

Chapitre 2 : Variables aléatoires discrètes et les lois usuelles

I) Variables aléatoires discrètes

1) Introduction

Le nombre de piles obtenus au cours d'une série de n lancers de pile ou face ou plus généralement dans un jeu de hasard (roulette, dés,...), le gain d'un parieur est une grandeur variable qui dépend du déroulement aléatoire du jeu. Une telle grandeur numérique qui est fonction des éventualités d'une expérience aléatoire s'appelle une variable aléatoire.

Pour rendre compte mathématiquement d'une variable aléatoire, on doit la considérer comme une application $X : \omega \rightarrow X(\omega)$ définie sur un univers des possibles Ω est à valeurs réelles. Dans ce chapitre, et pour des raisons de simplicité, toutes les variables aléatoires considérées seront discrètes (i.e. l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est fini).

1) Définition:

Soient (Ω, A) et (Ω', A') deux espaces probabilisables. L'application X de Ω dans Ω' est dite variable aléatoire (v.a.) lorsque pour tout $B \in A'$, on a:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} \in A$$

- Une v.a. X est, donc, une application mesurable pour les tribus A et A'

2) Tribu engendrée par une v.a.

Définition: La tribu engendrée par une v.a. X et notée $\sigma(X)$ est la plus petite tribu par rapport à laquelle X est mesurable:

$$\sigma(X) = \{A \in A / \exists B \in A'; A = X^{-1}(B) = \{X \in B\}\}$$

3) Tribu borélienne :

La tribu borélienne, notée B_R , est la tribu engendrée par les ouverts de R (i.e. c'est la plus petite tribu qui contient les ouverts de R).

On peut écrire $B_R = \sigma(\text{ouverts de } R) = \sigma(\text{fermés de } R)$.

B_R est aussi engendrée par les intervalles ouverts de R de la forme $]a, b[$; $a, b \in R$

$$B_R = \sigma([a, b[; a, b \in R)$$

4) Variable aléatoire réelle (v.a.r.) :

Si $(\Omega', A') \equiv (R, B_R)$, alors X est une v.a.r.

5) Ensemble de réalisation d'une v.a. :

Les valeurs de la v.a. X sont dites les "réalisations de X ". L'ensemble de ces réalisations est notée $X(\Omega)$.

6) Variable aléatoire discrète

Une v.a. X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est dite discrète, si l'ensemble de ses réalisations $X(\Omega)$ a un nombre fini (ou infini dénombrable) d'éléments.

Remarque :

Soient $x_1, x_2, \dots$ les réalisations de X , c'est-à-dire $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$.

On note pour tout $i = 1, 2, 3, \dots$, $X^{-1}(\{x_i\}) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\} = (X = x_i)$. Les événements $(X = x_i)$ forment un système complet et $\sum P(X = x_i) = 1$.

7) Loi de probabilité d'une v.a. X :

Définition :

L'application, notée P_X , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P\{\omega / X(\omega) \in B\}$ est appelée loi de probabilité de la v.a. X

Exemple 1:

Soit une famille ayant 3 enfants.

$\Omega = \{FFF, GFF, FGF, FFG, GGF, FGG, GFG, FGF\}$

A) on définit sur Ω l'application X qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le nombre de garçons de ω ;
on a ; $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}(X = 0) &= X^{-1}(\{0\}) = \{FFF\} \\(X = 1) &= X^{-1}(\{1\}) = \{GFF, FFG, GFG\} \\(X = 2) &= X^{-1}(\{2\}) = \{GGF, GFG, FGG\} \\(X = 3) &= X^{-1}(\{3\}) = \{GGG\}\end{aligned}$$

Donc les probabilités :

$$P(X = 0) = P(X^{-1}(\{0\})) = 1/8$$

$$P(X = 1) = P(X^{-1}(\{1\})) = 3/8$$

$$P(X = 2) = P(X^{-1}(\{2\})) = 3/8$$

$$P(X = 3) = P(X^{-1}(\{3\})) = 1/8$$

On vérifie que $\sum P(X = x_i) = 1$.

