

Chapitre 3 : Variables aléatoires continues, les lois usuelles (la loi exponentielle et la loi normale)

I) Variable aléatoire continue

1) Définitions.

Soit une variable aléatoire réelle (v.a.r) X définie sur (Ω, A, P) et soit F la fonction de répartition de X .

La v.a.r. X est dite absolument continue s'il existe une fonction positive f , appelée fonction

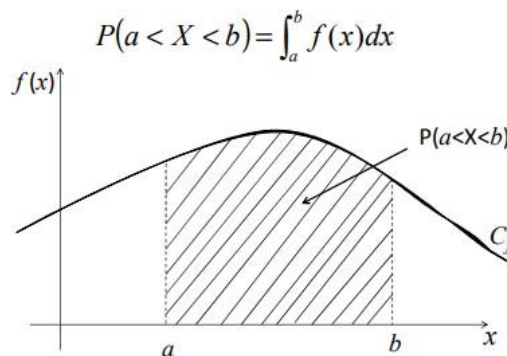
densité de probabilité telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

- La fonction f est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$: $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$.
- L'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge et est égale à 1.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Remarque :

La probabilité de tout intervalle $]a, b[$ est égale à $p(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$



2) Fonction de répartition d'une v.a.r.:

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé et X une v.a.r. On appelle fonction de répartition de la v.a.r. X , l'application $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ définie par: pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Remarque: La fonction de répartition permet de calculer les probabilités concernant les intervalles.

On a $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

En effet:

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(a < X \text{ et } X \leq b) = P((a < X) \cap (X \leq b)) \\ &= P(a < X) + P(X \leq b) - P((a < X) \cup (X \leq b)) \\ &= 1 - P(X \leq a) + P(X \leq b) - P(\mathbb{R}) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Proposition: on a

- 1- $P(a \in X \leq b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$
- 2- $P(X=a)=0$ avec a une constante réelle.
- 3- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$
- 4- $P(X > a) = \int_a^\infty f(t) dt$
- 5- La fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$.
- 6- Si la fonction de densité f d'une v.a. continue X est continue au point x alors f est la dérivée de la fonction de répartition F , c'est-à-dire $F'(x)=f(x)$.

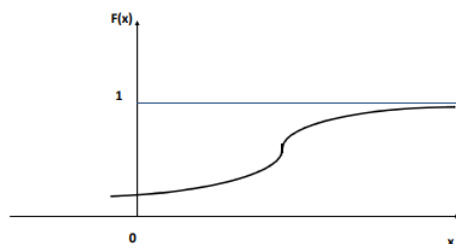
Démonstration :

- 1- Comme $(a < X \leq b) = (X \leq b) - (X \leq a).$

$$\text{On a } P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = \int_{-\infty}^b f(t) dt - \int_{-\infty}^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

- 2- $P(X=a) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(a - 1/n < X \leq b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a-1/n}^b f(t) dt = 0$
- 3- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) + P(X=a) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) + P(X=b) = P(a < X < b) = P(a < X < b) + P(X=a) = P(a \leq X < b).$
- 4- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = \int_{-\infty}^\infty f(t) dt - \int_{-\infty}^a f(t) dt = \int_a^\infty f(t) dt$

Représentation graphique de $F(x)$:



3) Loi d'une variable aléatoire $Y = g(X)$

1- g est bijective

- si g est croissante,

on a $Y = g(X) \Leftrightarrow X = g^{-1}(Y)$ et $P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y))$. d'où $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$

avec F_X et F_Y sont respectivement les fonctions de répartition des v.a. X et Y .

En dérivant, on obtient:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'$$

Avec f_X et f_Y sont respectivement les densités de probabilité des v.a. X et Y .

- si g est décroissante, on a :

On a $Y = g(X) \Leftrightarrow X = g^{-1}(Y)$ et $P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X > g^{-1}(y))$

$= 1 - P(X \leq g^{-1}(y))$ d'où $F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$ En dérivant, on obtient

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'$$

2- la formule générale pour g quelconque :

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) |(g^{-1}(y))'| & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

avec $\alpha = \min \{g(-\infty), g(+\infty)\}$ et $\beta = \max \{g(-\infty), g(+\infty)\}$.

Exemple : Soit X une v.a. continue de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $Y = g(X) = -2X + 1$.

Déterminer la densité de probabilité de Y .

On a $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-2X + 1 \leq y) = P(X > (1-y)/2) = 1 - P(X \leq (1-y)/2) = 1 - F_X((1-y)/2)$

$f_Y(y) = (1/2)f_X((1-y)/2)$

Donc :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & y \in [-1, 3] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 2 :

On a $Y = g(X)$ avec $g(x) = X^2$. Dans ce cas $g'(x) = 2x$ qui est positive pour $x > 0$ et négative pour $x < 0$, d'où g n'est pas strictement monotone. Mais, pour $y > 0$, on a :

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ En dérivant, on obtient :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

4) Caractéristiques des variables aléatoires continues

• Espérance :

L'espérance mathématique d'une v. a. continue X, de fonction de densité f est donnée par:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

• Variance et écart-type :

La variance d'une v. a. absolument continue X est définie par: $V(X) = E(X-m)^2$ où $m = E(X)$.

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

• Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

• Moment d'ordre k d'une v.a. continue X, noté m_k est:

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

• Moment centré d'ordre k d'une v.a. X, noté μ_k est:

$$\mu_k = E((X - E(X))^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x) dx$$

Remarque:

- La variance correspond au moment centré d'ordre 2: $\text{Var}(X) = \mu_2$
- Comme pour l'espérance mathématique, si la série ou l'intégrale correspondante diverge, les moments peuvent parfois ne pas exister.

II) Les lois usuelles continues

1) Loi uniforme:

Une v.a. continue X suit une loi uniforme sur un intervalle [a, b] et on note $X \sim U[a, b]$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition $F(x)$ de X est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Son espérance mathématique est : $E(X) =$

$(a+b)/2$ Sa variance est : $V(X) = (a-b)^2/12$.

2) Loi exponentielle:

Une v.a. X continue suit la loi exponentielle, de paramètre $\lambda > 0$, notée $X \sim \exp(\lambda)$, si sa densité de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sa fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Alors son espérance mathématique est: $E(X) = 1/\lambda$

- Sa variance: $V(X) = 1/\lambda^2$

3) Loi normale :

Une v.a. X suit une loi normale de paramètres m et $\sigma > 0$ et on note $X \sim N(m, \sigma)$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}; \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

La fonction de répartition est :

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt; \quad x \in \mathbb{R}$$

L'espérance mathématique : $E(X) = m$

La variance : $Var(X) = \sigma^2$

Proposition :

Si $N(m, \sigma)$, alors la v.a $Y=(X-m)/\sigma$ suit loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

Loi normale centrée réduite :

Une v.a. X suit une loi normale centrée réduite s'il suit une loi normale de paramètre $m = 0$ et $\sigma = 1$ et on note $X \sim N(0, 1)$. Sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

La fonction de répartition est :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \quad x \in \mathbb{R}$$

L'espérance mathématique : $E(X) = 0$. La variance : $V(X) = 1$.

On peut ramener tout calcul sur la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale $N(m, \sigma)$ à un calcul sur la fonction de répartition, notée $\Phi(x)$, d'une v.a $N(0,1)$.

En effet ; $P(X \leq a) = P((X-m)/\sigma \leq (a-m)/\sigma) = \Phi((a-m)/\sigma)$.