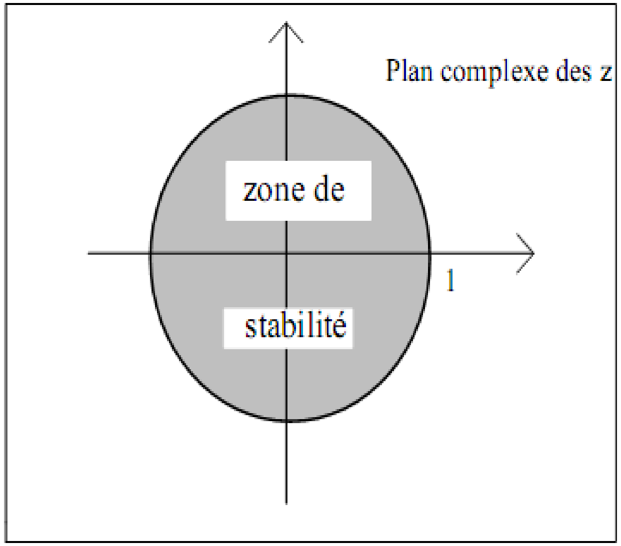
Exemple

Tracer le bloc fonctionnel correspondant à l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

9)Propriétés d'un filtre numérique : Stabilité

- a) stabilité: Un système sera stable si tous les pôles de sa fonction de transfert présentent un module inférieur à 1 ==⇒tous les pôles se trouvent à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe.



- b) Causalité:

Un filtre numérique est dit causal, si sa réponse impulsionnelle h_n est nulle pour n<0. Sa transformée en z converge alors à l'extérieur d'un cercle.