

Chapitre 01 - Vecteurs gaussien.

1/ Vecteurs aléatoire réels.

On a vu qu'une variable aléatoire était une application permettant d'associer un nbre réel à tout événement élémentaire de l'ensemble fondamentale (Ω) d'une expérience aléatoire, toute fois il est tout à fait possible d'envisager une app diff associant à tous événement élémentaire de (Ω)

Exemple:

considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à 6 faces, si l'on note $\{w_i\}$ l'événement : la face i est apparue l'issue du lancer, on peut alors définir les appls est de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui définissent par :

$$\left. \begin{aligned} X_1(w_i) &= i \\ X_2(w_i) &= i^2 \\ X_3(w_i) &= e^i \end{aligned} \right\} d=3.$$

On peut dire que X est une application de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ si : $d=3$.

variables aléatoires forment un vecteur aléatoire ^(vecteur $\Rightarrow$ admissible $\text{for } \mathbb{R}^d$)
aléatoire : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

- Les vecteurs aléatoires seront donc représentés par des vecteurs colonnes de X .

2) - Fonction de Répartition :

On appelle fonction de Répartition (conjointe) du vecteur aléatoire $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ l'application :

F_X définie sur $\mathbb{R}^d$ et x valeurs dans $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{par : } F_X(x) &= P_x([-\infty, x_1] \times [-\infty, x_2] \times \dots \\ &= P(X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2 \dots \\ &\quad \cap X_d \leq x_d) \end{aligned}$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^d \{X \leq x_i\}\right)$$

ou : $x = (x_1, \dots, x_d)^t$ est vecteur de $\mathbb{R}^d$.

" 2 variables indépendantes $\Rightarrow P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$ "

• Proposition :

$$\text{on a : } \lim F_X(x) = 0$$

$$\forall i : x_i \rightarrow -\infty$$

si: $\lim F_X(x) = 1$:

$\forall i: x_i \rightarrow +\infty$

3/ Vecteur aléatoire et indépendance:

Soit $X_1, X_2, \dots, X_d$ une suite finie d'une v. al.
modélisés respectant par $(\Omega_{x_i}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{x_i})$

avec: $(i=1 \dots d)$ ind si pour tout

ensemble $I \subset \{1, \dots, d\}$ d'indices on a:

$$\forall y \in I: P\left(\bigcap_{j \in I} X_j \in A_j\right) = \prod_{j \in I} P_{x_j}(A_j)$$

4/ Esperance mathématique:

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vect de $\mathbb{R}^d$, on définit

le vect moyen de X par: $M_X = E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_d) \end{pmatrix}$
(l'esperance de vect X)

on dit que X est centrée si: $E(X) = 0$

5/ Matrice de variance (covariance):

Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$ un vect dans $\mathbb{R}^d$

$$E(X_j^2), j = 1 \dots d$$

on définit la matrice covariance par:

$$\Sigma_X = E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T]$$

$$\begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_d) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & & \text{Cov}(X_2, X_d) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_i, X_j) & & & \text{Var}(X_d) \end{pmatrix}$$

Remarque.

- La diagonale de la matrice de covariance X est constituée des variances de ses composantes

$$\Sigma_{ii} = \text{Cov}(X_i, X_i) = \text{Var}(X_i)$$

- Si les composants de X sont indépendants la matrice Σ est diagonale car :

$$\Sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

La réciproque est fautive en générale.

Proposition.

La matrice de covariance Σ_X d'un vect aléa est tjrs symétrique et semi-définie positive

$$\text{rg. } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\text{Cov}(X, X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$$

- Symétrique car :

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

$$\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$$

• semi-définie positive =

$$\forall \mu \in \mathbb{R}^d, \mu^t \Sigma_x \mu \geq 0$$

(μ vecteur aléatoire)

6 Fonction caractéristique:

La fonction caractéristique : $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
d'une vect aléa réel.

- X est la transformation de Fourier de la Loi
de Proba: $\phi_x(t) = E(e^{itx}) \quad t \in \mathbb{R}$.

- si X admet une densité p_x alors:

$$\phi_x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} p_x(x) dx.$$

Proposition: on a deux vars X et Y tq:

$$\phi_x(t) = \phi_y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

si: X et Y ont la même loi.

$$\text{c.à.d: } P(X \in A) = P(Y \in A)$$

Pour tout borélien A de $\mathbb{R}$.

