UMBB, Faculté des sciences, Département de Mathématiques.   Année 2020 /2021

Master 1- Mathématiques Financières -PAA

Série N° 2

Exercice 1 : On note S_1, S_2, ….le cours journalier d'une action. On appelle rendement de l'action $\rho_n = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_n}$. Cette quantité est aléatoire et on suppose que le rendement entre le jour *(n-1)* et le jour *n* ne dépend pas des valeurs S_1, S_2 …S_{n-1} prises par l'action dans le passé. Cela revient donc à supposer que ρ_n est indépendant de $F_{n-1} = \sigma(S_1, \cdots, S_{n-1})$. On suppose aussi qu'on connait la valeur moyenne $\bar{\rho} = E(\rho_n)$ du rendement. Calculer $E(S_n / F_{n-1})$

Exercice 2 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe

$$f(x,y) = n(n-1)(y-x)^{n-2}\, 1_{\{0 \le x \le y \le 1\}}.$$

Monter que E(X /Y) = (n-1+X)/n.

Exercice 3 : Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, dont les faces sont numérotées de 1 à 4, on considère les variables aléatoires X, égale à la somme des points, et Y, égale à leur différence (en valeur absolue).

1. Spécifier un espace probabilisé permettant de décrire cette expérience. Il suffit de prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^2$ avec la probabilité uniforme.
2. Déterminer la loi conjointe de X et Y ainsi que leurs espérances.

Exercice 4

On jette un dé symétrique, puis on jette une pièce de monnaie autant de fois que le dé indique de points. Soit X le nombre de Pile obtenus. Déterminer E(X).

Exercice 5

Soient X, Y des variables aléatoires réelles intégrables telles que XY soit également intégrable. Montrer les implications :

$$X, Y \text{ indépendantes} \Rightarrow \mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y) \Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Indication : Commencer par considérer des fonctions indicatrices.

Exercice 6 (sup)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, et* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ *des sous-tribus de* $\mathcal{F}$.

1. *Montrer que*

$$\mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)]^2\right) + \mathbb{E}\left([\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)]^2\right) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)]^2\right)$$