En effet : $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

8) Fonction de répartition d'une v.a.r:**Définition :**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. définie sur Ω à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

On appelle fonction de répartition de X , la fonction notée F et définie

Par : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x)$

Remarque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x) = P(\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x) = P(X \in]-\infty, x]) = P_X([-\infty, x])$$

Propriétés :

- 1) F est croissante (non-décroissante) sur $\mathbb{R}$
- 2) F est continue à droite.
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- 4) si $a \leq b$; $p(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = p(X \leq b) - p(X \leq a)$
- 5)

Remarque :

La fonction de répartition F est constante sur tout intervalle $[x_k; x_{k+1}[$, $k=1 \dots x_k \in X(\Omega)$

Exemple :

En reprenant les données de l'exemple 1.

x_i	p_i	F_X
0	0.125	0 0.125
1	0.375	0.5
2	0.375	0.875
3	0.125	1

9) Loi d'une fonction d'une v.a. :

Soit X une v.a. discrète telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ et g une fonction de $X(\Omega)$ dans l'ensemble $E = \{y_1, y_2, \dots\}$. Alors $Y = g(X)$ est une v.a. telle que : $\forall j; (Y = y_j) =$

$$\{i \in I (X = x_i) \mid g(x_i) = y_j\} \text{ d'où } P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i)$$

Exemple :

Soit X une v.a. discrète de loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$p_i = P(X = x_i)$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.3

Cherchons la loi de $Y = X^2 + 1$

Y prend les valeurs 1, 2 et 5 avec les probabilités :

$$P(Y = 1) = P(X = 0) = 0,3$$

$$P(Y = 2) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0,1 + 0,2 = 0,3$$

$$P(Y = 5) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0,1 + 0,3 = 0,4$$

D'où la loi de Y :

y_j	1	2	4
$p_j = P(Y = y_j)$	0.3	0.3	0.4

$$\sum p_j = 1$$

10) Moments d'une variable aléatoire discrète :**1) Espérance**

Définition. On appelle espérance mathématique ou moyenne d'une variable aléatoire réelle discrète X , la quantité notée $E(X)$ et définie par

$$E(X) = \sum_i x_i p(X = x_i) .$$

Remarque

i. L'espérance de X est définie par une somme qui peut être infinie, c'est pour cette raison qu'elle appartient à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en général.

ii. Lorsque $E(X) = 0$, on dit que la variable aléatoire X est centrée.

Propriétés :

Soient X et Y deux v.a. discrètes (ou continues) et a une constante, on a

$$1 \ E(a) = a$$

$$2 \ E(X + a) = E(X) + a$$

$$3 \ E(aX) = aE(X)$$

$$4 \ E[X - E(X)] = 0$$

$$5 \ E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Preuve :

$$1 \ \text{Soit } X = a \text{ et } P(X = a) = 1, \text{ alors } E(X) = a.P(X = a) = a.1 = a$$

$$2 \ E(X + a) = \sum (x_i + a)P(X = x_i) = \sum x_i P(X = x_i) + a \sum P(X = x_i) = E(X) + a$$

$$3 \ E(aX) = \sum ax_i P(X = x_i) = a \sum x_i P(X = x_i) = aE(X)$$

$$4 \ E[X - E(X)] = \sum (x_i - E(X))P(X = x_i) = \sum x_i P(X = x_i) - \sum E(X)P(X = x_i) \\ = E(X) - E(X) \sum P(X = x_i) = E(X) - E(X) = 0$$

2) Variance et écart-type :

On définit une mesure de dispersion de X autour de son espérance mathématique dite variance de X .

Définition :

Si $E(X^2)$ existe, on appelle variance d'une v.a. X , le nombre $\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2$. On appelle écart-type de X , le nombre $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Formule réduite :

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\text{En effet, } \text{Var}(X) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Propriétés :

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 \ \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

$$2 \ \text{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow X \text{ est dégénérée, i.e. } X = E(X) \text{ avec } P(X = E(X)) = 1$$

$$3 \ \text{Var}(X) < E(X - C)^2 ; \forall C \neq E(X) \text{ car, } E(X - C)^2 = E(X - E(X))^2 + (C - E(X))^2 \text{ puisque } 2(E(X) - C)E(X - E(X)) = 0$$

4 Si $E(|X|^2) < \infty$, la v.a. $Z = (X - E(X)) / \sigma(X)$ est telle que $E(Z) = 0$ et $\sigma(Z) = 1$.

Z est dite v.a. centrée et réduite ($\text{Var}(Z) = \text{Var}(X) / \sigma^2(X) = 1$) associée à la v.a. X .