• Si X ou Y admet une densité alors l'autre
Var aléa admet une densité aussi et

$$p_x(z) = p_y(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Proposition 02 =

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \phi_{\lambda x}(t) = \phi_x(\lambda t) = E(e^{it\lambda x})$

- $\forall a \in \mathbb{R} : \phi_{x+a}(t) = e^{iat} \cdot \phi_x(t)$

en effet :

$$\begin{aligned} \phi_{x+a}(t) &= E(e^{it(x+a)}) = e^{ita} \cdot E(e^{itx}) \\ &= e^{ita} \phi_x(t) \end{aligned}$$

- soit $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X)$

$$\mu = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

on a :

$$\phi_x(t) = \phi_{\mu}(\sigma t) e^{it\mu}$$

$$\phi_{\mu}(t) = \phi_x\left(\frac{t}{\sigma}\right) e^{it \cdot \frac{\mu}{\sigma}}$$

donc :

$$\begin{aligned} \phi_x(t) &= E(e^{itx}) = E(e^{it(\mu + \sigma\mu)}) \\ &= e^{it\mu} \cdot E(e^{it\sigma\mu}) \\ &= e^{it\mu} \cdot \phi_{\mu}(\sigma t) \end{aligned}$$

de même pour $\phi_{\mu}(t)$.

- si X et Y indépendants $\Rightarrow \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$

d'où on a:

$$E(e^{i(x+y)t}) = E(e^{itx} \cdot e^{ity})$$

Exemple:

Si: $X \sim N(0, 1)$ alors:

$$\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ on a:

$$\phi_Y(t) = e^{itE(X) - V(X)\frac{t^2}{2}}$$

on a:

$$\begin{aligned}\phi_Y(t) &= E(e^{ity}) \\ &= E(e^{it(\sigma X + \mu)}) \\ &= e^{it\mu} E(e^{it\sigma X}) \\ &= e^{it\mu} \cdot \phi_X(\sigma t) \\ &= e^{it\mu} \cdot e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}}\end{aligned}$$

$$\phi_Y(t) = \exp \left\{ \underbrace{it\mu}_{E(X)} - \frac{t^2 \sigma^2}{2} \right\}$$

$$= \exp \left\{ it E(X) - V(X) \frac{t^2}{2} \right\}$$

$$= e^{itE(X) - V(X)\frac{t^2}{2}}$$

Définition:

et $t = x$ où $t = +$.

X vect aléa dans $\mathbb{R}^d$, la fct caract ϕ_x tq:

$\phi_x: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par:

$$\phi_x(t) = E \left(e^{i t^T x} \right) = E \left(e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_d x_d)} \right)$$

$$= E \left(e^{i \langle t, x \rangle} \right) =$$

$$= E \left(e^{i \sum_{j=1}^d t_j x_j} \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$$

• Proposition 03:

X vect aléa dans $\mathbb{R}^d$. Les vecteurs aléatoires

$X_1, X_2, \dots, X_d$ sont indépendant si-si:

$$\phi_x(t) = \prod_{i=1}^d \phi_{x_i}(t_i) \quad t \in \mathbb{R}^d$$

• Proposition 04:

Deux vects aléats X, Y ont la même loi si

$$\Leftrightarrow \text{si} : \phi_x(t) = \phi_y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$$

En particulier, si l'une des vects aléas admet une densité, alors il en est de même pour l'autre vect aléa et:

$$f_x = f_y$$

Proposition 05:

Pour $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^t$ un vect dans $\mathbb{R}^d$
notons ϕ_X et ϕ_{X_i} resp les fcts caracts de
 X et X_i on a alors:

- $\forall t \in \mathbb{R}^d: |\phi_X(t)| \leq \phi_X(0) = 1$
- $\forall j \in \{1, \dots, d\}$ et $t_j \in \mathbb{R}$:
$$\phi_{X_j}(t_j) = \phi_X(0, 0, \dots, t_j, \dots, 0) \\ = E(e^{it_j X_j})$$

II. Vecteurs Gaussiens:

définition:

Un vect aléa $X = (X_1, \dots, X_d)^t$ de $\mathbb{R}^d$
est dit vecteur **gaussien** si pour tout $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_d\}^t$
de $\mathbb{R}^d$ la relation:

$\mu^t X = \sum_{i=1}^d \mu_i X_i$ est gaussienne, autrement
dit si toute combinaison linéaire des
composants (X_j) avec $(j=1 \dots d)$ est de loi
normale

- Pour tout vect aléa gaussien X , on note:

$$X \sim N_d(\mu, \Sigma_X) \text{ avec:}$$

$$\mu = E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_d) \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma_X \text{ la matrice covariance de } X$$

$$\Sigma_x = E[(X - E(X))(X - E(X))^T]$$

Les composantes d'un vect aléa gaussien X sont des var. aléa. normale tq: $\forall i=1 \dots d$

$$X_i \sim N_d(E(X_i), V(X_i))$$

définition 02:

Soit X un vect gaussien de dimension d , soit $M = E(X) \in \mathbb{R}^d$ et Σ_x matrice covariance de X , la fct caract du vecteur X est donnée par:

$$\phi_x(t) = \exp\left(i t^T M - \frac{1}{2} t^T \Sigma_x t\right), \forall t \in \mathbb{R}^d$$

démonstration:

on a vu que la fct caract d'une var aléa de loi $N(m_j, \sigma_j^2)$ est:

$$\phi_{x_j}(t) = \exp\left(i t_j m_j - \frac{1}{2} t_j^2 \sigma_j^2\right)$$

$$\phi_x(t) = \exp\left(i \sum_{j=1}^d t_j m_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d t_j^2 \sigma_j^2\right)$$

$$\phi_x(t) = \exp\left(i t^T M - \frac{1}{2} t^T \Sigma_x t\right)$$

Exemple:

déterminer la fct d'un couple gaussien de moyenne $M = (1, 2)^T$ et $\Sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

on a:

$$\phi_x(t_1, t_2) = \exp \left(i t^t \mu - \frac{1}{2} t^t \underline{\underline{g}}_x t \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d.$$

$$\mu = (1, 2)^t \quad \underline{\underline{g}}_x \quad t^t = (t_1 \quad t_2)$$

$$\underline{\underline{g}}_x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\phi_x(t_1, t_2) = \exp \left(i (t_1, t_2)^t (1, 2)^t - \frac{1}{2} (t_1, t_2)^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$t^t \underline{\underline{g}}_x t = (t_1, t_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$= (t_1 - t_2, -t_1 + 2t_2) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$= t_1^2 - 2t_1t_2 + 2t_2^2$$

Proposition:

Le vect. aléa. $X \sim N_d(\mu, \Sigma_X)$ admet une densité si: Σ_X est inversible alors:

$$P_X(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d (\det(\Sigma_X))^{1/2}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma_X^{-1} (x - \mu) \right]$$

Proposition 03:

Soit X un vect. gaussien de dim d , les vects. aléatoires X_i et X_j sont indépendants si:

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{ij}} = 0$$

Proposition 04:

Soit $X \sim N_d(\mu, \Sigma_X)$, les composantes sont indépendantes si Σ_X est diagonale.

Proposition 05: (transformation linéaire)

Soit X un vect. gaussien $N_d(\mu_X, \Sigma_X)$ et

$$Y = AX + B \quad \text{tq. } A \text{ une matrice } (p \times d)$$

$$B \text{ un vect. } (p \times 1)$$

alors: Y est un vect. gaussien $N(\mu_Y, \Sigma_Y)$

$$\text{avec: } \mu_Y = A\mu_X + B$$

$$\Sigma_Y = A \Sigma_X A^T$$

Exercice 05:

Soit (X, Y) un couple aléatoire gaussien avec :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

- Pour montrer que la matrice Σ est la matrice de covariance :

condition nécessaire et suffisante :

- 1) Pour que Σ soit la mat de cov de (X, Y) il faut et il suffit que : Σ soit symétrique et semi-définie positive

$$(\det \Sigma \geq 0 \text{ et } \text{trace } \Sigma \geq 0)$$

$$\Rightarrow \det \Sigma = 1 - \rho^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |\rho| \leq 1$$

- 2) Pour que le couple (X, Y) admette une densité est que Σ soit invertible tq :

$$(\det \Sigma > 0 \text{ et } \text{trace } \Sigma > 0)$$

$$\Rightarrow 1 - \rho^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow |\rho| < 1$$

- 3) $|\rho| < 1$ et (X, Y) est supposé centré.

($E(X) = E(Y) = 0$) alors (X, Y) admet une densité

II/ Chapitre 02 :

Esperance conditionnelle

1) - La variance discrète :

Si X est intégrable ($E(X) < \infty$), on appelle
esperance ~~conditionnelle~~ de X sachant que $Y = y$ le
nombre :

$$E(X/Y = y_j) = \sum_{i \in I} x_i \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sachant}}}{P(X = x_i / Y = y_j)}$$

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

Exple :

on considère deux var binomiales (C_n^k)
independantes
 X et Y independants et de m parametres n et p .

