# Université de Boumerdès

Filière: Electronique des systèmes embarqués

# Module: Traitement avancé du signal

Dr. Belkacem Samia

2021/2022

# *Chapitre 1: La transformée en Z*

# 1)Introduction

- La transformée en z est l'équivalent dans le domaine discret de la transformée de Laplace dans le domaine continu.
- **l'étude des systèmes de traitement numérique du signal**
- **permet de décrire les signaux à temps discret**
- **La TZ peut être vue comme l'équivalent, dans le domaine discret (échantillonné), de la transformée de Laplace qui s'applique au domaine continu**
- L'utilisation principale de la transformée en z est pour le design de filtres numériques

# 2)Définitions: Ztrans

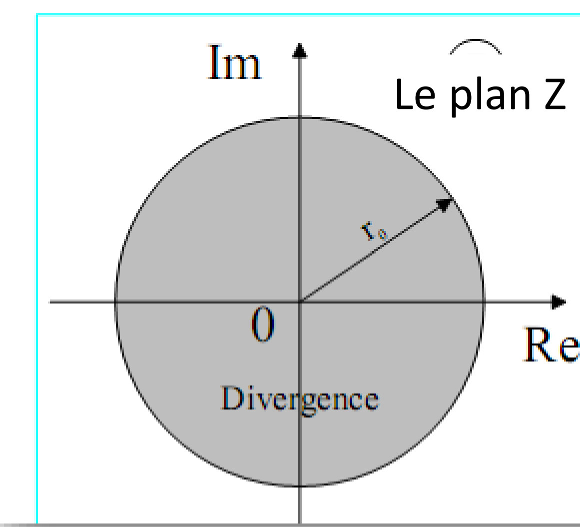
La transformée z d'un signal à temps échantillonné quelconque x[n], noté par X(z) est définie par: $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n) z^{-n}$$

**Où Z c'est une variable complexe**

**Pour une séquence finie x[n], la transformée X(z) est un polynôme en z ou $z^{-1}$**

**La transformée en z doit toujours indiqué sa région de convergence**



# 2) Représentation d'un signal par pôles et zéros

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = A \frac{\prod_{m=1}^{M} (z - z_m)}{\prod_{n=1}^{N} (z - p_n)}$$

**Zéros: [ o] la valeur de Z pour *Y(z)*=0.**

**pôles : [ x] la valeur de Z pour *X(z)*=0.**

$$H(z) = \frac{z+1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{3}{4}\right)}$$

**Qu'elles sont les pôles et les zéros de la fonction de transfert**
**Les pôles et zéros de la H(z) sont:**

Les zéros sont: $\{-1\}$

Les pôles **½ , ¾**

# 2) Représentation d'un signal par des pôles et zéros

## Exemple 3

$$H(z)=\frac{(z-i)(z+i)}{\left(z-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right)\left(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$$

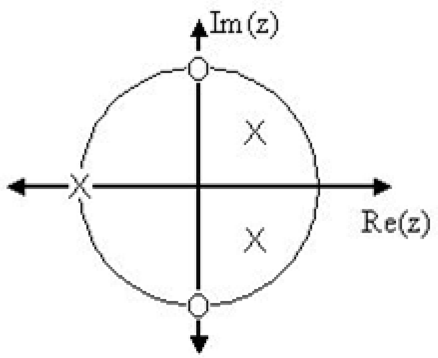
**Zéros: [ o]**

**pôles : [ x]**

Les zéros sont: $:\{i,-i\}$

Les pôles sont : $:\left\{-1,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$

**Pole/Zero Plot**



# 3)Région de convergence: ROC

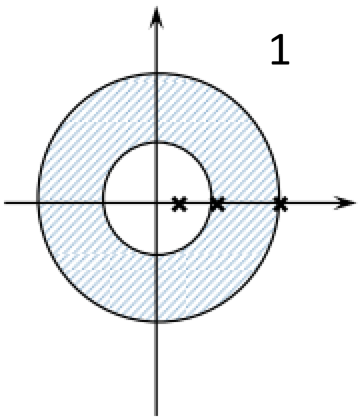
On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum_n a_n z^n$

a) Rappel : Séries entières

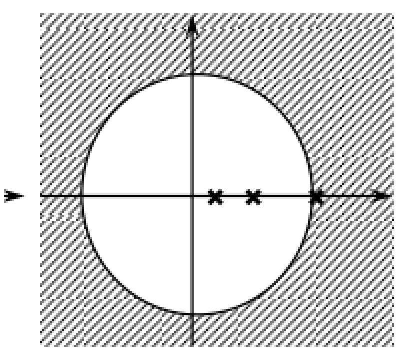
- Le rayon de convergence $R$ d'une série entière $\sum^{+\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{N}$ pour chaque $n$, est $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ où, par convention, on admet que

$$|z| > \frac{1}{R}$$

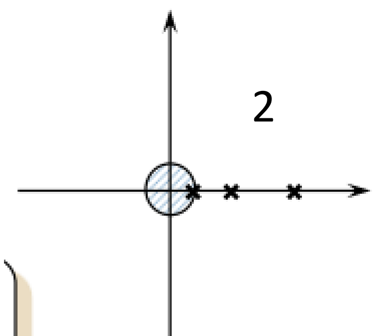
1



3



2



1- ROC c'est un anneau
2- à l'intérieur du cercle
3- à l'extérieur du cercle

# 3)Région de convergence: ROC

## b) Propriétés de RDC (ROC)

- Le domaine de convergence de la transformée en Z correspond aux valeurs de Z pour lesquelles X(z) est de valeur finie
- La transformée en z converge lorsque la série réelle suivante converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| x(n) \cdot z^{-n} \right|$$

