Séries TD 1 : Introduction à l'Optimisation

Exercice N° 1

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Par la méthode des valeurs propres, déterminer pour chacune des matrices A, B, C si elle est définie positive, définie négative ou indéfinie

Exercice N° 2

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Par la méthode des déterminants des sous matrices, déterminer pour chacune des matrices A, B, C si elle est définie positive, définie négative ou indéfinie

Exercice N° 3

Indiquer si chacune des fonctions quadratiques suivantes est définie positive, définie négative ou indéfinie.

- **(a)** $f(x_1, x_2) = {x_1}^2 - {x_2}^2$
- **(b)** $f(x_1, x_2) = 4x_1x_2$
- **(c)** $f(x_1, x_2) = {x_1}^2 + 2{x_2}^2$
- **(d)** $f(x_1, x_2) = -{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4{x_2}^2$
- **(e)** $f(x_1, x_2, x_3) = -{x_1}^2 + 4x_1x_2 - 9{x_2}^2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3 - 4{x_3}^2$

Exercice N° 4

Etudier chacune des fonctions suivantes pour la convexité, la concavité ou non des deux.

- **(a)** $f(x) = -2x^2 + 8x + 4$
- **(b)** $f(x) = x^2 + 10x + 1$
- **(c)** $f(x_1, x_2) = {x_1}^2 - {x_2}^2$
- **(d)** $f(x_1, x_2) = -{x_1}^2 + 4x_1x_2$
- **(e)** $f(x) = e^{-x}, \quad x > 0$
- **(f)** $f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$
- **(g)** $f(x_1, x_2) = x_1x_2$
- **(h)** $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 10(x_2 - 2)^2$

Exercice N° 5

Relier chacune des fonctions suivantes avec la caractéristique optimale quelle correspond.

(a) $f(x_1, x_2) = 4x_1 - 3x_2 + 2$	Point maximal relatif à (1, 2).
(b) $f(x_1, x_2) = (2x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$	Point selle à l'origine.
(c) $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2$	Aucun point minimal.
(d) $f(x_1, x_2) = x_1x_2$	Point d'inflexion à l'origine.
(e) $f(x) = x^3$	Point minimal relatif à (1, 2).