

## Chapitre 4 Analyse des asservissements linéaires échantillonnés

### 1- Stabilité des systèmes linéaires échantillonnés

#### 1.1 Stabilité d'un système discret

##### 1.1.1 Définition

Un système linéaire discret décrit par une *fonction de transfert rationnelle*  $G(z)$  est stable si et seulement si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité (de rayon  $R=1$  et de centre  $(0,0)$  dans le plan complexe ' $z$ '), comme le montre la figure suivante :

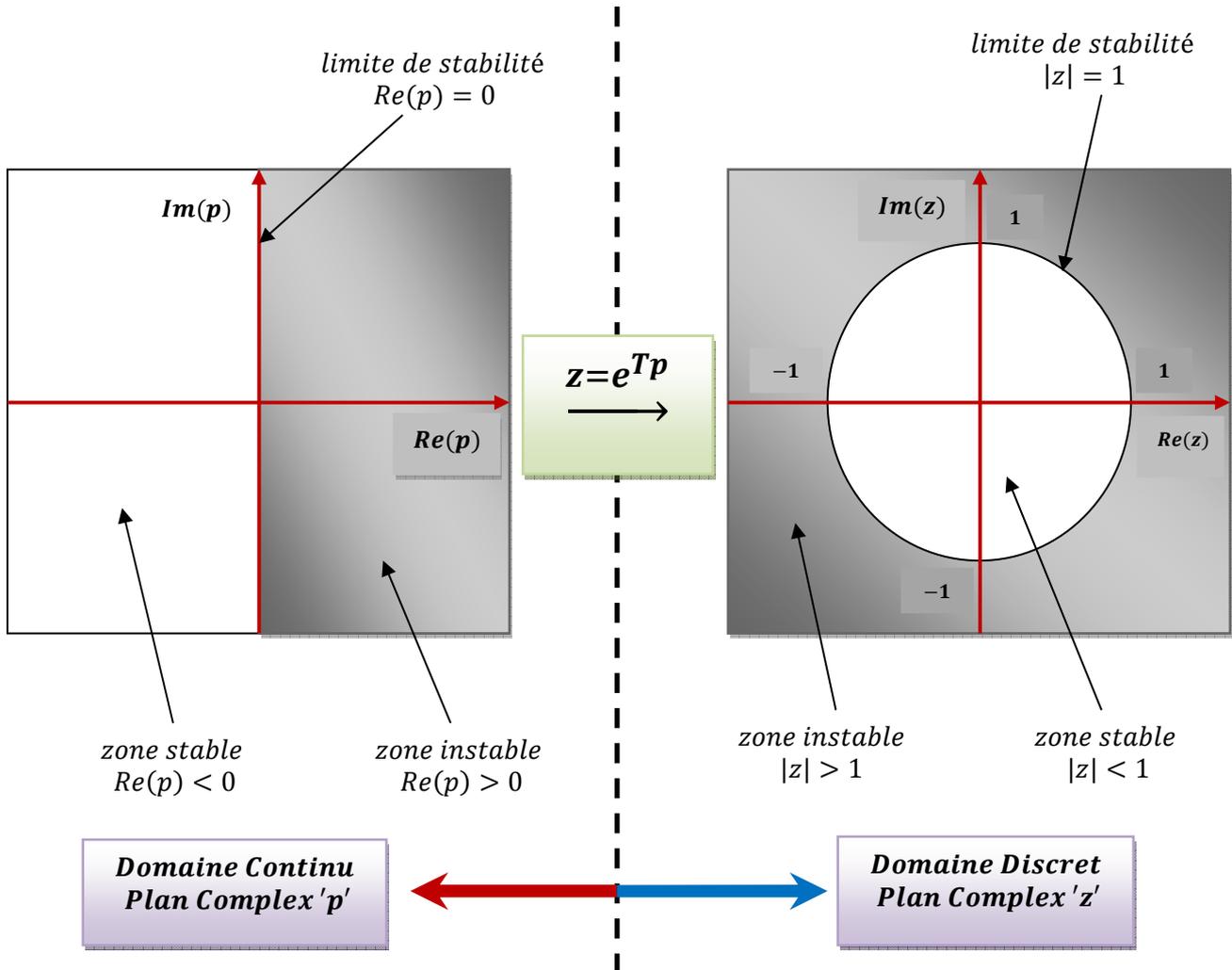


Figure (4.1) : Correspondance entre le plan complexe ' $p$ ' et le plan complexe ' $z$ ' : Passage du domaine continu au domaine discret

##### 1.1.2 Théorème de stabilité

Soit le système discret décrit par la fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z^1 + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z^1 + a_n}, \quad n \geq m, \quad a_0 > 0 \quad (4.1)$$

On définit les pôles  $p_i$  du système  $G(z)$  qui sont les racines de l'équation (polynôme) caractéristique :

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z^1 + a_n = 0 \quad (4.2)$$

Alors, on a le théorème suivant définissant la stabilité du système discret  $G(z)$  :

*le système  $G(z)$  est stable si et seulement si tous les pôles  $p_i$  ont le module  $< 1$*

On exprime ça par :

Si  $\forall i, |p_i| < 1 \Leftrightarrow$  le système  $G(z)$  est stable

#### Exemple 4.1

Soit un système LTI discret du premier ordre suivant :

$$G(z) = \frac{0.4877}{(z - 0.9512)}$$

On veut explorer la stabilité de ce système.