5 si X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

6 si X et Y sont indépendantes, $V(X-Y) = V(X) + V(Y)$

3) Moments d'ordre supérieur :

Définition : On appelle moment d'ordre k d'une v.a. X , le nombre m^k définie par :

$$m^k = E(X^k) = \sum_i x_i^k P(X = x_i)$$

Définition :

On appelle moment centré d'ordre k d'une v.a. X , le nombre μ^k définie par :

$$\mu^k = E(X - E(X))^k = \sum (x_i - E(X))^k P(X = x_i)$$

II) Loix usuelles discrètes :

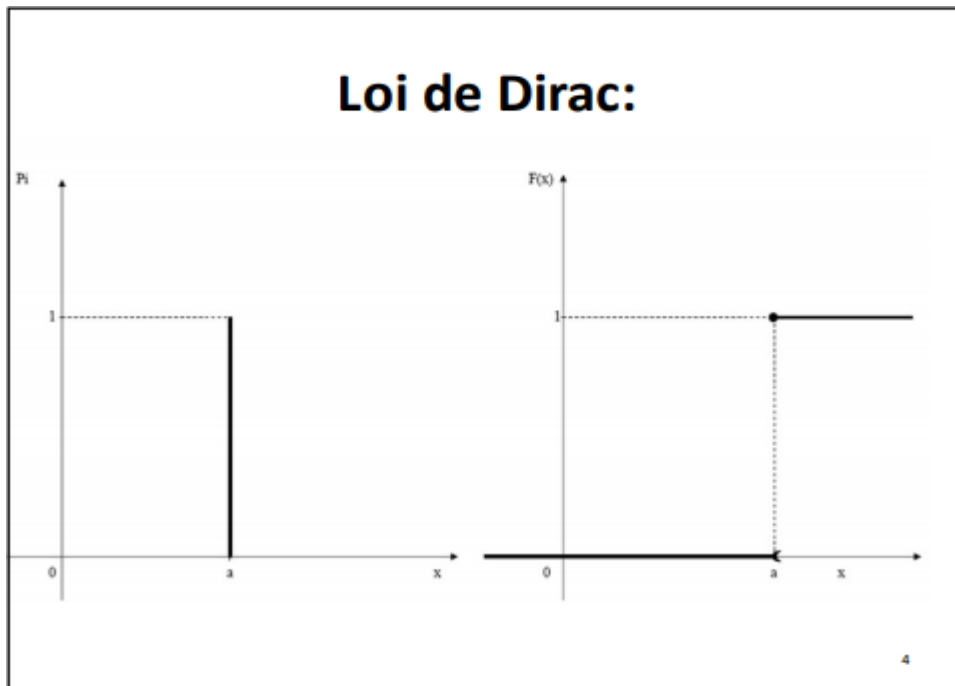
Les lois discrètes les plus utilisées sont : Loi de Dirac, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi hypergéométrique, loi de Poisson et la loi géométrique.

1) Loi de Dirac :

Soit a un nombre fixé. Soit X une v.a. prenant la valeur a avec $P(X = a) = 1$. On appelle loi de Dirac au point a la probabilité

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

- Son espérance mathématique est : $E(X) = a$ et sa variance est : $\text{Var}(X) = 0$.
- La représentation de l'histogramme et de la fonction de répartition sont:



2) Loi de Bernoulli :

Une v. a. X suit une loi de Bernoulli si elle prend les deux valeurs 1 et 0 avec $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=q$ où $p+q=1$.

- p s'appelle paramètre de la loi.
 - $\{X=1\}$ est dit événement succès et $\{X=0\}$ est dit événement échec.
 - X représente donc le nombre de succès obtenu après la réalisation d'une seule expérience aléatoire.
- La loi de probabilité de X suivant une loi de Bernoulli est:

x_i	1	0	$\sum p_i$
p_i	p	$q=1-p$	1

$$\text{Alors } E(X) = \sum x_i p_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

$$\text{Var}(X) = \sum x_i^2 p_i - E(X)^2 = x_1^2 p + x_0^2 q - p^2 = p - p^2$$

$$\text{Var}(X) = p(1-p) = pq$$

3) Loi binomiale :

On considère l'expérience qui consiste en n répétitions indépendantes d'une même expérience dont l'issue est l'apparition ou la non apparition d'un événement A qui:

- Soit se réalise avec la probabilité p (p =probabilité du succès).
- Soit ne se réalise pas avec la probabilité $q=1-p$ (q =probabilité d'échec).

