

Chapitre 5 Commande numérique des systèmes LTI échantillonnés

5.1 Rappels sur les contrôleurs PID analogiques

Les contrôleurs (régulateurs) **Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)** sont des algorithmes de commande permettant d'effectuer une régulation en boucle fermée d'un système industriel. Ce sont les contrôleurs les plus utilisés dans l'industrie et permettent de contrôler la grande majorité des procédés.

5.1.1 Contrôleur proportionnel 'P' analogique

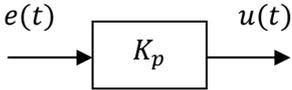
Loi de commande	Fonction de transfert	Schéma fonctionnel
$u(t) = K_p e(t)$	$C_P(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p$	

Tableau (5.1) : Contrôleur proportionnel P analogique

5.1.2 Contrôleur proportionnel-intégral PI analogique

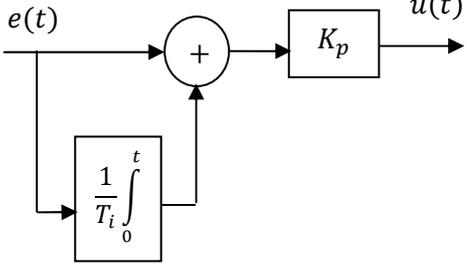
Loi de commande	Fonction de transfert	Schéma fonctionnel
$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$ $= K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right]$	$C_{PI}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \cdot \frac{1 + T_i p}{T_i p}$	

Tableau (5.2) : Contrôleur proportionnel-intégral PI analogique

5.1.3 Contrôleur proportionnel-dérivé PD analogique

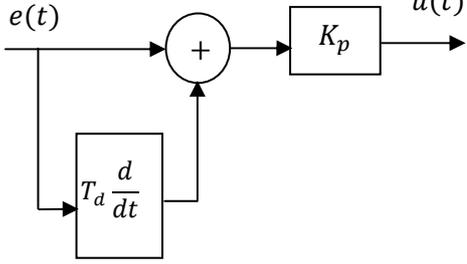
Loi de commande	Fonction de transfert	Schéma fonctionnel
$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$ $= K_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$	$C_{PD}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p (1 + T_d p)$	

Tableau (5.3) : Contrôleur proportionnel-dérivé PD analogique

5.1.4 Contrôleur proportionnel-intégral-dérivé PID analogique

Plusieurs implémentations des contrôleurs de type PID sont possibles, à savoir : structure série, structure parallèle et structure mixte.

(1) Structure PID série

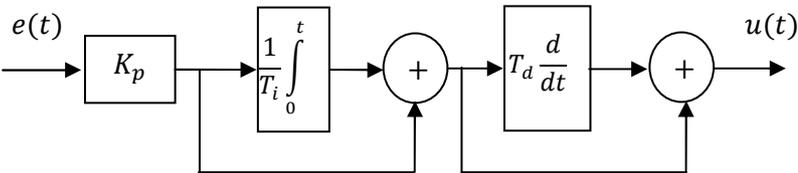
Loi de commande	Schéma fonctionnel
$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$ $= K_p \left[\frac{T_i + T_d}{T_i} e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$	
Fonction de transfert	
$C_{PID}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p)$	

Tableau (5.4) : Contrôleur proportionne-intégral-dérivé série

(2) Structure PID parallèle

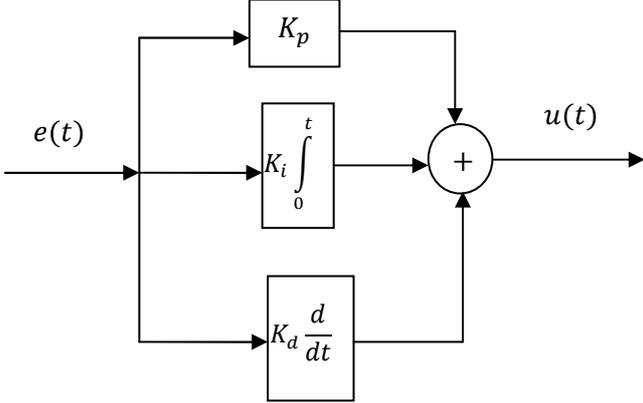
Loi de commande	Schéma fonctionnel
$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$	
Fonction de transfert	
$C_{PID}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p + K_i \frac{1}{p} + K_d p$	