#### Solution :

On commence par la détermination des pôles du système en Formant et résolvant l'équation caractéristique du système :

$$D(z) = z - 0.9512 = 0 \Leftrightarrow p = 0.9512$$

Donc, le système  $G(z)$  possède un pôle unique  $p = 0.9512$ . Et comme  $|p = 0.9512| = 0.9512 < 1 \Leftrightarrow$  le système  $G(z)$  est stable.

Cette stabilité peut être évaluée en utilisant le code **MATLAB** suivant :

```
NumG= 0.4877;
DenG = [1 -0.9512];
figure;
zplane(NumG,DenG) ;
xlabel('Partie réelle de z') ;
ylabel('Partie imaginaire de z') ;
title ('Cercle de stabilité') ;
grid ;
```

La figure (4.2) montre *le cercle de stabilité* obtenu par ce code. Dans cette figure, le pôle est représenté par 'x'. Le système est stable car le seul pôle du système est situé à l'intérieur du cercle unité (cercle de stabilité).

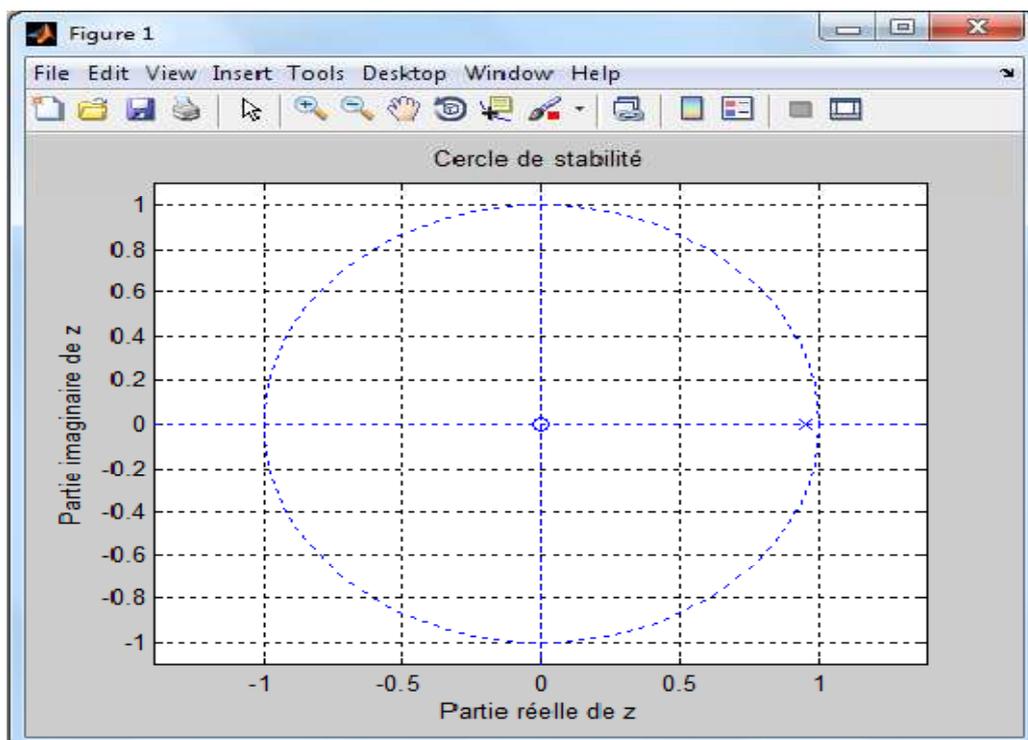


Figure (4.2): Cercle de stabilité dans le plan 'z'

### 1.1.3 Critère de Jury de la Stabilité

#### 1.1.3.1 Définition

Le **critère de Jury** est un critère algébrique permettant d'évaluer la stabilité d'un système discret à partir des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert en boucle ouverte (ou bien en boucle fermée). En fait, le critère de **Jury** de stabilité s'applique directement sur le polynôme caractéristique du système.

La fonction de transfert en boucle fermée précédente peut être exprimée sous la forme fraction polynomiale en  $z$  comme suit :

$$G_{BF}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z^1 + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z^1 + a_n}, \quad n \geq m, \quad a_0 > 0$$

Le polynôme caractéristique du système est donné comme suit :

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z^1 + a_n$$

Où ;

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  sont des coefficients réels et  $a_0 > 0$ .

L'évaluation de la stabilité du système par le critère de **Jury** consiste en premier lieu dans la construction du tableau de

**Jury** suivant :

ligne	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	...	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
<b>1</b>	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	...	$a_2$	$a_1$	$a_0$
<b>2</b>	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
<b>3</b>	$B_{n-1}$	$B_{n-2}$	$B_{n-3}$	$B_{n-4}$	...	$B_1$	$B_0$	
<b>4</b>	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	...	$B_{n-2}$	$B_{n-1}$	
<b>5</b>	$C_{n-2}$	$C_{n-3}$	$C_{n-4}$	$C_{n-5}$	...	$C_0$		
<b>6</b>	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	...	$C_{n-2}$		
.	.	.	.	.	.			
.	.	.	.	.	.			
.	.	.	.	.	.			
<b>2n - 5</b>	$P_3$	$P_2$	$P_1$	$P_0$				
<b>2n - 4</b>	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$				
<b>2n - 3</b>	$Q_2$	$Q_1$	$Q_0$					

Tableau 4.1 : Tableau de Jury

Avec :

$$B_i = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-i} \\ a_0 & a_{i+1} \end{vmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$C_i = \begin{vmatrix} B_{n-1} & B_{n-2-i} \\ B_0 & B_{i+1} \end{vmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2$$

.

