TD de probabilités (corrigés)

Série n 2

Exercice 1 :

1)

- On a $\sum P(X = x_i)=1$ et les évènements $\{X = -3\}$ et $\{X = 3\}$ sont équiprobables (même probabilité) c'est à dire $p_1=p_4$.

Donc : 2p+0.2+0.2 =1, on trouve p=0.3.

X	-3	0	2	3
$P_i = P(X= x_i)$	*0.3*	0.2	0.2	*0.3*

2)

La fonction de répartition de X

$F_X(x) =P (X\leq x)$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<-3 \\ 0.3 & si\ -3\leq x<0 \\ 0.5 & si\ 0\leq x<2 \\ 0.7 & si\ 2\leq x<3 \\ 1 & si\ x\geq 3 \end{cases}$$

- $P (0 < X < 2) = 0$.
- $P (0 \leq X < 2) =P(X= 0) = 0.2$.
- $P(X \geq 2) = P(X=2) +P(X=3) = 0.2 +0.3 = 0.5$.

3)

- Le premier moment de X : $E(X)= \sum_i x_i\, p(X=x_i)$

  $E(X) = - 3(0.3) +0(0.2) +2(0.2) + 3(3.3) = 0.4$

Le deuxième moment de X : $E(X^2) = \sum_i x_i^2 \, p(X = x_i)$

$E(X^2) = (-3^2).0.3 + (2^2).0.2 + (3^2).0.3 = 0.6$.

- La variance de X : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0.6 - (0.4)^2 = 0.44$
- L'écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0.66$

Exercice 2

On a

1 /3 = P(X < 2) = P(X = 0 ou X = 1) = P(X = 0) + P(X = 1) et comme P(X = 0) = P(X = 1), On a déduit que

P(X = 0) = P(X = 1) = 1/6.

Par ailleurs, on a

1/ 2 = 0.5= P(X > 2) = P(X = 3).

Enfin, on a P(X = 2) = 1 − (P(X > 2) + P(X < 2)) = 1 /6.

On vérifie alors que P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1.

X	0	1	2	3
$P_i = P(X = x_i)$	1 /6	1 /6	1 /6	1 /2

Exercice 3

X : la variable aléatoire égale à la somme des deux chiffres obtenus.

1/ On a: Ω ={(i,j), i + j = k} et card(Ω) = 6^2=36.

X(Ω)= {3, 5,7, 9}

2) a

X (=k)	3	5	7	9	Somme
P(X= *k*)	6/36	12/36	12/36	6/36	1

b)

- L'espérance de X : $E(X) = \sum_i x_i \, p(X = x_i)$

E(X) = 3(6/36) +5(12/36) +7(12/36) + 9(6/36) = 5.952

- La variance : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Avec

- $E(X^2) = \sum_{i=1} x_i^2 P(X = x_i)$

$E(X^2)$ = 9(6/36) + 25(12/36) + 49(12/36) +81(6/36) = 39.36

La variance : $V(X) = 39.36 – (5.952)^2 = 3.93$

3) La fonction de répartition de X

$F_X(x) = P(X \leq x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 3 \\ 6/36 & si\ 3 \leq x < 5 \\ 18/36 & si\ 5 \leq x < 7 \\ 30/36 & si\ 7 \leq x < 9 \\ 1 & si\ x \geq 9 \end{cases}$$

4/ Calculer les probabilités :

a- $P(X \geq 5) = 1 - P(X<5) = 1 - (6/36) = 5/36$;

Ou bien :

$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 7) + P(X = 9)$

b-$P(5 < X < 9) = P(X = 7) = 12/36$.

5/Soit la variable aléatoire $T = 1-2X$.