Tableau (5.5) : Contrôleur proportionne-intégral-dérivé parallèle

(3) Structure PID mixte

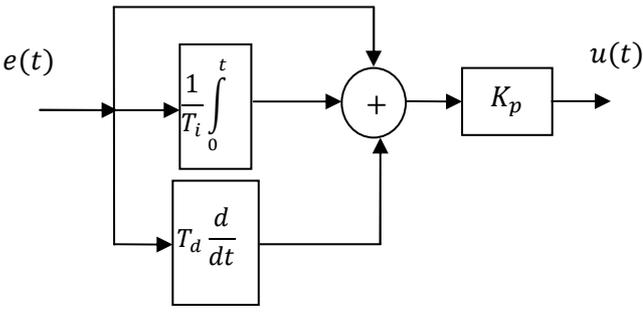
Loi de commande	Schéma fonctionnel
$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$	
Fonction de transfert	
$C_{PID}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$	

Tableau (5.6) : Contrôleur proportionne-intégral-dérivé mixte

Remarque

Le terme dérivé incorporé dans le contrôleur PID est implémenté par la fonction de transfert $T_d p$. En fait, cette fonction de transfert est irréalisable physiquement car non causale. Dans la pratique, la dérivée est réalisée sous forme filtrée :

$$\frac{T_d p}{1 + \frac{T_d p}{N}}$$

Par conséquent, la fonction de transfert du contrôleur PID mixte devient sous la forme filtrée suivante :

$$C_{PID}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d p}{N}} \right)$$

5.2 Avantages et inconvénients des actions d'un contrôleur PID analogique

5.2.1 Action proportionnelle P

- permet de corriger les effets d'une perturbation ;
- permet de diminuer l'erreur en régime permanent ;
- **permet d'augmenter la rapidité en régime transitoire ;**
- **déstabilise le système quand on augmente le gain K_p .**

5.2.2 Action intégrale I

- annule l'erreur statique (erreur en régime permanent);
- diminuer la rapidité et l'amortissement en régime transitoire ;
- déstabilise le système quand on augmente le gain d'intégration K_i (T_i trop faible).

5.2.3 Action dérivée D

- augmente la rapidité et l'amortissement en régime transitoire ;
- **stabilise plus rapidement le système (temps de réponse amélioré) ;**
- **anticipe les erreurs futures ;**
- n'annule pas l'erreur statique (aucun effet en régime permanent);
- **sensible aux parasites.**

5.3 Transposition (Discrétisation) des contrôleurs PID analogiques

Afin de pouvoir importer un régulateur PID analogique dans un ordinateur numérique, il faut le transposer (numériser) en utilisant les différentes techniques de discrétisation expliquées au cours du chapitre précédent.

Les *régulateurs discrets* élaborent une grandeur de commande discrète en fonction de l'écart de réglage discret du système à commander. Selon la complexité du régulateur, la grandeur de commande à l'instant k est formée en fonction de la valeur de l'écart à cet instant, mais aussi aux instants précédents, $(k - 1)$, $(k - 2)$, ... etc.

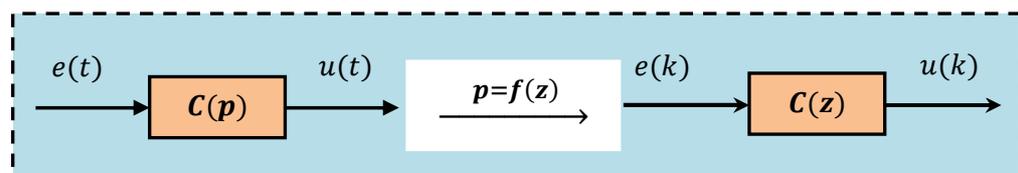


Figure (5.1) : Approximation de la variable complexe 'p'

5.3.1 Les différentes approximations de la dérivée et de l'intégrale continues

Les approximations les plus utilisées pour approcher la dérivée et l'intégrale continues sont résumées dans le tableau suivant :