- la région de convergence est toujours un anneau, c'est-à-dire est définie par l'ensemble des points z tels que r1 < z < r2, où r1 peut être nul et r2 peut être l'infinie
- RDC est bornée par les pôles
- RDC ne contient aucun pôles

# 3)Région de convergence: RdC

Table de la transformée en Z

| Sequence | Transform | ROC |
|---|---|---|
| $\delta[n]$ | 1 | All $z$ |
| $\delta[n-m]$ | $z^{-m}$ | $\|z\| > 0,\ m > 0;\ \|z\| < \infty,\ m < 0$ |
| $a^n u[n]$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ | $\|z\| > \|a\|$ |
| $-a^n u[-n-1]$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ | $\|z\| < \|a\|$ |
| $na^n u[n]$ | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ | $\|z\| > \|a\|$ |
| $-na^n u[-n-1]$ | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ | $\|z\| < \|a\|$ |
| $a^n \cos(bn)u[n]$ | $\frac{1-a\cos(b)z^{-1}}{1-2a\cos(b)z^{-1}+a^2z^{-2}}$ | $\|z\| > \|a\|$ |
| $a^n \sin(bn)u[n]$ | $\frac{a\sin(b)z^{-1}}{1-2a\cos(b)z^{-1}+a^2z^{-2}}$ | $\|z\| > \|a\|$ |

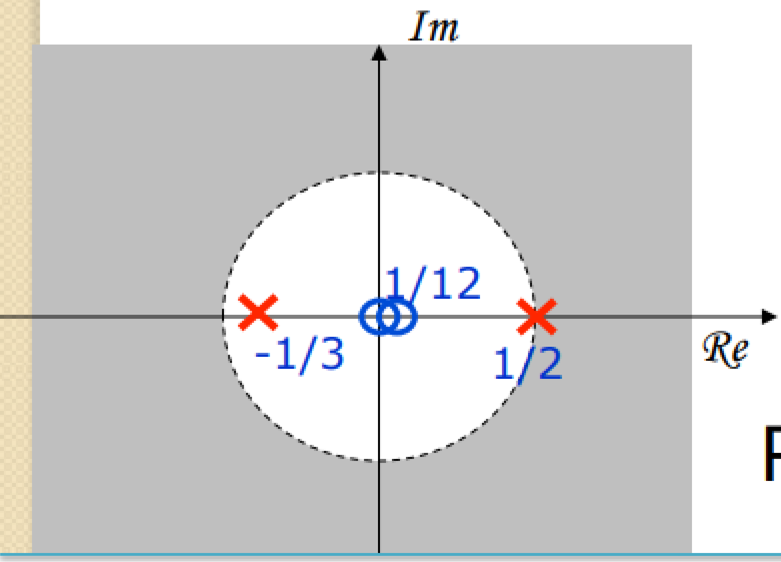
T est la période d’échantillonnage du signal transformé dans lequel on a posé t = nT.

# 3) Région de convergence

**Exemple 1: trouvez la région de convergence RdC**

$$x(n) = (\tfrac{1}{2})^n u(n) + (-\tfrac{1}{3})^n u(n)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z+\frac{1}{3}} = \frac{2z(z-\frac{1}{12})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})}$$




RdC est bornée par les pôles et elle est extérieure au cercle.

RdC ne contient aucun pôl .

# 4) Propriétés de la TZ

- ***Linéarité***

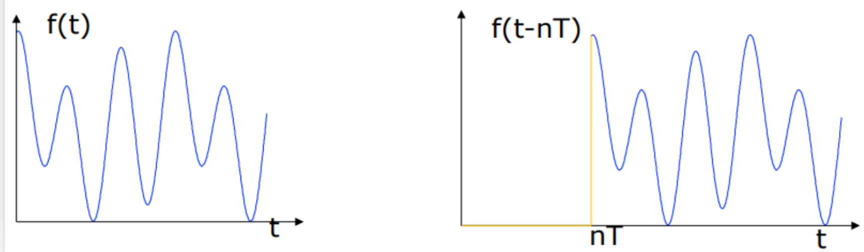
$$Z\big(a\,x(n)+b\,y(n)\big)=a\,X(z)+bY(z)$$

- ***Retard temporel*** Division par Zi

$$Z\big(x(n-1)\big)=z^{-1}X(z)+x(-1)$$

**Théorème du retard:**

La transformée en z de f(t) est F(z), trouver la transformée en z de f(t-nT).