.

.

$$Q_i = \begin{vmatrix} P_3 & P_{2-i} \\ P_0 & P_{i+1} \end{vmatrix}, \quad i = 0, 1$$

#### 1.1.3.2 Enoncé du Critère de Jury

Un système discret ayant une équation (polynôme) caractéristique :

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z^1 + a_n$$

Est dit stable si toutes les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1)  $|a_n| < a_0$
- (2)  $D(1) > 0$
- (3)  $(-1)^n D(-1) > 0$
- (4)  $|B_{n-1}| > |B_0|$
- (5)  $|C_{n-2}| > |C_0|$
- ⋮
- ⋮
- ⋮
- $|Q_2| > |Q_0|$

**Exemple 4.2 :**

Soit un système discret ayant un polynôme caractéristique de second ordre suivant ;

$$D(z) = z^2 + z^1 + 0.21$$

Etudier la stabilité du système.

**Solution :**

En utilisant le critère de Jury de stabilité, on a :

$$n = 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_2 = 0.21$$

Nombre de lignes du tableau de Jury :

On a :  $n = 2$ , donc le tableau de Jury possède  $2n - 3 = 1$  ligne,

En conséquence, le tableau de Jury suivant :

ligne	$z^0$	$z^1$	$z^2$
1	$a_2$	$a_1$	$a_0$

A partir de ce tableau, seulement les trois premières conditions de stabilité selon le critère de Jury sont à vérifier.

- (1)  $|a_2 = 0.21| < 1$
- (2)  $D(1) = 1 + 1 + 0.21 = 2.21 > 0$
- (3)  $(-1)^2 D(-1) = 1 - 1 + 0.21 = 0.21 > 0$

Les conditions sont satisfaites, ce qui indique que les pole du système sont à l'intérieur du cercle unité du plan z.

On conclut que le système est stable.

**Remarque Importante:**

❖ **Cas de  $a_0 < 0$  :**

- d'abord, on construit un autre polynôme :  $D_1(z) = -D(z)$  ;
- puis, on traite le nouveau polynôme  $D_1(z)$  par le critère de Jury.

**2- Analyse temporelle des systèmes linéaires échantillonnés (discrets)**

**2.1 Réponses temporelles**

Considérons un système linéaire échantillonné (discret) :

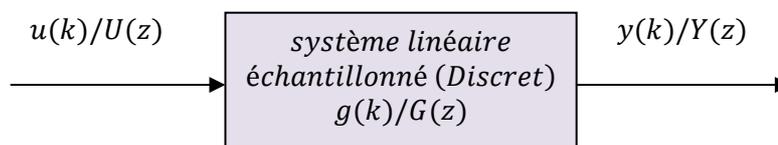


Figure (4.3) : Schéma fonctionnel d'un système linéaire échantillonné (discret)

La réponse temporelle d'un tel système à une entrée quelconque  $u(k)$ ,  $k \geq 0$ , est alors donnée par la **convolution numérique** suivante :

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} u(i)g(k-i), \quad k \geq 0 \quad (3.8)$$

La réponse d'un système échantillonné à un signal d'entrée peut être déterminée de différentes façons :

- Résoudre l'équation aux différences analytiquement au profit de la sortie  $y(k)$ ;
- A partir de la Fonction de transfert en  $z$ , déterminer  $Y(z) = G(z)U(z)$  et calculer la sortie  $y(k)$  par transformée en ' $z$ ' inverse en supposant que **les conditions initiales sont nulles**. Pour cela on utilise la table de transformée en ' $z$ ' ;
- Décomposer  $\frac{Y(z)}{z}$  en éléments simples et déterminer la réponse temporelle de chaque élément de  $(z)$  .

Comme la méthode précédente on suppose que les conditions initiales sont nulles.

### 2.1.1 Réponse impulsionnelle :

La réponse impulsionnelle est la réponse de sortie d'un système résultante d'une entrée en impulsion de Dirac.

### 2.1.2 Réponse indicielle :

La réponse indicielle est la réponse de sortie d'un système résultante d'une entrée en échelon.

#### Exemple 4.3

Soit un système LTI discret du premier ordre suivant :

$$G(z) = \frac{0.4877}{(z - 0.9512)}$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce système en boucle ouverte peuvent être obtenues par le code **MATLAB** suivant :

```
NumG= 0.4877;
DenG = [1 -0.9512];
figure (1);
dimpulse(NumG, DenG) % Trace la réponse impulsionnelle de la fonction G(z)
title('Réponse impulsionnelle de G(z)');
grid ;
figure (2);
dstep(NumG, DenG) % Trace la réponse indicielle de la fonction G(z)
title('Réponse indicielle de G(z)');
grid;
```