	Dérivation	Intégration
Méthode d'Euler arrière (Discrétisation arrière)	$p \mapsto \frac{(z-1)}{Tz}$	$\frac{1}{p} \mapsto \frac{Tz}{(z-1)}$
Méthode d'Euler avant (Discrétisation avant)	$p \mapsto \frac{(z-1)}{z}$	$\frac{1}{p} \mapsto \frac{z}{(z-1)}$
Méthode de Tustin (Transformation bilinéaire)	$p \mapsto \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$	$\frac{1}{p} \mapsto \frac{T(z+1)}{2(z-1)}$

Tableau (5.7): Différentes approximations de la dérivée et de l'intégrale continues

5.3.2 Réalisation des contrôleurs PID numériques

Dans cette section, nous allons utiliser l'*approximation d'Euler arrière* pour discrétiser les différents contrôleurs numériques cités dans la section 5.1.

5.3.2.1 Contrôleur P numérique

Le régulateur P analogique a pour fonction de transfert : $C_p(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p$. En utilisant la transformée en 'z', nous obtenons la fonction de transfert du contrôleur P numérique équivalent:

$$C_p(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \quad (5.2)$$

Ce régulateur est décrit par l'équation récurrente suivante :

$$(u\ k) = K_p e(k) \quad (5.3)$$

Son schéma fonctionnel est donné comme suit :

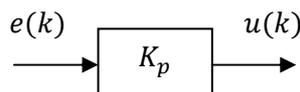


Figure (5.2) : Schéma fonctionnel du contrôleur P numérique

5.3.2.2 Contrôleur PI numérique

Soit un contrôleur PI analogique dont la fonction de transfert est de la forme :

$$C_{PI}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$$

En utilisant l'approximation d'Euler Arrière, nous trouvons la fonction de transfert discrète correspondante :

$$C_{PI}(z) = C_{PI}(p) \Big|_{p=\frac{(z-1)}{Tz}} = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \left[\frac{(z-1)}{Tz}\right]}\right) = K_p \cdot \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1}\right) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (5.4)$$

L'équation récurrente suivante permet de décrire ce régulateur :

$$u(k) = u(k-1) + r_0 e(k) + r_1 e(k-1) \quad (5.5)$$

Avec :

$$\begin{cases} r_0 = K_p \cdot \left(1 + \frac{T}{T_i}\right) \\ r_1 = -K_p \end{cases}$$

Son schéma fonctionnel peut être donné comme suit :

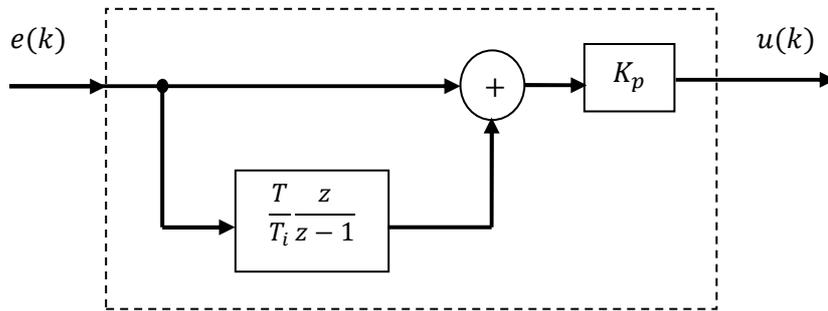


Figure (5.3) : Schéma fonctionnel du contrôleur PI numérique

5.3.2.3 Contrôleur PD numérique

Un contrôleur PD analogique est décrit par la fonction de transfert :

$$C_{PD}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p(1 + T_d p)$$

Sa version numérique est obtenue en utilisant l'approximation d'Euler arrière :

$$C_{PD}(z) = C_{PD}(p) \Big|_{p=\frac{z-1}{Tz}} = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \cdot \left(1 + T_d \left[\frac{(z-1)}{Tz}\right]\right) = K_p \cdot \left(1 + \frac{T_d z - 1}{T z}\right) \quad (5.6)$$

