Chapitre 3 Représentation des Systèmes asservis linéaires échantillonnés

1- Définitions

1.1 Automatique : est l'ensemble des techniques qui permettent d'assurer le contrôle d'un système dynamique (procédé physique) sans intervention de l'être humain. En fait, l'automatique est une science qui traite de l'identification, de la modélisation et de la commande des systèmes dynamiques.

1.2 Modélisation : Le principe de la modélisation est de développer un modèle qui imite le plus fidèlement possible la dynamique d'un système réel.

1.3 Identification : D'un point de vue pratique, l'identification est utilisée pour obtenir, à l'aide d'un modèle mathématique, une représentation approximative d'un système inconnu. En fait, l'identification fait partie de la modélisation ; c'est-à-dire, c'est la phase finale de l'identification dont tous les paramètres du modèle proposé au système dynamique sont déterminés (identifiés).

1.4 Commande : la commande d'un système dynamique consiste d'agir sur les entrées du système afin de :

- maintenir la sortie du système constante : '***c'est la régulation***' ;
- faire suivre à certaines sorties du système une consigne variable: '***c'est l'asservissement***'.

1.5 Commande en boucle ouverte (BO) : Dans une commande en boucle ouverte (**BO**), le signal de commande est indépendant du signal de sortie. Cette commande ne comporte pas de contre-réaction entre la sortie et l'entrée.

1.6 Commande en boucle fermée (BF) : Dans une commande en boucle fermée (**BF**), le signal de commande dépend d'une façon ou d'une autre du signal de sortie.

1.7 Systèmes linéaires : Un système est dit *linéaire* s'il répond au principe de superposition et de proportionnalité.

1.8 Systèmes Monovariables : Un système est dit *monovariable* s'il possède un seul signal d'entrée et un seul signal de sortie.

1.9 Systèmes continus : Un système est dit continu lorsque les grandeurs qui le caractérisent délivrent une information à chaque instant continu 't' (on parle de domaine du temps continu).

1.10 Systèmes discrets : Un système est dit *discret* lorsque les grandeurs qui le caractérisent délivrent une information à chaque pas de discrétisation 'kT' (on parle de domaine du temps discret : $t = kT$).

1.11 Systèmes discrets au repos : Un système discret est au repos au temps 0 si sa sortie '$y(kT) : k \geq 0$'est déterminée uniquement par son entrée '$x(kT) : k \geq 0$'.

1.12 Systèmes discrets causals: Un système discret est causal si sa sortie 'y'à l'instant 'kT ' ne dépend pas des valeurs prises par son entrée 'x' avant 'kT', c'est-à-dire ne dépend pas de '$(kT) : k < 0$'.

1.13 Systèmes discrets invariants dans le temps : Un système discret est invariant dans le temps ou ***stationnaire*** si un décalage temporel de l'impulsion unité appliquée à son entrée provoque le même décalage temporel de la sortie.

1.14 Systèmes échantillonnés : Un système est dit ***échantillonné*** s'il reçoit une information échantillonnée et délivre une information échantillonnée.

1.15 Systèmes numériques : Un système est dit ***numérique*** s'il reçoit une information numérique (binaire) et délivre une information numérique (binaire).

1.16 Systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI 'Linear Time Invariant') : Un système est dit linéaire invariant dans le temps s'il est décrit par des équations différentielles (ou des équations récurrentes) linéaires à coefficients constants réels.

2- Boucles de commandes numériques

2.1 Structure générale d'un asservissement numérique d'un processus analogique

Les **C**onvertisseurs **A**nalogique-**N**umérique (**CAN**) et **N**umérique-**A**nalogique (**CNA**) sont indispensables au fonctionnement des systèmes asservis par *Calculateur Numérique* (**CN**). La liaison du calculateur avec son environnement externe est effectuée par ces convertisseurs. La figure suivante montre un système asservis par un *calculateur numérique* (**CN**). Il s'agit d'un asservissement numérique d'un processus analogique.

