UMBB, Faculté des sciences, Département de Mathématiques. Année 2020 /2021

Master 1- Mathématiques Financières -PAA

Série N° 1

Exercice 1 :

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires réelles indépendantes de loi N(0,1).

1) Déterminer la loi du couple (U, V) avec : U=X+Y+Z et V=X-Y.
2) Déduire que U et V sont indépendants.

Exercice 2 : Soit $X_1, \ldots X_d$ variables indépendantes de loi N(0,1) .Déterminer la loi de $Y = \sum_{k=1}^{d} a_k X_k$ = avec $a_1, \cdots a_d$ des scalaires.

Exercice 3 : Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire de loi $N_3(M, \Sigma)$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Quelles sont les lois de X, de Y, de Z, de –X+2Z.
2) Le vecteur (X, Y+Z) est il un vecteur gaussien ? Déterminer sa loi.

Exercice 4 : Soit X variable aléatoire de loi N(0,1) et T indépendante de X telle que

P(T=1) = P(T= -1) = 1/2. On pose Y=TX

1) Déterminer la loi de Y.
2) Calculer la cov(X, Y) ;
3) Le vecteur (X, Y) est il gaussien ? les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 5: Soit $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ où $|\rho| \prec 1$

1) Montrer qu'il existe un vecteur gaussien $X=(X_1, X_2)^t$ de moyenne nulle et de matrice de covariance Γ .
2) On pose : $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)$ et $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$

a) Montrer que $Y= (Y_1, Y_2)^t$ est vecteur gaussien et calculer la matrice de covariance du Y.
b) Les variables aléatoires Y_1, Y_2 sont-elles indépendantes ?
c) Montrer que la loi de Y admet une densité.

Exercice 6 : Déterminer la fonction caractéristique et la densité d'un couple gaussien de moyenne $m=(2,2)^t$ et de matrice de covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 7 : Soit $X=(X_1, X_2, X_3, X_4)^t$ un vecteur gaussien $N(M_X, \Sigma)$ où $M_X=0$ et

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

On définit le vecteur $Y= (Y_1, Y_2, Y_3)^t$ par : $\begin{cases} Y_1 = 5X_1 + X_2 + \beta X_3 + \alpha X_4 \\ Y_2 = X_1 - X_2 + X_4 \\ Y_3 = -X_1 - X_2 + X_3 \end{cases}$

1) Déterminer la loi de Y.
2) Pour quelle valeurs de α et β , Y_1, Y_2 ,Y_3 sont-elles indépendantes ? sous cette condition, calculer $E\left(Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2\right)$

Exercice 8 : On considère la matrice définie par $\Sigma = \begin{pmatrix} \theta & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \theta & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \theta & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \theta \end{pmatrix}$

Où θ est un réel positif.

1) A quelle condition Σ est une matrice de covariance ?
2) On suppose que les conditions de la question 1 sont réalisées et on considère le vecteur aléatoire $X=(X_1, X_2, X_3, X_4)^t$ de loi $N_4(M_X, \Sigma)$ ou $M_X=0$.

On définit le vecteur $Y= (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)^t$ par : $\begin{cases} Y_1 = X_1 - X_2 + X_3 + X_4 \\ Y_2 = X_2 + X_3 \\ Y_3 = -X_2 - X_4 \\ Y_4 = -X_1 - X_2 \end{cases}$

2.1) Déterminer la loi de Y.

2.2) Pour $\theta=3$, que constate-t-on ?

Exercice 8

Le nombre d'atterrissages d'avions dans un aéroport en un jour est une variable aléatoire d'espérance mathématique égale à 60.

1) Estimer la probabilité que le nombre d'atterrissages dépasse 80 en un jour donné.
2) Si on sait que la variance de X du nombre d'atterrissages vaut 20, quelle est la probabilité que un jour donné le nombre d'atterrissages soit comprise entre 45 et 75 ?

Exercice 9 :

1) La probabilité de gagner dans une loterie est égale à 0.01. Combien vous faut-il acheter de billets pour que la probabilité de gagner au moins un lot soit supérieure ou égale à 0.90 ?
2) On lance une pièce de monnaie 1000 fois. Quelle est la probabilité que le nombre de piles soit compris entre 400 et 600.

Exercice 10 : soit n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, … ,X_n suivant toutes une loi de poisson de paramètre $\lambda = 1$

1) Utiliser l'inégalité de Markov pour estimer $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 20\right)$. étudier le cas pour n=15 et n=20.
2) Utiliser le théorème de la limite centrale pour évaluer $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 20\right)$