Ou bien :

$$C_{PD}(z) = r_0 + r_1 z^{-1} \quad (5.7)$$

Ce contrôleur est représenté par l'équation récurrente suivante :

$$u(k) = r_0 e(k) + r_1 e(k-1) \quad (5.8)$$

Avec :

$$\begin{cases} r_0 = K_p \cdot \left(1 + \frac{T_d}{T}\right) \\ r_1 = -K_p \frac{T_d}{T} \end{cases}$$

Son schéma fonctionnel peut être donné comme suit :

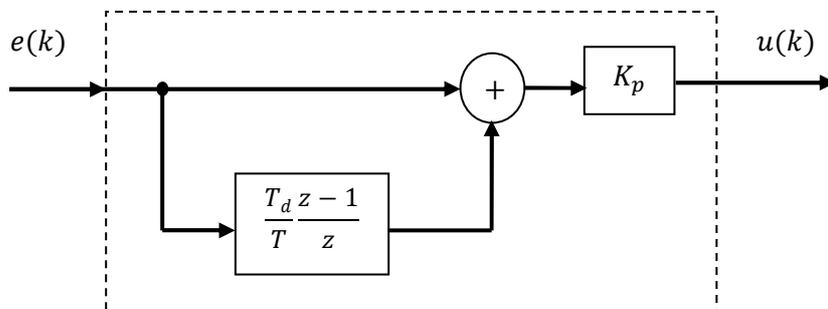


Figure (5.4) : Schéma fonctionnel du contrôleur PD numérique

5.3.2.4 Contrôleur PID numérique

Dans cette section, les trois structures des contrôleurs PID analogiques étudiées dans la première section (section 5.1), sont discrétisées par la méthode *d'Euler arrière*. Par conséquent, leurs fonctions de transfert numériques équivalentes et leurs équations récurrentes sont calculées ; et leurs schémas fonctionnels correspondants sont présentés.

(1) Structure PID numérique série

La structure série du contrôleur PID numérique est définie par la fonction de transfert :

$$C_{PID}(z) = C_{PID}(p) \Big|_{p=\frac{z-1}{Tz}} = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \cdot \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} \right) \left(1 + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \right) \quad (5.9)$$

Cette fonction de transfert peut être écrite :

$$C_{PID}(z) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (5.10)$$

L'équation récurrente correspondante est donnée par :

$$u(k) = u(k-1) + r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + r_2 e(k-2) \quad (5.11)$$

Avec :

$$\begin{cases} r_0 = K_p'(T^2 + TT_i' + K_d'T_i')/TT_i' \\ r_1 = \frac{-K_p'(T + 2T_d')}{T} \\ r_2 = \frac{K_p'T_d'}{T_i} \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} K_p' = K_p \frac{T_i + T_d}{T_i} \\ T_i' = T_i + T_d \\ T_d' = \frac{T_i T_d}{T_i + T_d} \end{cases}$$

Cette structure, apparaissant sous forme de schéma fonctionnel dans la figure suivante :

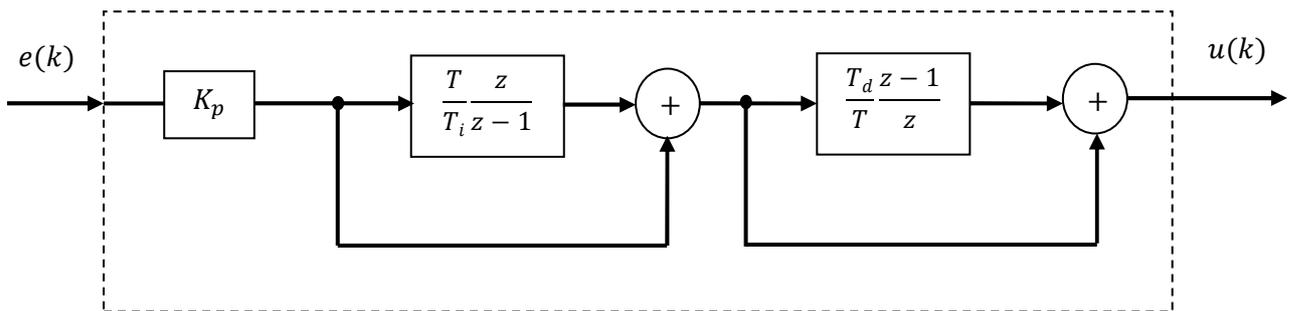


Figure (5.5) : Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique série

(2) Structure PID numérique parallèle

Une structure parallèle du contrôleur PID numérique s'obtient en posant :

$$\begin{cases} T_i = \frac{K_p}{K_i} \\ T_d = \frac{K_d}{K_p} \end{cases}$$

Comme la structure série, ce contrôleur peut être décrit par :