- ***Avance temporel*** Multiplication par Zi

$$Z\big(x(n+i)\big)=z^{i}X(z)-z^{i}\sum_{m=0}^{i-1}x(m)\,z^{-m}$$

Convolution à temps discret

$$g[n]*h[n]\xleftrightarrow{Z}H(z)G(z)$$

Propriété de la dérivée

$$nx(n)\xrightarrow{\text{TZ}}-z\frac{dX(z)}{dz}$$

# 4) Propriétés de la TZ

**Exemple 1** 1) Linéarité

La transformée en z d'une combinaison linéaire de deux signaux est la combinaison linéaire des transformées en z de chaque signal.

$$Z(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) = a_1z(x_1(n)) + a_2z(x_2(n))$$

Exemple

Déterminer la transformé de z de x(n) :

$$x(n) = u(n)\cos(nw_0)$$

Sachant que : $u(n)\left[\frac{e^{jnw_0}+e^{-jnw_0}}{2}\right] \xrightarrow{TZ} \frac{1}{1-e^{jw_0}z^{-1}}$ avec $|z| > 1$

En utilisant la formule d'Euler :

$$X(n) = u(n)\left[\frac{e^{jnw0} + e^{-jnw0}}{2}\right]$$

Donc : $X(z) = \frac{1/2}{1-e^{jw_0}z^{-1}} + \frac{1/2}{1-e^{-jw_0}z^{-1}}$ avec $|z| > 1$

# 4) Propriétés de la TZ

**Déterminer la transformée en z**

## Exemple 2

Soit le signal x(n)

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 1 \\ & 0 \end{cases}$$

-Ecrire ce signal en fonction d'échelon unité

Utiliser le théorème du retard pour déterminer la transformée en z d'une fonction rectangle causale.

# 5) Transformée en Z inverse

✓La transformée en Z inverse permet de retrouver les échantillons du signal.

$$x(n) = TZ^{-1}[X(z)]$$

Méthodes

1. Méthode des résidus
2. Méthode de division polynomiale
3. Méthode de fraction simple

# 5) Transformée en Z inverse

## a) Méthode des résidus

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

On évalue l'intégrale par la méthode des résidus.

Le calcul des résidus dépend de la présence de pôles simples ou multiples sur R(z), i.e. dépend de la présence de zéros simples ou doubles sur D(z).

$$x(n) = \sum_{\text{Tous les pôles } p_i \text{ de } R(z)} \text{Résidus de } R(z) \text{ aux pôles } p_i$$

$$R(z) = z^{n-1} X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$x(n) = \quad \mathcal{R}es\,(R(z), p_i) = \frac{N(z)}{\frac{d}{dz} D(z)}$$

# 5) Transformée en Z inverse

$$x(n) = \sum_{\text{Tous les pôles } p_i \text{ de } R(z)} \text{Résidus de } R(z) \text{ aux pôles } p_i$$

avec $R(z) = z^{n-1}X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ sous forme fractionnelle.

1. Pôles simples de $R(z)$ : $p_i$ tel que $D(z)|_{p_i} = 0$.

$$\mathcal{R}es\,(R(z), p_i) = \frac{N(z)}{\frac{d}{dz}D(z)}$$

2. Pôles multiples d'ordre $m$ de $R(z)$.

   Si $D(z) = (z - p_i)^m F(z)$ avec $F(p_i) \neq 0$ alors

$$\mathcal{R}es\,(R(z), p_i) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-p_i)^m \frac{N(z)}{D(z)}\right]_{z=p_i}$$

# 5) Transformée en Z inverse

Pôles multiples d'ordre m de R(z):

Si $D(z) = (z - p_i)^m F(z)$ avec $F(p_i) \neq 0$ alors

$$\mathcal{R}es\,(R(z), p_i) = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-p_i)^m \frac{N(z)}{D(z)}\right]_{z=p_i}$$

# 5)Transformée en Z inverse

## Exemple : Méthode des résidus

x(n)=?

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-a}} \quad \text{avec } a > 0$$

Il existe un pôle simple $p_1 = e^{-a}$.

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathcal{R}es\left(z^{n-1}X(z), p_1\right) = \mathcal{R}es\left(\frac{z^n}{z - e^{-a}}, p_1\right) \\ &= z^n|_{z=p_1} = e^{-an}.u(n) \end{aligned}$$

# 5)Transformée en Z inverse

## b) Méthode de division polynomiale

La division du polynôme-numérateur par celui du dénominateur conduit à :

**Exemple**

Soit $X(z) = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$

**1. Calculer la TZ inverse et exprimer le résultat par des impulsions de Dirac**

# 7) Transformée en Z inverse

## c) Décomposition en fraction simples

Consiste à décomposer X(z) en éléments simples dont on trouve les originaux dans les tables. Ces éléments sont en général des fractions rationnelles.