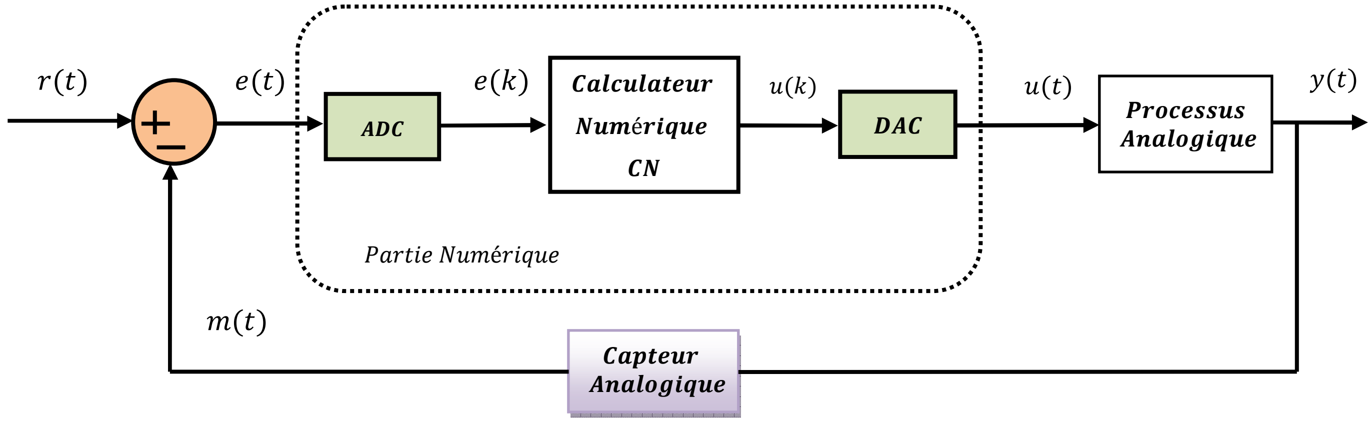


Figure (3.1) : Asservissement numérique d'un processus analogique

Dans cette structure, on distingue :

- Un ***calculateur numérique*** (**CN**) : tout moyen de calcul automatique permettant d'effectuer des opérations arithmétiques ou analytiques suivant un programme déterminé qui est exécuté pas à pas, comme : un *microprocesseur* '*μp*', un *DSP* ou bien un *contrôleur numérique*, comme : PID, RST etc. ;
- Un ***capteur analogique*** permettant la mesure de la grandeur de sortie à commander. En effet, un ***capteur*** permet de convertir une grandeur physique en grandeur électrique ;
- un ***Actionneur*** qui réalise et exécute la commande issue du régulateur numérique du système asservi. Il permet de fournir l'énergie (puissance) nécessaire au processus pour produire l'effet désiré. Exemples : un amplificateur de puissance, une moteur, une vanne de régulation etc. ;
- un ***Convertisseur Analogique-Numérique*** (*CAN*) : un **CAN** permet la conversion d'une grandeur analogique en grandeur numérique;
- un ***Convertisseur Numérique-Analogique*** (**CNA**) : un **CNA** permet de transformer une grandeur numérique, généralement issue régulateur numérique, en une grandeur analogique;
- un ***Processus Analogique*** : installation que l'on veut piloter. Exemples : robot, avion, four etc. ;
- un **comparateur** : il permet de construire le signal d'erreur (t) ;
- une ***consigne continue*** $r(t)$: signal à poursuivre par la sortie du processus ;
- une ***grandeur régulée*** continue (sortie continue) **(t)**: grandeur physique régulée ;
- une **mesure continue** (t) : image de la vraie grandeur régulée fournie par le capteur ;
- une **erreur continue** (t) : différence entre la consigne $r(t)$ et la mesure (t) ;
- une **commande continue** (t) : signal délivré par le **CNA** ;
- une **erreur numérique** (k) : est la version numérique de l'erreur (t) ;

- une **commande numérique** (k) : signal délivré par le **CN**.