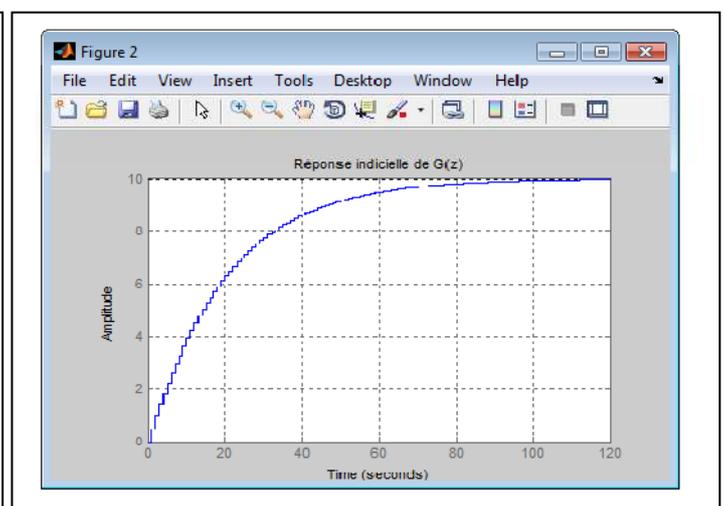
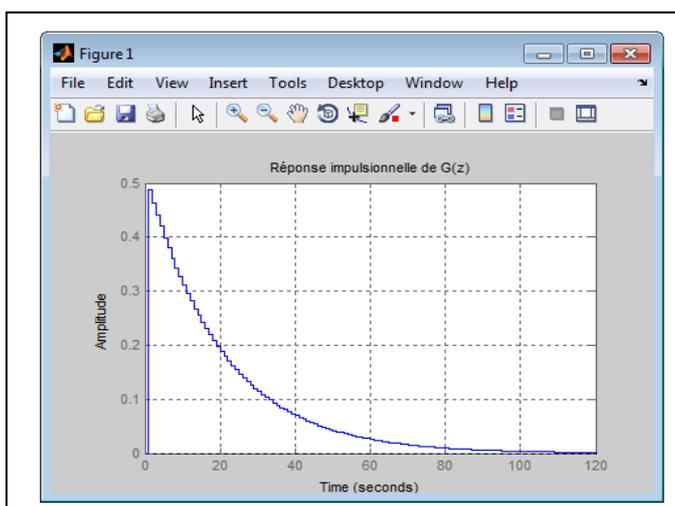


Figure (4.4): Réponse impulsionnelle de de  $G(z)$  en boucle ouverte. Figure (4.5): Réponse indicielle de  $G(z)$  en boucle ouverte

## 2.2 Performances temporelles

Les performances temporelles désirées d'un système asservi linéaire et échantillonné (discret) sont généralement spécifiées relativement à la réponse indicielle du système bouclé (Figure (4.6)).

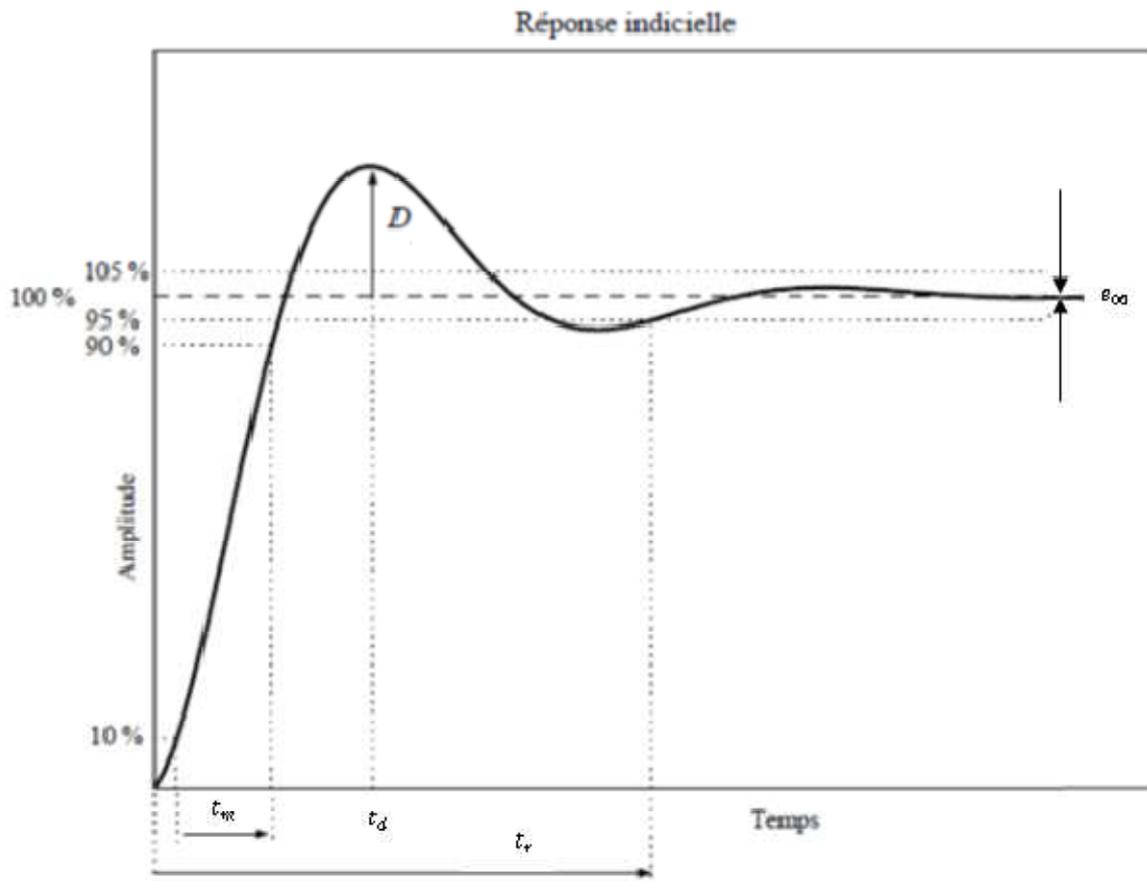


Figure (4.6) : Performances temporelles associées à une réponse transitoire à un échelon