Les éléments le plus fréquemment rencontrés sont de la forme :

$\frac{z}{z-1}$ d'original $u(n)$ (échelon unité discret)

$\frac{z}{z-b}$ d'original $b^n u(n)$

$\frac{z}{(z-1)^2}$ d'original $nu(n)$ (rampe unité causale)

## Exemple: décomposition en fraction simples

Soit :

$$X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

X(n)=?

# Chapitre 2

## *I. Les filtres numériques: Généralités*

# 1)Introduction

Des exemples d'utilisation de filtrage sont :

– Réduction de bruit pour des signaux radio, des images issues de capteurs, ou encore des signaux audio.

– Modification de certaines zones de fréquence dans un signal audio ou sur une image.

– Limitation à une bande fréquentielle pré-définie.

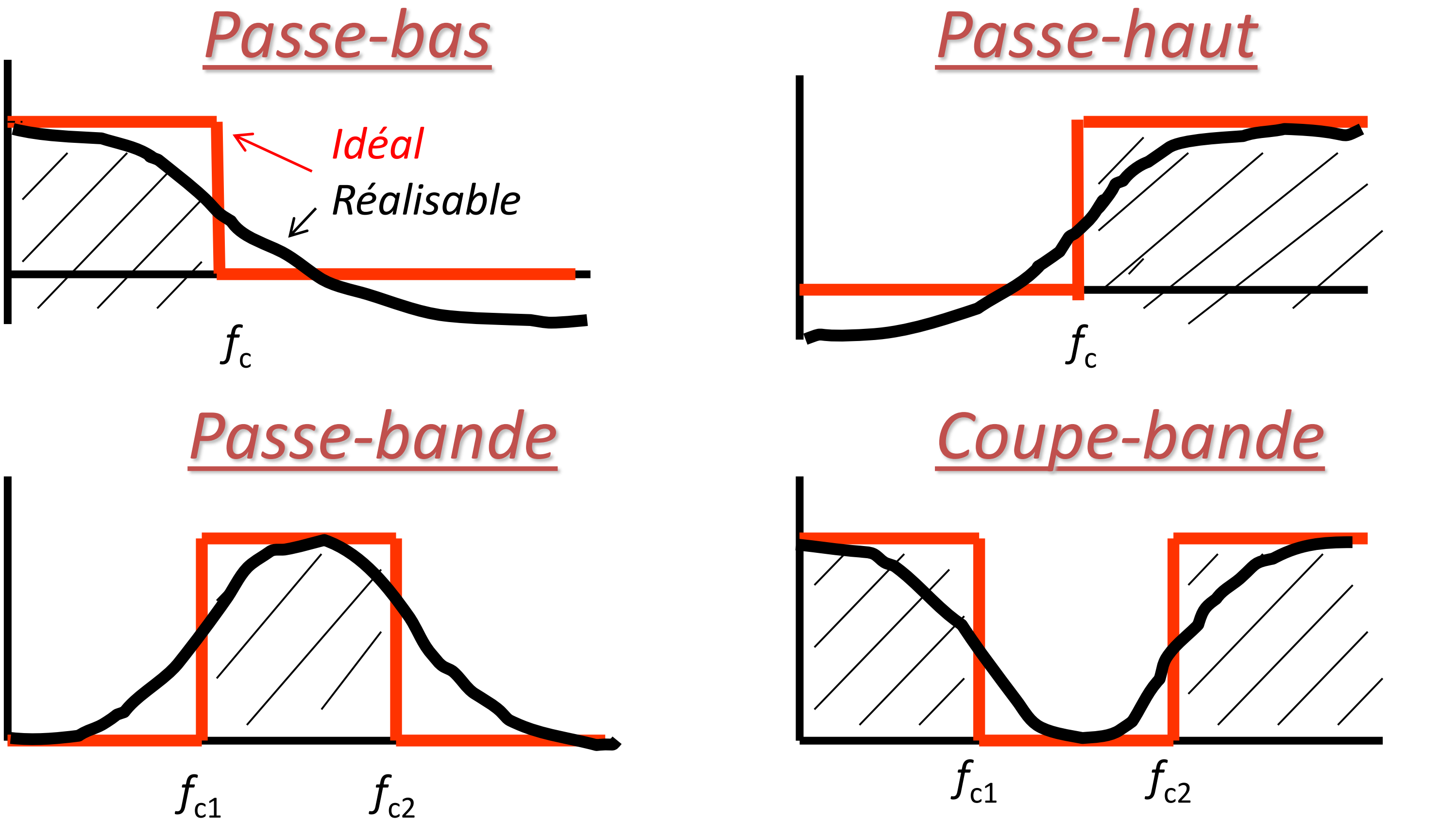
– Fonctions spéciales (dérivation, intégration, transformée de Hilbert, ...).