Les convertisseurs **CAN** et **CNA** peuvent être modélisés comme suit :

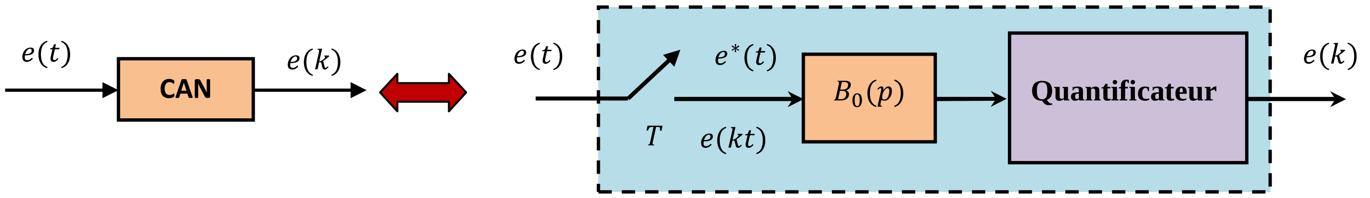


*Figure (3.2) : Modélisation d'un **C**onvertisseur **A**nalogique-**N**umérique (**CAN**)*

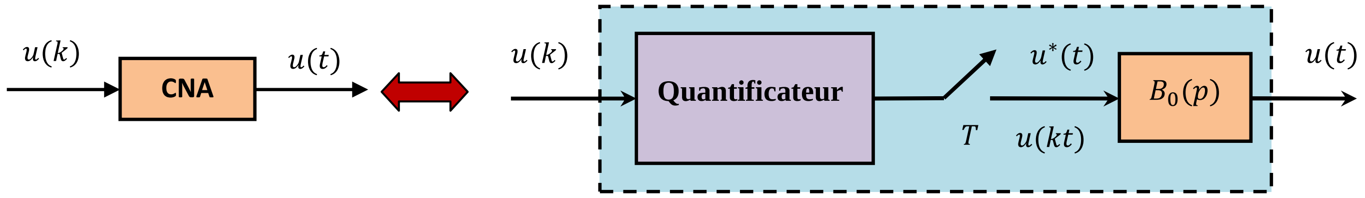


*Figure (3.3) : Modélisation d'un **C**onvertisseur **N**umérique-**A**nalogique (**CNA**)*

2.2 Structure générale d'un asservissement échantillonné d'un processus analogique

Si on néglige l'effet de la quantification :

- le **CAN** devient un simple échantillonneur (interrupteur idéal), comme le montre la figure (3.4) ;

- le **CNA** devient un simple échantillonneur-bloqueur d'ordre zéro (**BOZ**), comme le montre la figure (3.5).

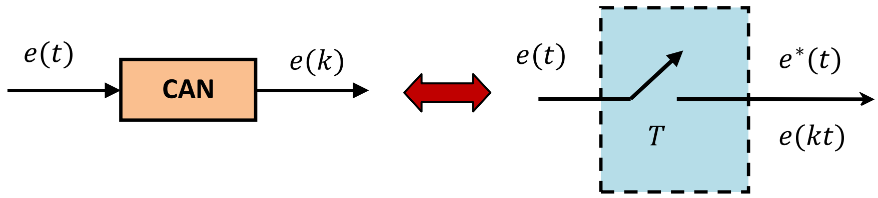


*Figure (3.4) : Modélisation d'un **CAN** usuel*

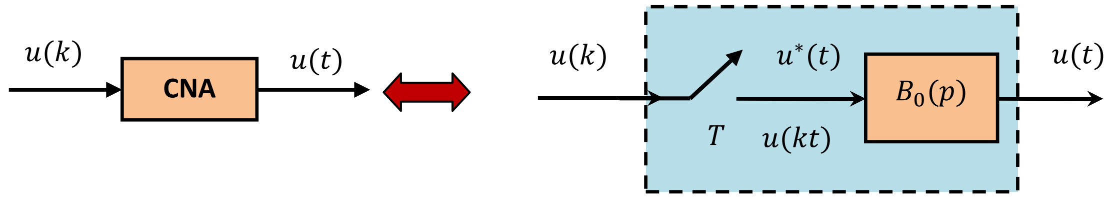


*Figure (3.5) : Modélisation d'un **CNA** usuel*

Par conséquent, la structure de la figure (1.1) devient sous la forme suivante :