Cette réponse est caractérisée par :

- Un **premier dépassement** (pic)  $D$  : traduisant le **degré d'amortissement** (le **degré de stabilité**) du système ;
- le **temps de premier pic**  $td$  : traduisant la rapidité du régime transitoire ;
- le **temps de montée**  $tm$  : comme étant le temps que met la réponse indicielle pour aller de 10% à 90% de sa valeur finale.
- le **temps de réponse**  $tr$  : c'est le temps requis (nécessaire) pour que la courbe de sortie atteigne et reste à l'intérieur d'une bande, exprimée en pourcentage (2% ou 5%), relativement à sa valeur finale. Il permet de mesurer **la rapidité** du système asservi ;
- **l'erreur statique**  $e(\infty) = e_s$  : l'erreur statique du système est caractérisée par l'erreur en régime permanent en présence d'un échelon. Elle permet de mesurer **la précision** du système asservi. En fait, on souhaite généralement obtenir un régime transitoire rapide et bien amorti. Le **degré d'amortissement** et **rapidité** du régime transitoire sont liés à **la configuration des pôles et des zéros** du système dans le plan complexe.

## 2.3 Gain statique

Considérons un système linéaire échantillonné de fonction de transfert  $G(z) = \frac{Y(z)}{U_1(z)}$ . Si on met à l'entrée de ce système un échelon d'amplitude  $A$ , soit  $u_1(kT) = A \cdot u(kT)$ , on a en sortie :

$$Y(z) = G(z)U_1(z) = G(z) \cdot A \cdot \frac{z}{(z-1)} \quad (4.9)$$

D'après le théorème de la valeur finale, la sortie  $(kT)$ , en régime établi (permanent), tend donc vers :

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} y(kt) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) G(z) \cdot A \cdot \frac{1}{(1 - z^{-1})} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} A G(z) = A \cdot G(1)\end{aligned}\quad (4.10)$$

Le gain statique ( $K$ ) du système échantillonné, égal à **la valeur finale** de la sortie sur l'amplitude de l'échelon, est donc égale à :

$$K = \frac{AG(1)}{A} = G(1) \quad (3.11)$$

Notons qu'un système continu et sa version échantillonnée possède le même gain statique.

#### Exemple 4.4

On considère un système continu de fonction de transfert :

$$G_p(p) = \frac{0.2}{(1 + 5p)}$$

Le code **MATLAB** suivant permet de calculer à la fois le **gain statique** du système continu et de sa version échantillonnée:

```
NumGc= 0.2;
DenGc = [5 1];
Gc = tf(NumGc, DenGc);
T= 1;
Gd = c2d(Gc,T, 'zoh')
% Calcul du gain statique de la fonction continue G_c(p)
KGc= dcgain(Gc) ;
[NumGd,DenGd]=tfdata(Gd,'v');
% Calcul du gain statique de la fonction discrète G_d (z)
KGd= ddcgain(NumGd,DenGd)
```

Ce code retourne alors le résultat suivant :

KGc =  
0.2000

KGd =  
0.2000

## 2.4 Etudes temporelles des systèmes élémentaires

### 2.4.1 Systèmes du premier ordre

Soit un système LTI continu du premier ordre défini par le schéma fonctionnel suivant:

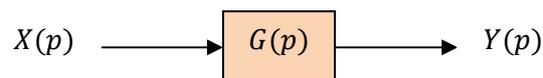


Figure (4.7) : Schéma fonctionnel d'un système LTI continu en boucle ouverte (BO)

Ce système est modélisé par une fonction de transfert continue sous forme normalisée suivante :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (4.12)$$

Où :

$K$  et  $\tau$  sont respectivement le gain statique et la constante du temps du système  $G(p)$ .

La fonction de transfert possède un pôle unique:  $p_c = -\frac{1}{\tau}$  ( $p_c$ : est le pôle du système continu. Il est toujours réel négatif, car par définition  $\tau$  est strictement positif).

La **réponse impulsionnelle** du système est obtenue en lui injectant une impulsion de Dirac :

$$y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.u(t) \quad (4.13)$$

où :

$u(t)$  est un échelon unité causal non retardé.

Appliquons-lui un échelon unité causal non retardé, la réponse indicielle du système est donnée comme suit :

$$y(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).u(t) \quad (3.14)$$

Le système discret  $G(z)$  correspondant peut être obtenu en mettant en cascade le système continu  $G(p)$  avec un **BOZ** associé avec une période d'échantillonnage ' $T$ ', dont la fonction de transfert est donnée comme suit :

$$G(z) = K \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{z - e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad (4.15)$$

Cette fonction de transfert possède un seul pôle :  $p_d = e^{-\frac{T}{\tau}} = e^{Tp_c}$  ( $p_d$  : est le pôle du système discret).