# 2) Filtres analogiques

- Basés sur des composants analogiques

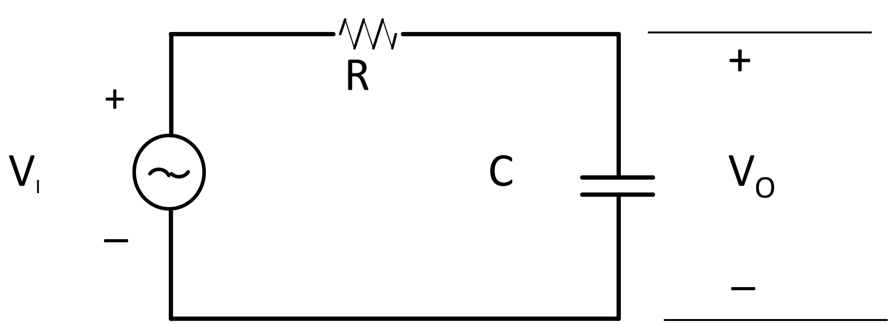
- Les filtres passifs utilisent uniquement R, L et C et ont un gain inférieurs à 1.
- Les filtre analogiques actifs ajoutent des composants actifs (habituellement des amplificateurs opérationnels) pour un gain arbitraire

# 2) Filtres analogiques :Quatres types



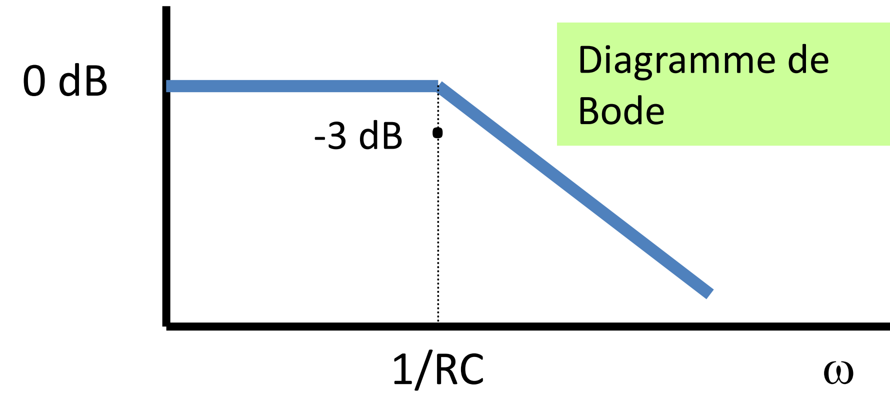

- L'analyse de la réponse en fréquence se fait généralement avec la transformée de Fourier
- La synthèse part de la transformée de Laplace

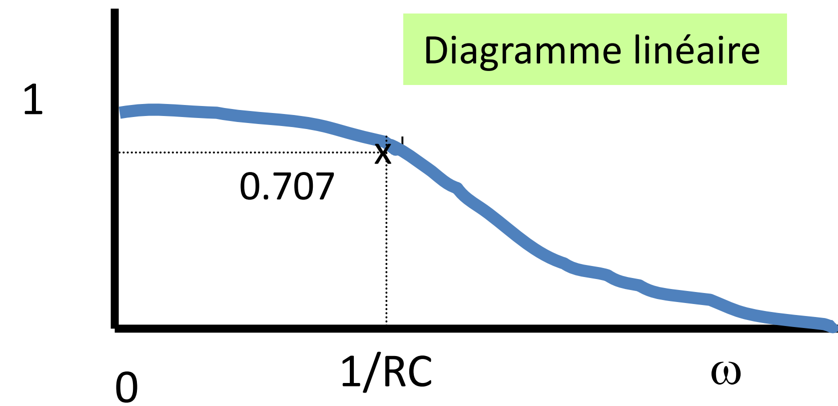
# 2)Filtre analogiques passifs




Filtre passe-bas de permier ordre

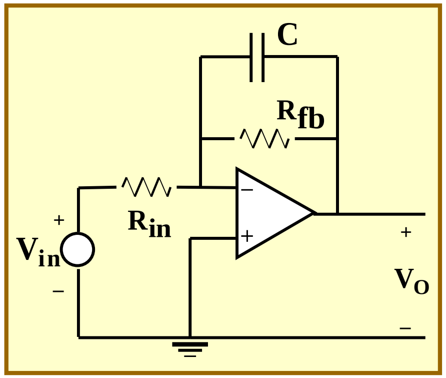
$$\frac{V_O(jw)}{V_i(jw)} = \frac{\frac{1}{jwC}}{R+\frac{1}{jwC}} = \frac{1}{1+jwRC}$$