- une fonction de transfert en 'z' :

$$C_{PID}(z) = C_{PID}(p)|_{p=\frac{z-1}{Tz}} = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + \left(K_i T \frac{z}{z-1}\right) \left(\frac{K_d z - 1}{T z}\right) \quad (5.12)$$

- une fonction de transfert en 'z-1' :

$$C_{PID}(z) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (5.13)$$

- une équation récurrente:

$$u(k) = u(k-1) + r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + r_2 e(k-2) \quad (5.14)$$

Avec :

$$\begin{cases} r_0 = \frac{TK_p + K_d}{T} \\ r_1 = \frac{(T^2 K_i - TK_p - 2K_d)}{T} \\ r_2 = \frac{K_d}{T} \end{cases}$$

- un schéma fonctionnel:

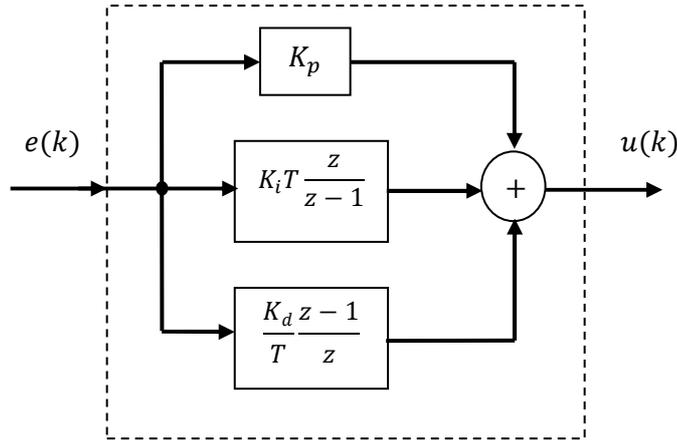


Figure (5.6) : Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique parallèle

(3) Structure PID numérique mixte

Le régulateur PID analogique mixte, quand la dérivation n'est pas filtrée, possède la fonction de transfert :

$$C_{PID}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right) \quad (5.15)$$

Elle est non causale. Par contre, sa version numérique est causale :

$$C_{PID}(z) = C_{PID}(p)|_{p=\frac{z-1}{Tz}} = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left[1 + \left(\frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1}\right) + \left(\frac{T_d z - 1}{T z}\right)\right] \quad (5.16)$$

Cette dernière peut être écrite sous la forme suivante :

$$C_{PID}(z) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (5.17)$$

L'équation récurrente de cette structure est donnée par :

$$u(k) = u(k-1) + r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + r_2 e(k-2) \quad (5.18)$$

Avec :

$$\begin{cases} r_0 = K_p \left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T} \right) \\ r_1 = -K_p \left(1 + 2 \frac{T_d}{T} \right) \\ r_2 = K_p \frac{T_d}{T} \end{cases}$$

Cette variante est représentée par le schéma fonctionnel suivant :

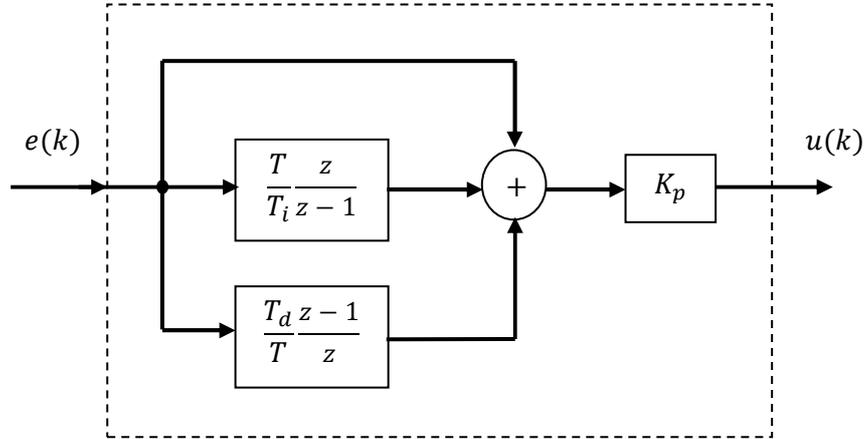


Figure (5.7) : Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique mixte

Cette variante est dite forme non filtrée. En fait, il est préférable, pour réaliser un contrôleur PID numérique, de prendre la forme filtrée suivante :