$T(\Omega) = \{-17, -13, -9, -5\}$

T prend les valeurs -17, -13, -9, et -5 avec les probabilités :

$P(T = -17) = P(X = 0) = 6/36$

$P(T = -13) = P(X = 7) = 12/36$

$P(T = -9) = P(X = 5) = 12/36$

$P(T = -5) = P(X = 3) = 6/36$

D'ou la loi de T:

T (=k)	-17	-13	-9	-5	Somme
P(T= *k*)	6/36	12/36	12/36	6/36	1

Déduire E(T) et σ(T).

$E(T) = 1 - 2E(X) = 1 - 2\ (5.952) = -10.90$

- $Var(T) = 4V(X) = 4(3.93) = 15.72$
- $\sigma(T) = \sqrt{V(U)} = 3.96$

Exercice 5 :

X : le nombre de filles dans une famille de 5 enfants.

1. **a-** X suit la loi Binomiale B(5,0.55) où $n = 5$ et p = P(Fille) = 0.55. (P(fille) = 0.55 et P(G)= 1-p= 0.45) .

La loi de X est donnée par la formule : $p(X=k) = C^k{}_n(p)^k(1-p)^k$

b- le nombre moyen de filles, dans une famille de 5 enfants est

$E(X) = n.p = 5.0.55 = 3$ filles

.

a- 1 fille : $p(X=1) = C_5^1(0.55)^1(0.45)^4 = 0.112$

b- 4 garçons (avoir une fille) : p(X=1) = 0.112

c- plus d'une fille : p(X>1) =1-p(X≤1) = 1- [p(X=0) + p(X=1)] = 0.8693

d- au moins 2 filles (avoir 2 filles ou plus) :

$p(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$

$= 1- [C^0_5(0.55)^0(0.45)^5 + C^1_5(0.55)^1(0.45)^4] = 0.8693$

e- au plus 3 garçons (maximum 3 garçons) :

$p(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0.8693$

2. $p(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$.

Remarque : on peut résoudre la question b et e avec d'autre manière. On définie une autre variable aléatoire qui présente le nombre de garçons dans une famille de 5 enfants qui suis la loi binomiale B(5, 0.45) et on applique la formule de loi binomiale.

Par exemple :

(e) Avoir au plus 3 garçons : $P(Y \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - [P(Y = 4) + P(Y = 5)]$

$= 1- [C^4_5(0.45)^4(0.55)^1 + C^5_5(0.45)^5(0.55)^0] = 0.8693$

Exercice 6 :

La variable aléatoire X : le nombre de réponses correctes de l'étudiant.

1. **a** On a un sujet d'examen est composé de 10 questions indépendantes (n =10) . L'étudiant peut répondre juste ou non (soit succès ou bien échec). Et la probabilité de répondre juste est 1/5 (probabilité de succès). Donc, l a v.a. X suis la loi Binomiale B (10, 1/5).

b- Le nombre moyen de réponses correctes est E(X)= np= 10. 1 /5 = 2.

c- la variance : V(X)= npq= np(1-p) = 10. 1/5. (1- 1/5)

- L'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

2. la probabilité de répondre correctement à 5 questions : $P(X=5) = C^5_{10}(1/5)^5(4/5)^{10-5}$

2. $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

   $= C^8_{10}(1/5)^8(4/5)^2 + C^9_{10}(1/5)^9(4/5)^1 + C^{10}_{10}(1/5)^{10}(4/5)^0$

Exercice 8:

X suit une loi de Poisson de paramètres λ.

$$p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

1) la probabilité qu'entre 10h 30 et 10h 31, on reçoive : λ=3

a- 2 appels :

$$P(X = 2) = e^{-3}\frac{3^2}{2!}$$

b- au moins 2 appels P(X≥2) = 1-p(X<2)=1- p[(X=0)+p(X=1)] =

$$1-[e^{3}\frac{3^0}{0!}+e^{3}\frac{3^1}{1!}]$$

2) la probabilité de recevoir un appel entre 11h 00 et 11h 02 :

Pendant deux minutes la centrale reçoit en moyenne 3.2=6 appels donc λ=6.

$$P(X = 1) = e^{-6}\frac{6^1}{1!}$$