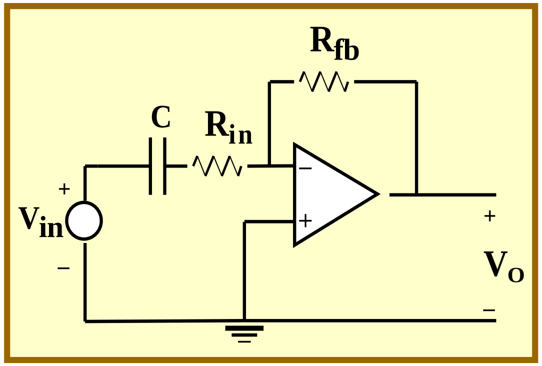




Réponse en amplitude

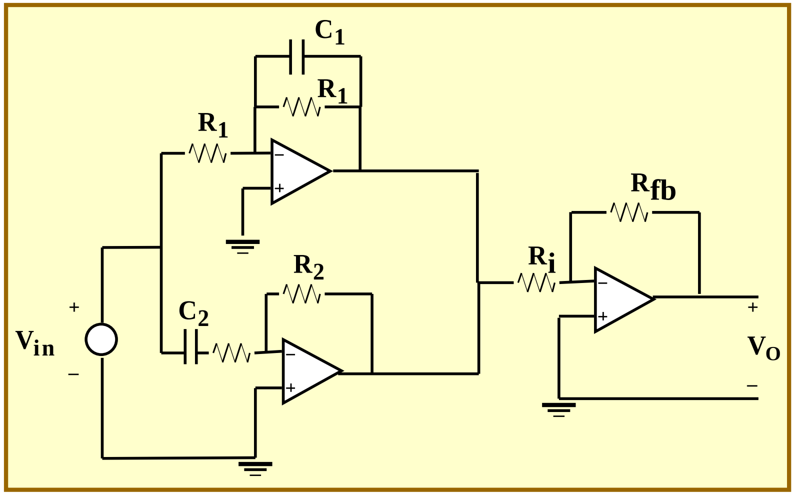
# 2)Filtre analogiques actifs




Filtre passe-bas du 1er ordre



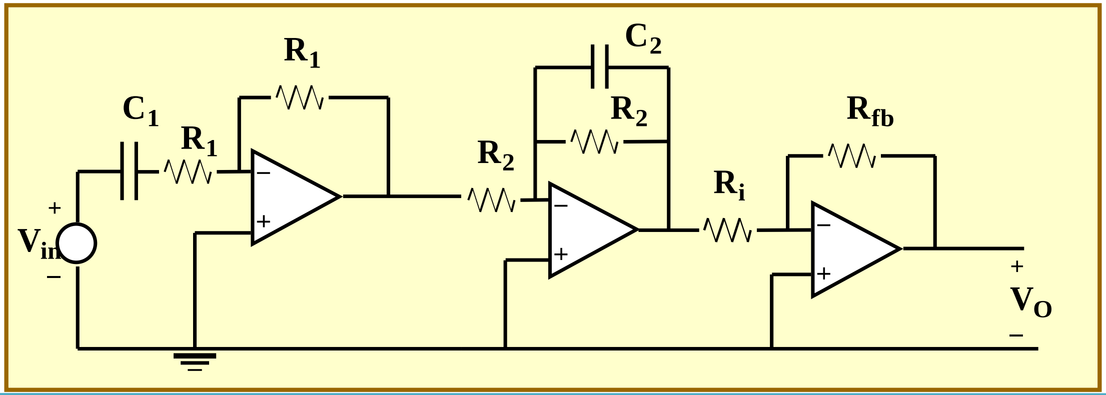

Filtre passe-haut du 1er ordre




Filtre coupe-bande du 2nd ordre

Rappel :

Pour un ampli-op inverseur : $G=-Z_f/Z_i$




Filtre passe-bande du 2nd ordre

# 3)Les filtres numériques

Définition

Un filtre numérique est un algorithme de calcul qui fait correspondre à une suite d'échantillons x(n) une autre suite d'échantillons y(n):

Equation aux différences : **Une équation reliant le nième terme à ses prédécesseurs est appelée équation récurrente ou équation aux différences**

X(n): l'entrée du filtre
y(n): la sortie du filtre
aj, bi: les coefficients du filtre

$$y(n) = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x(n-i) + \sum_{j=1}^{N} a_j y(n-j)$$

**Implémentés : DSP, microprocesseur, microcontrôleurs, FPGA ou …**

# 3)Les filtres numériques

- une partie fonction de la valeur courante et des valeurs précédentes de l'entrée x(n),
- et une partie fonction des valeurs précédentes de la sortie y(n).

Fonctions de transfert rationnelle

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i Z^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{N} a_j Z^{-j}}$$

- Selon si les aj sont non nuls ou nuls, on parlera donc de filtres récursifs (IIR) ou de filtres non récursifs (FIR).

# 3)Les filtres numériques

- **passage de la transformée en z à l'équation de récurrence**

***multiplier par*** $z^{-i}$ ***revient à retarder de*** $T_E$
***( théorème du retard ).***

# 4)Equations aux différences

Exemple

**Soit la fonction de transfert suivante**

Soit $H(z) = \dfrac{z^2 - 3z}{z^2 - 3z + 2}$.