$$C_{PID}(z) = K_p \left[1 + \left(\frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} \right) + \left(\frac{N(z-1)}{\left(1 + N \frac{T}{T_d} \right) z - 1} \right) \right] \quad (5.19)$$

On peut écrire aussi la fonction de transfert de l'équation (5.19) sous la forme réduite suivante :

$$C_{PID}(z) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})} \quad (5.20)$$

Dans ce cas l'équation récurrente est donnée comme suit :

$$u(k) = (1 - s_1)u(k-1) + s_1 u(k-2) + r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + r_2 e(k-2) \quad (5.21)$$

Avec :

$$\begin{cases} s_1 = -\frac{T_d}{T_d + NT} \\ r_0 = K_p \left(1 + \frac{T}{T_i} - N s_1 \right) \\ r_1 = K_p \left(s_1 \left(1 + \frac{T}{T_i} + 2N \right) - 1 \right) \\ r_2 = -K_p s_1 (1 + N) \end{cases}$$

Avec :

N : est un entier positif non nul.

D'autre part, le schéma fonctionnel de la figure (5.7) devient :

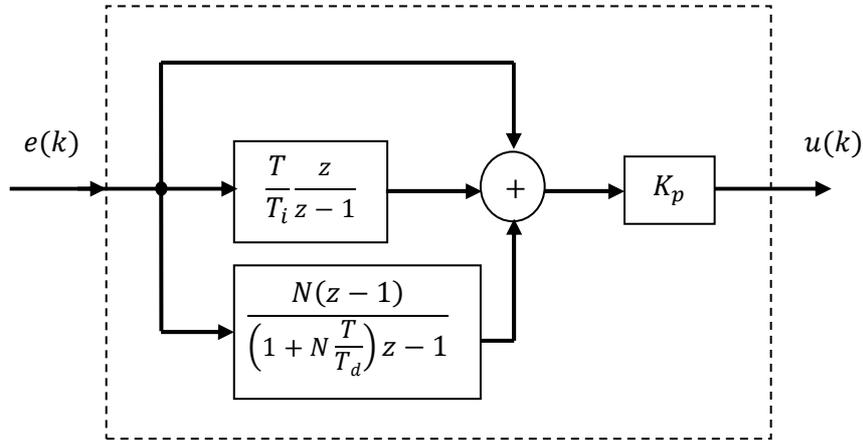


Figure (5.8) : Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique filtré mixte

Exemple 5.1

Soit le régulateur PID analogique mixte filtré :

$$C_{PID}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = 0.202 \left(1 + \frac{1}{60.74p} + \frac{7.20p}{1 + 9.255p} \right)$$

En utilisant l'approximation d'Euler arrière, la version discrète de $C_{PID}(p)$ est obtenue comme suit :

$$C_{PID}(z) = C_{PID}(p) \Big|_{p=\frac{z-1}{TZ}} = 0.202 \left(1 + \frac{1}{60.74p} + \frac{7.20p}{1 + 9.255p} \right) \Big|_{p=\frac{z-1}{TZ}}$$

Prenons $T = 10(s)$:

$$C_{PID}(z) = 0.202 \left(1 + \frac{1}{60.74 \left(\frac{z-1}{10z} \right)} + \frac{7.20 \left(\frac{z-1}{10z} \right)}{1 + 9.255 \left(\frac{z-1}{10z} \right)} \right)$$

$$C_{PID}(z) = 0.202 \left(1 + \frac{z}{6.074z - 6.074} + \frac{0.778z - 0.778}{2.0806z - 1} \right)$$