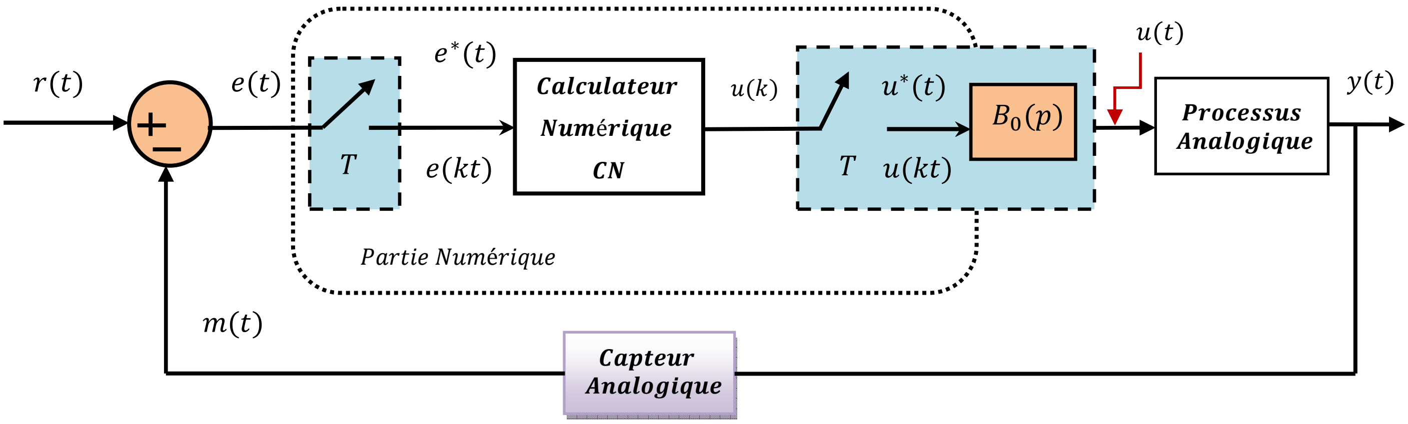


Figure (3.6) : Asservissement échantillonné d'un processus analogique

Dans cette structure, $e^*(t)$ et $u^*(t)$ sont respectivement l'erreur échantillonnée et la commande échantillonnée.

2.3 Structure générale d'un asservissement numérique d'un processus numérique

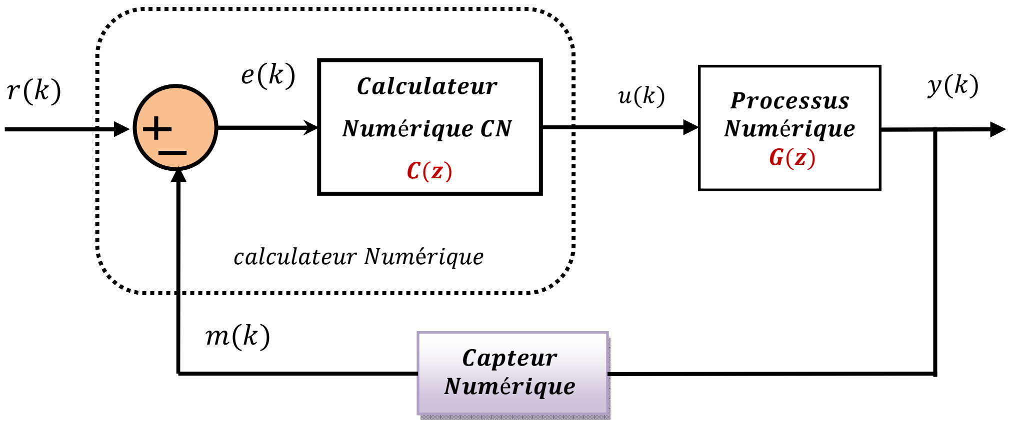


Figure (3.7) : Asservissement numérique d'un processus numérique

Dans cette structure :

- le calculateur numérique assure à la fois le contrôle et la comparaison numérique.