**Trouver l'expression de l'équation aux différences**

Solution

① Multiplication du numérateur et du dénominateur Par $z^{-2}$ pour n'avoir que des puissances négatives :

$$H(z) = \frac{z^2 - 3z \times z^{-2}}{z^2 - 3z + 2 \times z^{-2}} = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} .$$

② Produit en croix :

$$Y(z)\left(1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}\right) = X(z)\left(1 - 3z^{-1}\right) .$$

③ Utilisation du théorème du retard :

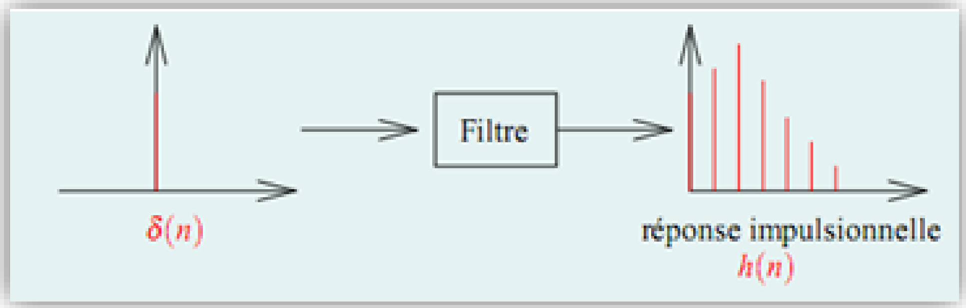
$$y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = x_n - 3x_{n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_n = x_n - 3x_{n-1} + 3y_{n-1} - 2\, y_{n-2}}$$

C'est l'équation de récurrence.

# 5)Réponse impulsionnelle (RI)

- ✓ La réponse fournit si la fonction d'entrée est une impulsion de Dirac
- ✓ La réponse impulsionnelle, notée h(n)




La réponse impulsionnelle (RI) est la fonction en z inverse de H(z).

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n).z^{-n}$$

# 5)Réponse impulsionnelle

Exemple

**Soit la fonction de transfert suivante**

$$H(z) = \frac{5+2z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$$

1) **calculer RI**

2) **Trouver l'expression de l'équation aux différences**

Solution

$$H(z) = \frac{5+2z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$$

$$(1-0.8z^{-1})H(z) = (5+2z^{-1})$$

$$H(z) = 0.8z^{-1}H(z)+5+2z^{-1}$$

Il est facile d'en déduire l'équation aux différences pour $h$:

$$h(n) = 0.8h(n-1)+5\delta(n)+2\delta(n-1)$$

# 5)Réponse impulsionnelle

L'équation aux différences peut également être obtenus par la transformée en $z$:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$y(n) = 0.8y(n-1) + 5x(n) + 2x(n-1)$$

- remplacer $\delta$ par $x$
- remplacer $h$ par $y$

# 6)Réponse fréquentielle

La réponse en fréquence peut être obtenue à partir de la fonction de transfert H(z) en remplaçant z par $e^{j\omega}$.

La réponse en fréquence d'un signal discret $h(n)$est donnée par :

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-jw} = H(z)|_{z=e^{jw\theta}}$$

# 6)Réponse fréquentielle

## Exemple

Soit la fonction de transfert: $$H(z) = \frac{5+2z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$$

Calculer $|H(f)|$

## Solution

$$H(\exp^{2\pi jf}) = \frac{5(1+0.4\exp^{-2\pi jf})}{1-0.8\exp^{-2\pi jf}}$$

$$|1-a\exp^{-jx}| = \sqrt{1-2a\cos x+a^2}$$

$$|H(f)| = \frac{5\sqrt{1+0.8\cos(2\pi f)+0.16}}{\sqrt{1-1.6\cos(2\pi f)+0.64}}$$

# 7)Lien entre réponse fréquentielle et diagramme pole /zéros

- Une « zéro » situé proche du cercle unité entraine « un creux » sur le module de la réponse fréquentielle au voisinage de la fréquence correspondante. Une zéros situé sur le cercle unité annule la réponse fréquentielle pour la fréquence correspondante.
- Un « pôle » proche du cercle unité entraine un « pic » sur la réponse fréquentielle de la fréquence correspondante.

# 7)Lien entre réponse fréquentielle et diagramme pole /zéros

Exemple

Soit le système définit par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

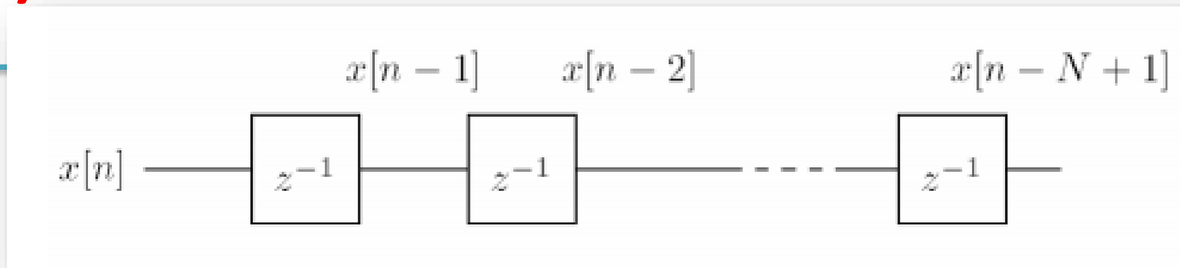
Tracer le module de la réponse fréquentielle de ce système.

