# Chapitre 1 : Rappels sur les probabilités

**1) Expérience aléatoire :** la théorie des probabilités est une théorie matetematiques intervenant dans l'étude des phénomènes liée au hasard ; c'est-à-dire des phénomènes, si reproduits plusieurs fois, se déroulent différemment d'une expérience à l'autre et donnent un résultat imprévisible.

On dit que une expérience qu'elle est aléatoire si son résultat ne peut être prévu à priori.

**Définition : l'ensemble** Ω de tous les résultats possible, pour une expérience aléatoire donnée, est dit espace fondamental, il est note un élément de Ω est dit résultat élémentaire.

**Exemple :** soit l'expérience du jet d'une pièce de monnaie si on suppose qu'il n'y a que deux résultat possible sera Ω= {P, F} ou présente ''pile '' et face.

**2) Evénement** : un événement peut à la suite d'une expérience être réalisé ou na pas être réalisé. Les événements doit toujours être défini avec précision.

**Exp :** on lance un dé, l'événement A : "le numéro 3 apparait" est un événement dit élémentaire. (A= {3}).

L'événement B : " un nombre impaire apparait" est un événement composé. (B= {1, 3,5}).

**3) correspondance entre le langage probabiliste et le langage ensembliste :**

| **langage probabiliste** | **langage ensembliste** |
|---|---|
| Evénement certain | Ω |
| Evénement impossible | $\varphi$ |
| A implique B | $A\subset B$ |
| A et B | $A \cap B$ |
| A ou B | $A \cup B$ (où $A+B$ si $A \cap B= \varphi$ ) |
| Non A | $\bar{A}=\Omega-A$ |
| A et B incompatibles | $A \cap B= \varphi$ |

**4) Espace probabilisé :** Soit une expérience aléatoire. On peut identifier un événement aléatoire A avec la partie Ω dont les éléments réalisent A.

L'ensemble de tous les événements est l'ensemble de tous les sous ensembles de Ω : P(Ω).

**Définition :** une classe F de P(Ω) est dit σ-algèbre (ou tribu) de parties de Ω si :

*i.)* $\Omega \in F$
ii.) $A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$
*iii.)* Si $\{A_k,\ k \in \mathrm{N}\}$ est une famille d'éléments de $F$ alors $\cup A_i \in F$

**Définition.** Soient Ω un espace échantillon, $F$ une tribu sur Ω. Le couple (Ω, $F$) est appelé espace probabilisable (espace mesurable).

**Définition.** Soient $A, B, A_1, A_2, ...A_n$ des éléments de $F$.

1) On dit que $A$ et $B$ sont incompatibles ou disjoints si $A \cap B = \emptyset$
2) On dit que $A_1, A_2, ...A_n$ sont deux à deux incompatibles si pour tout $1 \leq i \neq j \leq n : A_i \cap A_j = \emptyset$ .
3) On dit que $A_1, A_2, ...A_n$ forment une partition de $\Omega$, s'ils sont deux à deux incompatibles et si $\cup A_i = \Omega$

**Définition .**On appelle probabilité, toute application $P : \Omega \to [0, 1]$ vérifiant satisfaisant aux axiomes :

1) $P(\Omega) = 1$.
2) $P(\Omega) \geq 0, \quad \forall A \in F$
3) Pour toute famille $\{A_k, k \geq 1\}$ d'éléments de $F$ deux à deux incompatibles, on a $P(\cup A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

**Définition.** Si $(\Omega, F)$ est un espace probabilisable, $P$ une probabilité définie sur $(\Omega, F)$, alors le triplet $(\Omega, F, P)$ est appelé espace de probabilité.

**Proposition**

Soient $(\Omega, F, P)$ un espace de probabilité, $A,B \in F$ , alors

1) $P(\emptyset)=0$ ;
2) $\forall A \in F, \forall B \in F$ ,$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
3) $P(A) = 1 - P(A)$.
4) $\forall A \in F, \forall B \in F$ tq $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$.

**Définition**: La probabilité P définie $(\Omega, F)$, où $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ est un ensemble fini, est dite uniforme (équiprobables) si les probabilités $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\})$

**Théorème :** Dans le cas équiprobable, la probabilité d'un évènement $A$ est donnée par

$P(A)=\frac{P(A)}{P(\Omega)}$ = Nombre de cas favorables / Nombre de cas possibles.

**5) Probabilité conditionnelle**

Soient $(\Omega, F, P)$ un espace de probabilité, $B \in F$ avec $P(B) > 0$.Pour $A \in F$, on désigne par $P(A/B)$ la probabilité de $A$ sachant $B$, elle est définie par

$$P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Remarque 1 :** Soients $A, B$ deux évènements de $\Omega$, $P(A/B)$ se lit la probabilité de $A$ sachant $B$ où la probabilité conditionnelle de $A$ par rapport à $B$.

**Remarque2 :** Soient $C, D \in F$. Cette proposition signifie en particulier que

*1)* $P(\Omega/B) = 1$.
*2)* $P(C \cup D/B) = P(C/B) + P(D/B) - P(C \cap D/B)$.
*3)* Si $C$ et $D$ sont incompatibles, alors $P(C \cup D/B) = P(C/B) + P(D/B)$.
*4)* $P(C/B) = 1 - P(C/B)$.

**6) Indépendance :**

Soit ($\Omega$, *F, P*) un espace de probabilité .Deux évènements *A* et *B* sont indépendants si et seulement si $P\ (A \cap B) = P(A)\ P(B)$

**Définition.** Soient $n \geq 2, A_1, Aa_2, ...A_n$ des évènements d'un espace de probabilité ($\Omega$, *F, P*).
On dit que $A_1, A_2, ...A_n$ sont indépendants si P $(\cap_{i=1} A_{ki}) = \Pi_i\ P(A_{ki})$
Pour tout $k_1, k_2, ..., kp \in \{1, 2, ..., n\}$.

## 7) Formule des probabilités totales

Soient ($\Omega$, *F, P*) un espace de probabilisé. $A_1, A2, . . ., An$ un système complet d'événements et B un événement quelconque, alors on a la formule de probabilités totales :

$$P(B) = \sum_i P(B/A_i) P(A_i)$$

**Démonstration :**

On a $\cup A_i = \Omega$ et $A_i \cap A_j = \varphi$ pour $i \neq j$. comme $B = B \cap \Omega = B \cap (\cup_i A_i) = \cup_i (B \cap A_i)$

Avec $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_i) = \varphi$
Pour $i \neq j$, on a $P(B) = P(\cup_i (B \cap A_i))$, donc

$$P(B) = \sum_i P(B/A_i) P(A_i)$$

## 8) Formule de Bayes

Soient ($\Omega$, *F, P*) un espace de probabilisé. $A_1, A2, . . ., An$ un système complet d'événements et B un événement quelconque tel que $P(B) \neq 0$, on a :
**Démonstration :**

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j) P(A_j)}{\sum_i P(B/A_i) P(A_i)}$$

**Démonstration :**
On a :

$$\forall j, P(A_j/B) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(B)} = \frac{P(B/A_j) P(A_j)}{P(B)}$$

Comme la formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

$$P(B) = \sum_i P(B/A_i) P(A_i)$$

On obtient le résultat.

**Références :**

**[1] :** Probabilités, Boukhari  Fakhreddine. Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen.

**[2]** : Méthodes statistique et probabilités, Khaldi khaled,UMBB .