$$X \sim B(n, p)$$

$$Y \sim B(n, p)$$

- calculer $E(X / X + Y = m)$

$\Rightarrow$

ona :

$$P(X = k / X + Y = m) = \frac{P(X = k, X + Y = m)}{P(X + Y = m)}$$

$$= \frac{P(X = k, Y = m - k)}{P(X + Y = m)}$$

$$= \frac{P(X = k) P(Y = m - k)}{P(X + Y = m)}$$

$$= \frac{C_n^R p^R (1-p)^{n-R} \cdot C_n^{m-R} p^{m-R} (1-p)^{m-(m-R)}}{C_{2n}^m p^m (1-p)^{2m-m}}$$

$$= \frac{C_n^R \cdot C_n^{m-R}}{C_{2n}^m}$$

La distribution conditionnel de X sachant $X+Y=m$ est hyper-géométrique, on a donc :

$$E(X / X+Y=m) = \frac{m \cdot n}{n+n} = \frac{m}{2}$$

Rappel-

$X \sim H(a, b, n)$ (loi hyper-géo)

$$P(X=k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

$$E(X) = \frac{an}{a+b}$$

2) La variance aléatoire continue :

Soit (X, Y) un couple de v.a. admet une densité et y un réel tq. $f_Y(y) > 0$ on appelle espérance conditionnelle de X sachant $Y=y$.

$$E(X/Y) = \int_{\mathbb{R}} x f(X/Y=y) dx$$

$$P(X/Y=y) = \frac{P(x,y)}{P_Y(y)}, \quad P_Y(y) > 0.$$

$$P_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x,y) dx.$$

Exemple:

supposons la densité:

$$f(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} \cdot e^{-y}}{y}, \quad 0 < x < \infty \mid y > 0$$

- calculer $E(X/Y=y)$

$$\Rightarrow P(X/Y=y) = \frac{P(x,y)}{P_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)}$$

ici exp

$$= \frac{\left(\frac{1}{y}\right) e^{-\frac{x}{y}} \cdot e^{-y}}{\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{y}\right) e^{-\frac{x}{y}} \cdot e^{-y} dx} = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}$$

La densité conditionnel de $X/Y=y$ est la densité exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{y}$

donc: $E(X/Y=y) = y$.

Rappel:

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow P(X=x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ et } E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Remarque:

$$E(g(X)/Y=y) = \begin{cases} \sum_x g(x) \cdot P(X/Y) & \text{c. dis} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) P(X/Y) & \text{c. cont} \end{cases}$$

et,

$$E \left[\sum_{i=1}^n X_i / Y=y \right] = \sum_{i=1}^n E(X_i / Y=y)$$

3/ Théorème de calcul d'espérance Comb:

$$E(X) = E(E(X/Y))$$

• lorsque Y est une v. a. discrète alors:

$$E(X) = \sum_y E(X/Y=y) P(Y=y)$$

• lorsque Y est une v. a. continue alors:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X/Y=y) P_Y(y) dy$$

Exercice:

Esperance de la somme d'un nombre aléatoire de v. a., le nombre de clients se rendent à un grand magasin donné dans l'espace d'une journée est une v. a. d'esperance (50), La somme d'esperance par clients quotidiens du magasins est aussi une v. a. d'esperance 8 DA.

- on admet que les dépenses d'un client ne dépend ni de celle des autres clients ni du nombre total de client pr la journée.

- quelle est l'espérance du chiffre d'affaire quotidien du magasin ?

Solution :

- N : Le nombre de client par jour.
- X_i : Le montant dépensé par le client.
- Le chiffre d'affaire du magasin est donné par : $\sum_{i=1}^N X_i$ (N une v.a.)

$$E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E\left(E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right)\right)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i \mid N=n\right) \\ = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$$

du fait de l'indépendance de X_i et de N

$$\text{alors : } E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n E(X)$$

où $E(X)$ l'espérance commune à tous les X_i

$$\text{donc : } E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right) = N E(X)$$

$$\text{ce qui entraîne : } E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E(N E(X)) \\ = E(N) \cdot E(X)$$

- Le chiffre d'affaire du magasin égale :

$$50 \times 8 = 400 \text{ da / jour.}$$

4) Caractérisation et propriété.

1) Caractérisation:

Notons $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ l'information donnée par n variable aléatoire $Z_1, \dots, Z_n$ lors qu'il sera possible de prédire la valeur de Y à partir de l'information $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$.
on dira que Y est $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ mesurable.

(Y dépend d'une fct quelconque qui a $Z_1, \dots, Z_n$ comme variable: $Y = h(Z)$)

Def: Variable F_n mesurable.

On considère $n+1$ v.a.: $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} Z_1: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \vdots \\ Z_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

la v.a. Y est dite $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ mesurable

s'il existe une fonction $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable

$$\text{tq: } Y(\omega) = h(Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega))$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$

et on dit Y est F_n mesurable.