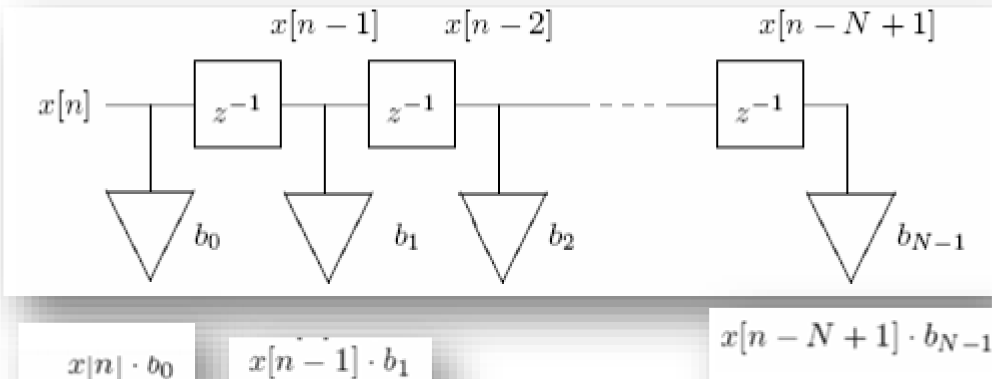
# 8)Structure d’un filtre numérique

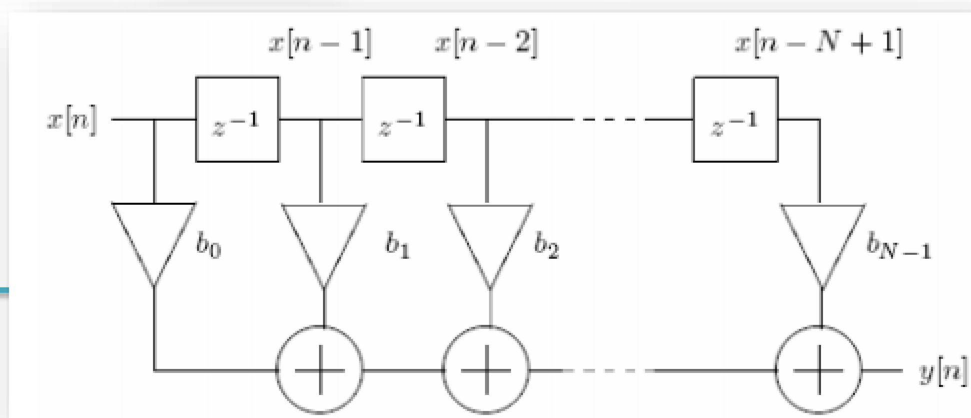
c’est un schéma qui représente l’équation aux différences à partir de trois éléments de base:

- L’additionneur, symbolisé par $\Sigma$, qui additionne les signaux à ses entrées.
- Le multiplieur, symbolisé par $\triangleright a$, qui multiplie un signal par un scalaire *a*
- L’élément « délai », symbolisé par $\boxed{z^{-1}}$, qui produit une sortie retardée d’une valeur par rapport à son entrée.

# 8)Structure d’un filtre numérique



# 8)Structure d'un filtre numérique

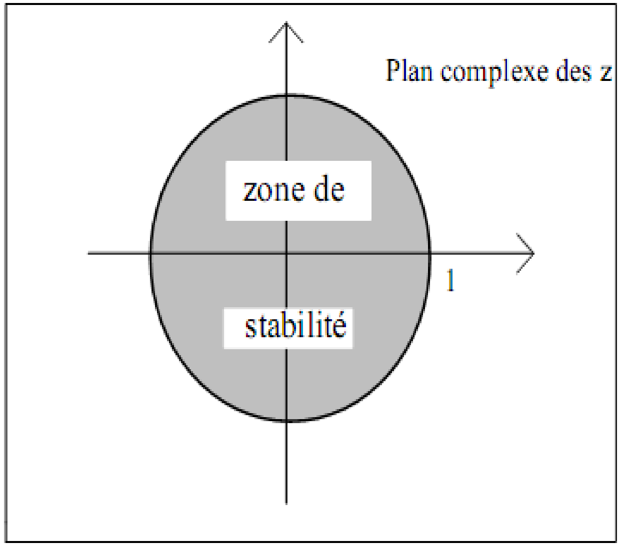
## Exemple

Tracer le bloc fonctionnel correspondant à l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

# 9)Propriétés d'un filtre numérique : Stabilité

- a) stabilité: Un système sera stable si tous les pôles de sa fonction de transfert présentent un module inférieur à 1 ⟹tous les pôles se trouvent à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe.




- b) Causalité:

Un filtre numérique est dit causal, si sa réponse impulsionnelle $h_n$ est nulle pour n<0. Sa transformée en z converge alors à l'extérieur d'un cercle.