La **réponse impulsionnelle** du système discret  $G(z)$  est donnée par l'expression suivante :

$$y(k) = K \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right).e^{-\frac{(k-1)T}{\tau}} u(k-1) \quad (4.16)$$

D'autre part, sa réponse indicielle est décrite par la relation suivante :

$$y(k) = K \left(1 - e^{-\frac{kT}{\tau}}\right).u(k) \quad (4.17)$$

Où :

$u(k)$  est la version discrète d'un échelon unité causal non retardé.

$u(k-1)$  est un échelon unité causal retardé par une période d'échantillonnage.

Le temps de réponse à 95% (noté  $t_r$ ) associé à la réponse indicielle est donné par:

$$t_r = -\tau \ln(0,05) \approx 3\tau \quad (4.18)$$

## 2.4.2 Systèmes du second ordre

Un système LTI continu **du second ordre** est caractérisé par la fonction de transfert normalisée suivante:

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{\omega_0^2}{(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)} \quad (4.19)$$

Avec :

$K$  est son gain statique,

$\omega_0$  sa pulsation propre et,

$\xi$  est son coefficient d'amortissement.

La fonction de transfert discrète correspondante est obtenue en utilisant un **BOZ** par :

$$G(z) = K \frac{(b_1 z + b_2)}{(z^2 + a_1 z + a_2)} \quad (4.20)$$

Différents cas de figure sont alors possibles, selon la nature des racines du polynôme caractéristique de la fonction de transfert,  $D(p)$ , qui sont réelles si  $\xi \geq 1$  (confondues si  $\xi = 1$ ), et complexe conjuguées si  $0 < \xi < 1$ .

Ici, nous étudions le cas le plus pratique :  $0 < \xi < 1$ .

❖ **Système à deux pôles complexes conjugués** ( $0 < \xi < 1$ ) :

Dans ce cas, la fonction de transfert du système continu est donnée comme suit :

$$G(p) = \frac{K}{(p - p_1)(p - p_1^*)} \quad (4.21)$$

Avec :

$$p_1 = -r + jc \text{ et } p_1^* = -r - jc$$

où :

$$r = \xi \omega_0 \text{ et } c = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.22)$$

On a donc comme fonction de transfert discrète correspondante :

$$G(z) = K \frac{(b_1 z + b_2)}{(p - z_1)(p - z_1^*)} \quad (4.23)$$

Les pôles de cette fonction sont définis par :

$$\begin{cases} z_1 = e^{T p_1} \\ z_1^* = e^{T p_1^*} \end{cases}$$

Les coefficients  $b_1$  et  $b_2$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 - e^{-rT} \left( \cos(cT) + \frac{r}{c} \sin(cT) \right) \\ b_2 &= e^{-2rT} + e^{-rT} \left( \frac{r}{c} \sin(cT) - \cos(cT) \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

La réponse indicielle est exprimée par :

▪ **Dans le cas continu :**

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-rt}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos(ct - \beta). u(t) \quad (4.25)$$

▪ **Dans le cas discret :**

$$y(kT) = 1 - \frac{e^{-rkT}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos(ckT - \beta). u(kT) \quad (4.26)$$

Avec :

$$\tan(\beta) = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.27)$$

D'autre part, on définit les performances temporelles :

- Le premier dépassement indicial  $D$  est donné par:

$$D = \exp\left(-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) \quad (4.28)$$

- Le temps du premier maximum  $t_d$  est donné par:

$$t_d = \exp\left(\frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}\right) = \exp\left(\frac{\pi}{c}\right) \quad (4.29)$$

### Exemple 4.5

Soit un système LTI continu du deuxième ordre suivant :  $G(p) = \frac{1}{(p^2+p+1)}$

Le code qui suit permet de comparer les réponses indicielles de système continu  $G(p)$  et de sa version discrète obtenue par un bloqueur d'ordre zéro.

Nous allons déterminer graphiquement les performances temporelles de la réponse indicielle du système discret, à savoir :

- le premier dépassement ;
- le temps de montée ;
- le temps de réponse ;
- la valeur finale.

```
NumG= 1;
DenG = [1 1 1];
G=tf(NumG,DenG)
T= 1;
Gd = c2d(G,T,'zoh')
figure;
step(G,'b')
hold on
step(Gd,'r')
title('Réponse indicielle');
legend('Réponse du système continu','Réponse du système discret');
xlabel ('Temps');
ylabel ('Amplitude');
hold off
grid ;
```