Soit X le nombre d'apparitions de cet événement parmi ces n expériences.

On a $\Omega = \{A, \bar{A}\}^n$ et $0 \leq X \leq n$.

On cherche $P(X=k)$. Le résultat de ces n expériences est une suite $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ où $A_i = A$ ou $\bar{A}$, pour tout $i=1, 2, \dots, n$.

• Si on suppose que A est apparu k fois et $\bar{A}$ $(n-k)$ fois, la probabilité d'une de ces suites $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est $p^k (1-p)^{n-k}$. Comme il existe suites $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ où A est apparu k fois et $\bar{A}$ $(n-k)$ fois,

On déduit que:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}; \quad 0 \leq k \leq n.$$

• On vérifie que $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$

• En effet, $\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p ,

- On écrit $X \sim B(n, p)$
- Son espérance mathématique est : $E(X) = np$
- Sa variance est $\text{Var}(X) = np(1-p)$

La loi binomiale rend compte de tous les phénomènes répétés de manière indépendante pouvant prendre deux états, tels que: succès ou échec, tout ou rien.

4) Loi hypergéométrique :

• On considère une urne contenant N boules dont a sont blanches et $b=N-a$ sont rouges. On tire de cette urne n boules. (On peut tirer les n boules en même temps ou l'une après l'autre sans remise). Soit X la v.a. égale au nombre de boules blanches tirées parmi les n boules. Cette v.a. suit une loi dite hypergéométrique et est notée $H(n, a, b)$.

Comme $0 \leq X \leq a$ et $0 \leq n-X \leq b$, on a: $\max\{0, n-b\} \leq X \leq \min\{a, n\}$

• Soit un nombre entier k tel que: $\max \{0, n-b\} \leq k \leq \min \{a, n\}$. On cherche $P(X=k)$. L'ensemble fondamental Ω est constitué de tous les sous-ensembles de n boules que l'on peut tirer de l'urne $\Omega = P_n(E)$. C'est l'ensemble de parties à n éléments de l'ensemble E des boules.

On a

$$\text{Card } \Omega = C_{a+b}^n$$

• Le nombre de façons de tirer k boules parmi les a blanches est et pour chacune de ces façons il y a $\binom{n-k}{b}$ manières de tirer $n-k$ boules parmi les boules rouges. Donc:

$$P(X = k) = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}} = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

$$\text{Comme } \sum_k C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n \text{ on a bien } \sum_k P(X = k) = 1$$

Espérance mathématique de $X \sim H(n, a, b)$

$$E(X) = \frac{an}{a+b}$$

Sa variance est:

$$\text{Var}(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

5) Loi de Poisson :

On dit qu'une v. a. obéit à une loi de Poisson, si elle est susceptible de prendre toutes les valeurs entières $0, 1, 2, \dots, k, \dots, n, \dots$ les probabilités associées étant $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n, \dots$ avec

$$p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

- λ étant un paramètre positif, et e la base des logarithmes népériens. La constante λ s'appelle le paramètre de la loi.
- La loi de Poisson est notée $P(\lambda)$.
- Son espérance mathématique est : $E(X) = \lambda$

- Sa variance est : $\text{Var}(X) = \lambda$

La loi de Poisson est appelée loi des petites probabilités. On l'utilise pour représenter des phénomènes rares, tels que: nombre d'accidents, nombre de pannes, nombre de déchets dans une fabrication ...

6) Loi géométrique :

On considère une expérience à deux issues possibles (réalisation de l'événement A ou de l'événement $\bar{A}$). On répète indéfiniment cette expérience jusqu'à ce que A se réalise. Soit X la v.a. égale au nombre de répétitions nécessaires pour la réalisation de A.

- On a: $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ et $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ où p est la probabilité de réalisation de l'événement A.
- On vérifie que c'est bien une loi de probabilité. En effet,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

- Son espérance mathématique est:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

- Sa variance est:

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$