

Séries TD 2 Optimisation sans Contraintes et Sous Contraintes

Exercice N° 1

On considère la fonction objective suivante :

$$f(x_1, x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

- Trouver les valeurs des variables x_1, x_2 qui maximisent la fonction objective $f(x_1, x_2)$.

Exercice N° 2

Déterminer la valeur x^* pour laquelle la fonction suivante atteinte sa maximale.

$$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{(x-100)}{10}\right]^2}$$

Exercice N° 3

Identifier la nature des points stationnaires pour les fonctions objectives suivantes :

(1) $f = 2 - x^2 - y^2 + 4xy$

(2) $f = 2 + x^2 - y^2$

(3) $f = xy$

(4) $f = x^3 - 3xy^2$

Exercice N° 4

Considérons le problème d'optimisation défini comme suit :

$$\text{Minimiser } f = 9 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

soumise à:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

- Résoudre le problème d'optimisation en utilisant :
 - (a) La méthode de substitution directe des variables.
 - (b) La méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Exercice N° 5

Considérons le problème d'optimisation défini comme suit :

$$\text{Minimiser } f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

soumise à:

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{X}) = x_1 - x_2 = 0 \\ g_2(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

- Résoudre le problème d'optimisation en utilisant :
 - (a) La méthode de substitution des variables.
 - (b) La méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Exercice N° 6

Déterminer les valeurs x, y, z qui minimisent la fonction objective définie par :

$$f(x, y, z) = \frac{6xyz}{x + 2y + 2z}$$

Dont les valeurs de x, y, z sont restreintes (limitées) par la relation suivante :

$$xyz = 16$$

Exercice N° 7

Considérons le problème d'optimisation défini par :

$$\begin{aligned} \text{Minimiser } f &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{soumise à:} \\ \begin{cases} 2 \geq x_1 + x_2 \\ x_2 \geq x_1^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Utiliser les conditions d'optimalité et trouver quel est le point minimum local parmi les trois points suivants :

$$X_1 = \begin{Bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{Bmatrix}, \quad X_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad X_3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Exercice N° 8

On définit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Minimiser } f(x_1, x_2) &= 2x_1 + \beta x_2 \\ \text{soumise à:} \\ \begin{cases} g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2 - 2 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1. Utiliser les conditions d'optimalité pour déterminer la valeur (s) de β pour laquelle(s) le point $x_1^* = 1, x_2^* = 2$ soit optimal au problème.