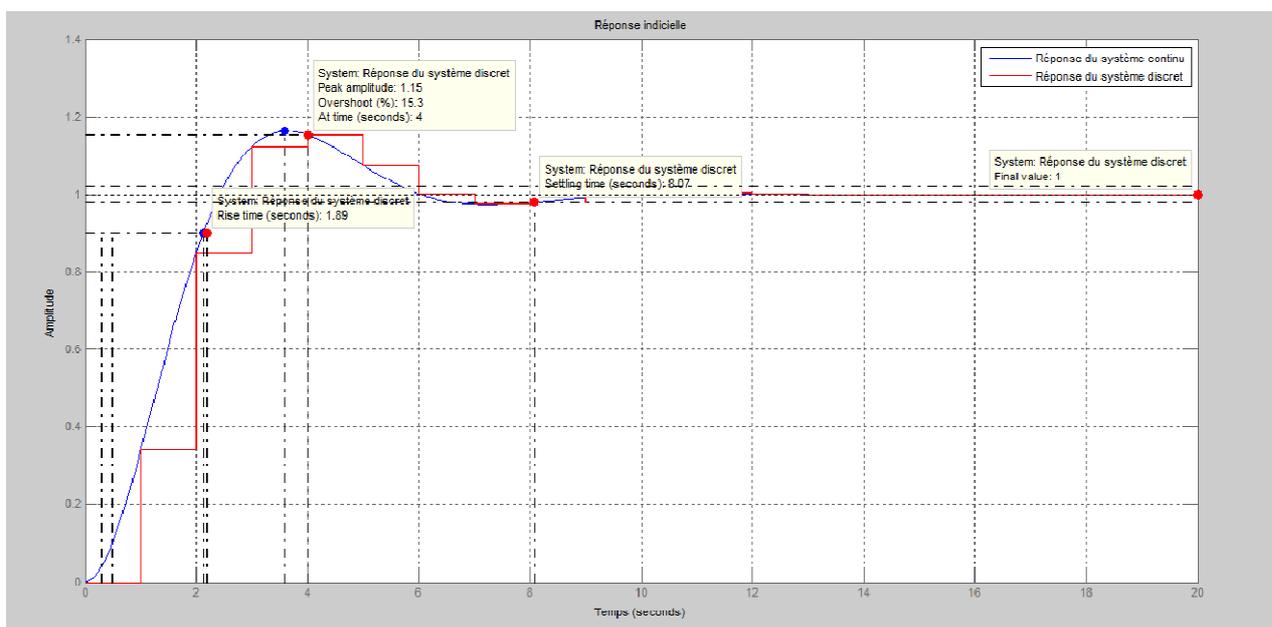


Figure (4.8): Figure montrant les valeurs numériques des différentes performances temporelles

### 3- Réponse fréquentielle des systèmes linéaires échantillonnés

#### 3.1 Définition

Soit un système LTI discret défini par une fonction de transfert  $G(z)$ , sa réponse fréquentielle s'obtient en faisant  $z = e^{j\omega T}$ , donc on aura  $G(e^{j\omega T})$ . Cette réponse est caractérisée par deux paramètres, qui sont :

- le gain :  $G = |G(e^{j\omega T})|$  ;
- la phase :  $\varphi = \text{Arg}(G(e^{j\omega T}))$ .

Comme dans le domaine continu, l'étude d'une **réponse fréquentielle** d'un système discret peut être effectuée soit par :

- le diagramme de Bode ;
- le lieu de Nyquist ;
- le lieu de Black-Nichols.

#### 3.2 Marges de stabilité

La **marge de gain** et la **marge de phase** sont des indicateurs de performance dans le domaine fréquentiel du fait que le système asservi est plus ou moins éloigné de l'instabilité. Elles quantifient la **robustesse** de la stabilité vis-à-vis de modifications du processus.

(1) **Marge de gain** ( $G(\text{dB})$ ) : c'est la différence entre 0 dB et la valeur du gain pour lequel la phase est égale à  $-180^\circ$ .

(2) **Marge de phase** ( $\varphi(\text{degré})$ ) : c'est la différence entre la valeur de la phase pour laquelle le gain est égal à 0 dB et  $-180^\circ$ .

Les valeurs usuelles de marge de gain et de phase sont :

- Marge de gain : 10 à 12 dB.
- Marge de phase :  $45^\circ$  à  $50^\circ$ .

Le **diagramme de Bode** et lieu de **Nyquist** sont des outils très utiles pour apprécier les **marges de stabilité** des systèmes stables en **boucle ouverte**. Les figures (4.9) et (4.10) montrent respectivement les marges de gain et de phase associés au diagramme de Bode et au lieu de Nyquist, d'un système discret, obtenues en boucle ouverte:

Figure (4.9) : Figure montrant les marges de gain et de phase sur un diagramme de Bode d'un système discret en boucle ouverte

Figure (4.10) : Figure montrant les marges de gain et de phase sur un lieu de Nyquist d'un système discret en boucle ouverte

#### 4- Précision des systèmes asservis linéaires échantillonnés

La précision d'un système asservi est définie à partir de l'erreur  $E$  entre la grandeur de consigne  $R$  et la grandeur de sortie  $Y$  (Figure (4.11)). Nous distinguons :

- **la précision statique** : qui caractérise la limite de l'erreur au bout d'un temps infini pour une entrée donnée, c'est-à-dire le régime permanent ;
- **la précision dynamique** qui tient compte des caractéristiques d'évolution du processus en régime transitoire.

❖ **Remarque :**

Nous limiterons notre étude à la **précision statique**. En plus, nous supposons que les systèmes asservis étudiés sont stables.

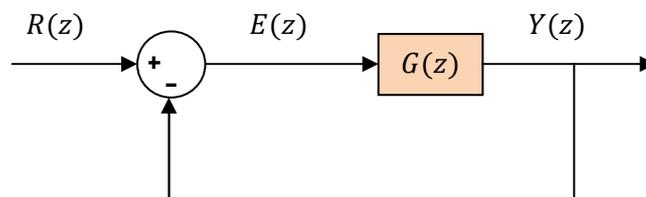


Figure (4.11) : Schéma d'un asservissement échantillonné à retour unitaire

- **Propositions**

$$(Précision) \Rightarrow (Stabilité) \Leftrightarrow (|p_i| < 1)$$

$$(instabilité) \Leftrightarrow \exists ! p_j / |p_j| > 1 \Rightarrow (Imprécision)$$

#### 4.1 Précision statique (erreur statique en régime permanent)

Il s'agit de calculer l'erreur  $e(k)$  à l'infini ( $k \rightarrow +\infty$ ). Cette erreur peut être déterminée en appliquant le théorème de la valeur finale décrite par la relation :

$$e(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \quad (4.30)$$

On pose :

$$\frac{1}{1 + G(z)} = \frac{(z - 1)^\alpha}{(z - 1)^\alpha + K} \quad (4.31)$$

avec  $\alpha$  et  $K$  représentent respectivement **la classe** (aussi appelé le type) et le **gain statique** du système discret.