L'expression en fonction de 'z-1' est obtenue comme suit:

$$C_{PID}(z) = 0.202 \left(1 + \frac{z}{6.074z - 6.074} + \frac{0.778z - 0.778}{2.0806z - 1} \right) \frac{z^{-1}}{z^{-1}}$$

Le régulateur PID numérique aura alors pour expression :

$$C_{PID}(z) = \frac{0.3108 - 0.4661z^{-1} + 0.1726z^{-2}}{1 - 1.4806z^{-1} + 0.4806z^{-2}}$$

Tirons l'équation récurrente correspondante :

$$C_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{0.3108 - 0.4661z^{-1} + 0.1726z^{-2}}{1 - 1.4806z^{-1} + 0.4806z^{-2}}$$

⇔

$$(1 - 1.4806z^{-1} + 0.4806z^{-2})U(z) = (0.3108 - 0.4661z^{-1} + 0.1726z^{-2})E(z)$$

⇔

$$U(z) - 1.4806z^{-1}U(z) + 0.4806z^{-2}U(z) = 0.3108E(z) - 0.4661z^{-1}E(z) + 0.1726z^{-2}E(z)$$

Appliquant la transformée en 'z' inverse, le contrôleur aura pour équation récurrente:

$$u(k) = 0.3108e(k) - 0.4661e(k-1) + 0.1726e(k-2) + 1.4806u(k-1) - 0.4806u(k-2)$$

Ce régulateur PID numérique peut être représenté schématiquement par :

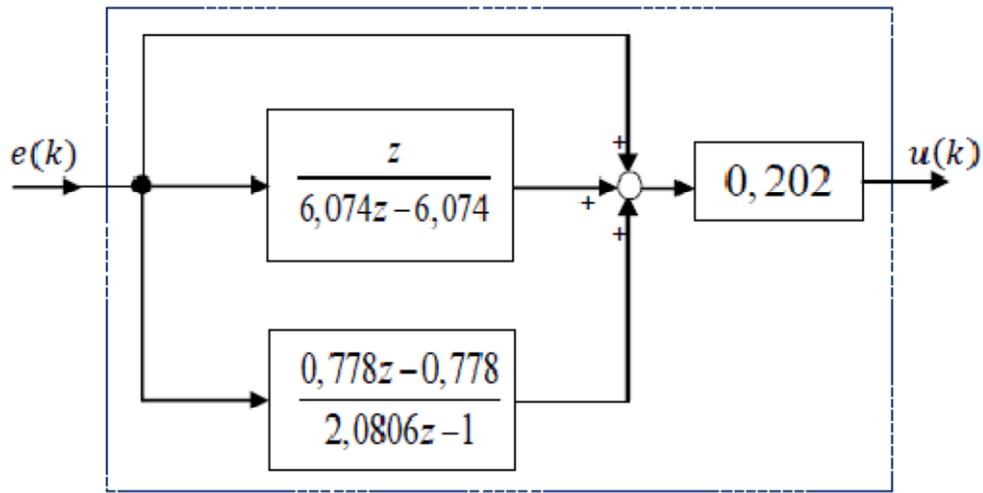


Figure (5.9) : Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique filtré mixte

5.4 Réglage des contrôleurs PID numériques

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes pour calculer les paramètres de régulateurs PID numériques. Ces méthodes peuvent être empiriques, algébriques, ou fréquentielles. Cette section présente quelques techniques de réglage des régulateurs PID numériques, comme la méthode empirique proposée par **Takahashi** et la méthode de placement de pôles et notamment la technique de compensation pôle-zéro.

5.4.1 Réglage de Takahashi pour des contrôleurs PID numériques

La méthode de **Takahashi** est la généralisation au cas discret de la méthode de **Ziegler-Nichols** utilisée pour le domaine continu. Par conséquent, comme le cas continu il faut soumettre le système discret à l'un des deux essais : en boucle ouverte (**BO**) et en boucle fermée (**BF**).

5.4.1.1 Essai en boucle ouverte (BO) : Méthode de la réponse indicielle

Cette méthode est basée sur les deux paramètres 'a' (pente) et 'T_c' (seuil) de la réponse indicielle issue d'un essai en boucle ouverte (BO), comme le montre les figures (5.10) et (5.11) :

