Série n° 2 : Variables Aléatoires Discrètes, Lois Discrètes Usuelles.

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau suivant :

X (=k)	-3	0	2	3
P(X = k)	p	0.2	0.2	p

1. Compléter le tableau et tracer la fonction de répartition.
2. Calculer $P(0 < X < 2)$, $P(0 \leq X < 2)$ et $P(X \geq 2)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 :

Soit X une v.a.r. prenant les valeurs 0, 1, 2 et 3. Déterminer la loi de X sachant que :
$P(X < 2) = 1/3$, $P(X > 2) = 1/2$, $P(X = 0) = P(X = 1)$.

Exercice 3 :

On lance 2 dés A et B bien équilibrés et on admet que les résultats sont indépendants.

- Sur le dé A les faces sont numérotées 2, 2, 4, 4, 6, 6.
- Sur le dé B les faces sont numérotées 1, 1, 1, 3, 3, 3.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme des deux chiffres obtenus.

1/ Décrire l'espace fondamental Ω, ainsi que l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs de X.
2/a- Déterminer la loi de probabilité de X.
b- Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.
3/ Déterminer la fonction de répartition de X.
4/ Calculer les probabilités : **a-** $P(X \geq 5)$; **b-**$P(5 < X < 9)$
5/Soit la variable aléatoire $T = 1-2X$. Déduire $E(T)$ et $\sigma(T)$.

Exercice 4 : (devoir) Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire X discrète de loi : $\boldsymbol{P(X = k) = \dfrac{p^k}{(1+p)^{k+1}}}$ **,**$k \in \mathbb{N}$.

Où ***p*** est le prix d'une campagne publicitaire de l'année précédente.

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Connaissant son stock ***s***, calculer la probabilité de rupture de stock.

Exercice 5 : Dans une population, 45% des nouveau-nés sont des garçons. Soit X le nombre de filles dans une famille de 5 enfants.

1.a- Déterminer la loi de X.
b- Quel est le nombre moyen de filles, dans une famille de 5 enfants ?
2.Calculer la probabilité d'avoir, dans une famille de 5 enfants :
a- 1 fille, **b-** 4 garçons, **c-**plus d'une fille, **d-** au moins 2 filles, **e-**au plus 3 garçons.
3.Une maman souhaite avoir plus de garçons que de filles. Quelle est la probabilité que son souhait se réalise ?

Exercice 6 :

Un sujet d'examen est composé de 10 questions indépendantes. Un étudiant qui n'a rien préparé a une chance sur 5 de répondre juste, au hasard, à chaque question.
Soit X le nombre de réponses correctes de l'étudiant.

1. a- Quelle est la loi de X ? Justifiez votre réponse.

b- En répondant au hasard, quel sera, en moyenne, le nombre de réponses correctes?

c- Donner la variance et l'écart type de X.

2. Calculer la probabilité de répondre correctement à 5 questions ?

3. Pour réussir à l'examen, l'étudiant doit répondre correctement à au moins 8 questions.
Quelle est la probabilité de réussir, en répondant au hasard ?

Exercice 7 :(devoir)

On lance une pièce de monnaie n fois. Soit p la probabilité d'obtenir « face », et X la variable aléatoire qui compte le nombre de « face » obtenu sur les n lancers.

1.Sachant que $E(X) = 21$ et $V(X) = 12$, la pièce est-elle équilibrée ?

2.Quelle est, alors, la valeur de n ?

Exercice 8 :

Le nombre moyen d'appels téléphoniques reçus par un standard en une minute est égal à 3.

1. En admettant que le nombre d'appels par période de temps suit une loi de Poisson, quelle est la probabilité qu'entre 10h 30 et 10h 31, on reçoive : **a-** 2 appels,**b-** au moins 2 appels ?

2. Quelle est la probabilité de recevoir un appel entre 11h 00 et 11h 02 ?

Exercice 9 :(devoir)

Dans une usine, on a répertorié le nombre d'accidents mineurs subis par le personnel pendant une journée de travail sur une période de 200 jours. Soit X le nombre d'accidents recensés par jour. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Nbre d'accidents	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Nbre de jours	**86**	**82**	**22**	**7**	**2**	**1**

1. Calculer le nombre moyen d'accidents par jour et la variance. Que remarquez-vous ?

2. On admet que X suit une loi de Poisson.

a- Quelle est la probabilité qu'il se produise moins de 2 accidents par jour ?

b-Même questionsi l'on sait qu'un accident au moins a eu lieu.

Exercice 10 : (devoir)

La probabilité qu'une ampoule électrique ait une durée de vie supérieure à 2 ans est égale à 0.2. Un lustre possède 5 ampoules. Calculer la probabilité :

1. de ne pas changer d'ampoule en 2 ans.

2. de changer toutes les ampoules en 2 ans.