Exemple. X, Y indep $\Rightarrow E(XY) = E(X)$

1) $n=1$ alors v.a. Y est dite $\sigma(Z)$ mesurable, s'il existe une fct h (mesurable):

$$h: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq: } Y = h(Z)$$

2) Les v.a. Y suivants sont $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ mesurables:

• $Y = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ car $Y(\omega) = h(Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega))$
et: $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tq: $h(z_1, \dots, z_n) = z_1 + z_2 + \dots + z_n$

• $Y = \max(Z_1, \dots, Z_n)$ avec $h(z_1, \dots, z_n) = \max(z_1, \dots, z_n)$

Propriété:

Soit $X, Z_1, \dots, Z_n$ sont des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec X est intégrable, on note $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$:

P_1 : $E(E(X/\mathcal{F}_n)) = E(X)$

P_2 : Si X est $\mathcal{F}_n$ mesurable alors: $E(X/\mathcal{F}_n) = X$

P_3 : Si X est indep de $Z_1, \dots, Z_n$ alors: $E(X/\mathcal{F}_n) = E(X)$

P_4 : Si $a, b \in \mathbb{R}$ alors: $E(aX + bY/\mathcal{F}_n) = aE(X/\mathcal{F}_n) + bE(Y/\mathcal{F}_n)$

P_5 : Si Y est $\mathcal{F}_n$ mesurable alors: $E(XY/\mathcal{F}_n) = Y E(X/\mathcal{F}_n)$

P_6 : Pour $k, p \in \mathbb{N}$: $E[E(X/\mathcal{F}_{n+p})/\mathcal{F}_n] = E(X/\mathcal{F}_n)$

Propriétés supplémentaires:

- Si $Y_1, \dots, Y_p$ sont indep de X et de $Z_1, \dots, Z_n$ alors,

$$E(X/Z_1, \dots, Z_n, Y_1, \dots, Y_p) = E(X/Z_1, \dots, Z_n)$$

- si $X \leq Y$ alors,

$$E(X/F_n) \leq E(Y/F_n).$$

- Si $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, on a l'inégalité de Jensen:

$$\phi(E(X/F_n)) \leq E(\phi(X)/F_n)$$

Exple:

A l'aide de l'inégalité de Jensen, montrer que $E(X/F_n)^2 \leq E(X^2/F_n)$.

Exercice:

X_1 et X_2 représentent la valeur obtenue

Par le premier et le second dé et $S = X_1 + X_2$

X_1 est $\sigma(X_1)$ mesurable et X_2 indep de X_1 .

- calculer $E(S/X_1) = ?$.

X_1	1	2	...	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \sum x_i P_i$$

Chapitre 03:

1/ Martingales à temps discrets.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de proba, on se donne une suite croissante de sous-tribus $\mathcal{F}_n$.

$$(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$$

On dit que $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ($\mathcal{A}$ est mesurable)

Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de v.a. on dit que $(X_n, n \geq 0)$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ si pour tout n , la v.a. X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable.

définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de proba et $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ une filtration sur cette espace, une suite $(M_n, n \geq 0)$ de v.a. r est une $\mathcal{F}_n$ -martingale si:

- $(M_n, n \geq 0)$ est $\mathcal{F}_n$ adaptée et pour tt $n \geq 0$

$$E(|M_n|) < +\infty \quad (\text{finie})$$

- pour tout $n \geq 0$, $E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$.

Remarque:

M_n est une martingale : $E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$.

• M_n est une Supermartingale: $E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) \leq M_n$

• M_n est une Submartingale: $E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) \geq M_n$

Remarque 02:

Si $(M_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$ -martingale alors pour tout $n \geq 0$, M_n est $\mathcal{F}_n$ -martingale est donc

$$\mathcal{F}_n^0 = \sigma(M_0, M_1, \dots, M_n) \subset \mathcal{F}_n$$

On déduit que aux propriétés de l'espérance conditionnelle que:

$$\begin{aligned} M_n &= E(M_n / \mathcal{F}_n^0) \\ &= E(E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) / \mathcal{F}_n^0) \\ &= E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n^0) \end{aligned}$$

Remarque 03:

On montre que: $E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) = M_n$ est équivalent à dire que tout $p \geq 0$: $E(M_{n+p} / \mathcal{F}_n) = M_n$.

Remarque 04:

Si M_n est une martingale alors,

$$E(M_{n+1}) = E(E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n)) = E(M_n)$$

donc:

L'espérance d'une martingale est donc constant au cours du temps.

