UMBB, Faculté des sciences, Département de Mathématiques.   Année 2020 /2021

Master 1- Mathématiques Financières -PAA

Corrigé de la Série N° 2

Exercice 2 :

$$E(Y/X=x)=\int yf(Y/X)dx=\int_R y\frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy=\frac{\int_R yf(x,y)dy}{\int_R f(x,y)dy}=\frac{I_1}{I_2}$$

I1= $\int yf(x,y)dy=n(n-1)\int_x^1 y(y-x)^{n-2}dy=n(n-1)^{n-1}-(1-x)^n=(1-x)^{n-1}(n-1+x)$

I2= $\int f(x,y)dy=n(n-1)\int_x^1 (y-x)^{n-2}dy=n(1-x)^{n-1}$

Donc :

$$E(Y/X=x)=\frac{I_1}{I_2}=\frac{(1-x)^{n-1}(n-1+x)}{n(1-x)^{n-1}}=\frac{n-1+x}{n}$$

Exercice 3

Les lois de $X(\omega)=\omega_1+\omega_2$ et $Y(\omega)=|\omega_1-\omega_2|$ sont données dans les tableaux suivants :

X	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Y	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

Par simple dénombrement, on obtient leur loi conjointe et les marginales :

$Y\backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	
0	1/16	0	1/16	0	1/16	0	1/16	4/16
1	0	2/16	0	2/16	0	2/16	0	6/16
2	0	0	2/16	0	2/16	0	0	4/16
3	0	0	0	2/16	0	0	0	2/16
	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16	

On en déduit les espérances

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x=2}^{8}x\mathbb{P}\{X=x\}=5\,,\qquad \mathbb{E}(Y)=\sum_{y=0}^{3}y\mathbb{P}\{Y=y\}=\frac{5}{4}\,.$$

3. *Calculer* $\mathbb{E}(X|Y)$ *et* $\mathbb{E}(Y|X)$.

Notons $\mathbb{E}(X|Y=y)$ la valeur constante de $\mathbb{E}(Y|X)$ sur l'ensemble $\{Y=y\}$. Il suit de la relation (3.2.11) du cours que

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \frac{\mathbb{E}(X1_{\{Y=y\}})}{\mathbb{P}\{Y=y\}} = \sum_x x\frac{\mathbb{P}\{X=x, Y=y\}}{\mathbb{P}\{Y=y\}} = \sum_x x\mathbb{P}\{X=x|Y=y\} .$$

En appliquant à notre cas, on obtient

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = 5 \quad \forall y \in \{0,1,2,3\} ,$$

ce qui traduit le fait que la distribution de X est symétrique autour de 5 pour tout Y. De manière similaire, on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Y|X=2) = \mathbb{E}(Y|X=8) = 0 , \\
&\mathbb{E}(Y|X=3) = \mathbb{E}(Y|X=7) = 1 , \\
&\mathbb{E}(Y|X=4) = \mathbb{E}(Y|X=6) = \tfrac{4}{3} , \\
&\mathbb{E}(Y|X=5) = 2 .
\end{aligned}$$

Cela permet en particulier de vérifier que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Y)$.

Exercice 4 :

Un choix possible d'espace probabilisé est $\Omega = \{1,\dots,6\} \times \{0,1\}^6$, avec la probabilité uniforme et

$$N(\omega) = \omega_1 , \qquad X(\omega) = \sum_{i=1}^{\omega_1} \omega_{i+1} .$$

Avant de calculer $\mathbb{E}(X)$, commençons par calculer $\mathbb{E}(X|N)$. Conditionnellement à $N=n$, X suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$, d'où

$$\mathbb{E}(X|N) = \frac{N}{2} .$$

suffit alors de prendre l'espérance pour conclure :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|N)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(N) = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2} = \frac{7}{4} .$$

Exercice 5 :

Soit $X = 1_A$ et $Y = 1_B$.

- Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
  Or
  $$\int_A Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap B} \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}(Y) = \int_A \mathbb{E}(Y)\,\mathrm{d}\mathbb{P} \;.$$
  On vérifie facilement des relations analogues avec A remplaçé par A^c, par $\emptyset$ et par Ω. Comme $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ et $\mathbb{E}(Y) \subseteq \mathcal{F}_0 \subset \sigma(X)$, on a bien que $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$.
- Supposons que $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$. Comme $A \in \sigma(X)$ on a

$$\mathbb{E}(XY) = \int_A Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(Y|X)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(Y)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}(Y)\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) \;.$$

Le résultat s'étend à des variables aléatoires quelconques de la manière habituelle, en les décomposant en partie positive et négative et en approchant chaque partie par des fonctions étagées.

Exercice 6 :

Notons $X_2 = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)$ et $X_1 = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1)$. On a

$$\mathbb{E}(XX_1) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(XX_1|\mathcal{F}_1)\big) = \mathbb{E}\big(X_1\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)\big) = \mathbb{E}(X_1^2) \;.$$

Par conséquent, en développant le carré on obtient

$$\mathbb{E}\big([X - X_1]^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X_1^2) \;.$$

Notons $X_2 = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)$ et $X_1 = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1)$. On a

$$\mathbb{E}(XX_1) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(XX_1|\mathcal{F}_1)\big) = \mathbb{E}\big(X_1\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)\big) = \mathbb{E}(X_1^2) \;.$$

Par conséquent, en développant le carré on obtient

$$\mathbb{E}\big([X - X_1]^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X_1^2) \;.$$

De manière similaire, on montre que $\mathbb{E}(XX_2) = \mathbb{E}(X_2^2)$ et $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1^2)$, d'où

$$\mathbb{E}\big([X - X_2]^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X_2^2) \;,$$
$$\mathbb{E}\big([X_2 - X_1]^2\big) = \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_1^2) \;.$$