Remplaçons l'équation (4.31) dans l'équation (4.30), il vient :

$$e(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \right) \left[ \frac{(z-1)^\alpha}{(z-1)^\alpha + K} \right] R(z) \quad (4.32)$$

## 4.2 Erreur (Ecart) Statique dû à la Consigne

La précision du système asservi discret est généralement (habituellement) étudiée vis-à-vis les trois types des signaux ; Echelon, Rampe et Parabole. En utilisant ces trois signaux typiques, les erreurs (écarts) statiques générées sont respectivement :

- L'erreur statique de **position** ( $e_p(\infty)$ ).
- Erreur statique de **vitesse**  $e_v(\infty)$ .
- Erreur statique **d'accélération**  $e_a(\infty)$ .

### 4.2.1 Erreur Statique de Position

Elle correspond à une entrée Echelon de position  $E(z) = \frac{z}{z-1}$

Donc :

$$e_p(\infty) = \lim_{k \rightarrow +\infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \right) \frac{(z+1)^\alpha}{(z+1)^\alpha + K} \left( \frac{z}{z-1} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z+1)^\alpha}{(z+1)^\alpha + K}$$

- $\alpha = 0 \Rightarrow e_p(\infty) = \frac{1}{1+K}$
- $\alpha \geq 1 \Rightarrow e_p(\infty) = 0$

### 4.2.2 Erreur Statique de Vitesse

Elle correspond à une entrée Echelon de vitesse (une rampe) :  $E(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$

Donc :

$$\begin{aligned} e_v(\infty) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \right) \frac{(z-1)^\alpha}{(z-1)^\alpha + K} \left( \frac{Tz}{(z-1)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^\alpha}{(z-1)^\alpha + K} \left( \frac{T}{(z-1)^1} \right) \end{aligned}$$

- $\alpha = 0 \Rightarrow e_v(\infty) = \infty$
- $\alpha = 1 \Rightarrow e_v(\infty) = \frac{1}{K}$
- $\alpha \geq 2 \Rightarrow e_v(\infty) = 0$

### 4.2.3 Erreur Statique d'Accélération

Elle correspond à une entrée Echelon de vitesse (une rampe) :  $E(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$

Donc :

$$e_v(\infty) = \lim_{k \rightarrow +\infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \right) \frac{(z-1)^\alpha}{(z-1)^\alpha + K} \left( \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^\alpha}{(z-1)^\alpha + K} \left( \frac{T^2(z+1)}{(z-1)^2} \right)$$

- $\alpha = 0 \Rightarrow e_a(\infty) = \infty$
- $\alpha = 1 \Rightarrow e_a(\infty) = \infty$
- $\alpha = 2 \Rightarrow e_a(\infty) = \frac{2T^2}{K}$
- $\alpha \geq 3 \Rightarrow e_a(\infty) = 0$

La précision statique d'un système asservi numérique en fonction de **la classe** du système et le type d'entrée est récapitulée dans le tableau suivant.

		Classe			
		$c = 0$	$c = 1$	$c = 2$	$c > 0$
Erreur Statique	$e_p$	$\frac{1}{1+K}$	0	0	0
	$e_v$	$\infty$	$\frac{T}{K}$	0	0
	$e_a$	$\infty$	$\infty$	$\frac{T^2}{K}$	0

**Tableau 4.2** erreur statique pour un système échantillonné en fonction de la classe

On peut voir l'analogie entre le système échantillonné et le système continu. Comme en continu, l'erreur statique est inversement proportionnelle au gain en boucle ouverte  $K$ , à une classe fixée. Plus le gain en boucle ouverte augmente, plus la précision statique est bonne, alors que la stabilité est dégradée. La précision statique et la stabilité sont deux performances duales, *a priori* contradictoires.

### 4.3 Constantes de la Précision d'un Système Asservi Numérique

De façon générale, on définit la constante de précision d'un système asservi numérique par :

$$K_{pva} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ 1 + K \frac{A(z)}{(z-1)^\alpha} \right] (z-1)^\alpha = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(z-1)^\alpha + KA(z)}{(z-1)^\alpha} \right] (z-1)^\alpha, \quad \lim_{z \rightarrow 1} A(z) = 1$$

Il résulte :

- La constante de l'Erreur de position est :

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(z-1)^\alpha + KA(z)}{(z-1)^\alpha} \right] (z-1)^\alpha \Big|_{\alpha=0} = 1 + K$$

- La constante de l'Erreur de vitesse est :

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(z-1)^\alpha + KA(z)}{(z-1)^\alpha} \right] (z-1)^\alpha \Big|_{\alpha=1} = K$$

- La constante de l'Erreur d'accélération est :

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(z-1)^\alpha + KA(z)}{(z-1)^\alpha} \right] (z-1)^\alpha \Big|_{\alpha=2} = K$$