- les signaux $r(k)$, $e(k)$, $u(k)$, $y(k)$ et $m(k)$ sont des signaux numériques. (z) et (z) sont respectivement les fonctions de transfert discrètes d'un régulateur numérique et d'un processus numérique.

3- Représentation des systèmes linéaires échantillonnés invariants dans le temps

(Sampled data LTI 'Linear Time Invariant' Systems)

Les systèmes **LTI** (**L**inear **T**ime **I**nvariant) discrets Monovariables peuvent être représentés par le schéma de la **figure (3.8)**, qui est appelé un diagramme.

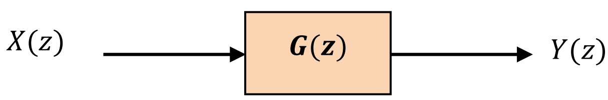


Figure (3.8) : Schéma fonctionnel (diagramme) d'un système LTI monovariable discret

Trois façons peuvent être utilisées pour représenter les systèmes linéaires échantillonnés invariants dans le temps :

- Représentation par **fonctions de transfert discrètes ;**

- Représentation par **<u>équations aux différences</u>** (équations récurrentes) ;
- représentation par **<u>schéma-blocs</u>**.

3.1 Représentation par Fonction de transfert discrète

On appelle fonction de transfert $G(z)$ du système (Figure (3.8)) le rapport entre la transformée en 'z' de la sortie, ( ), et celle de l'entrée (z). On exprime ça par :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{3.1}$$

En fait, la fonction de transfert ( ) d'un système LTI discret est la transformée en 'z' de sa réponse impulsionnelle '$g(kT)$'.

D'un point de vue analytique, une fonction de transfert discrète d'un système linéaire invariant dans le temps 'LTI' discret peut être décrite au moyen des trois formes suivantes :

- **forme polynomiale en 'z';**
- **forme polynomiale en'z^{-1}';**
- forme zéro-pôle et gain.

(1) Fonction de transfert discrète sous forme polynomiale en 'z'

Généralement, un système LTI discret peut être représenté par la fonction de transfert polynomiale en 'z'suivante :

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{(b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m z^0)}{(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n z^0)} \tag{3.2}$$

avec (z) et (z) représentent respectivement les polynômes numérateur ; et dénominateur de la fonction (z).

Le polynôme *<u>dénominateur</u>* est appelé **polynôme caractéristique** du système.

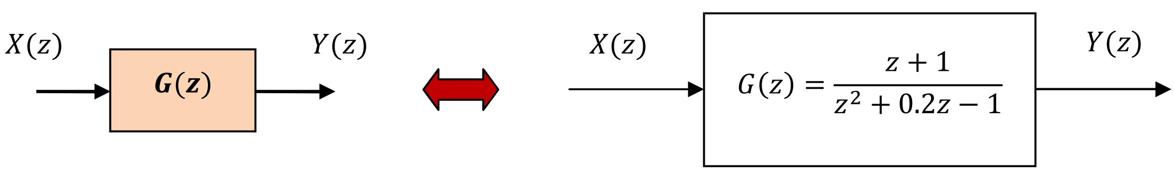
On définit aussi:

- **Les racines** du numérateur **(z)** de la fonction de transfert ( ) représentent les **zéros** du système discret.
- **Les racines** du dénominateur **(z)** de la fonction de transfert ( ) représentent les **pôles** du système discret.
- Le degré du dénominateur (z) est égal à l'ordre du système : 'n'.

En fait, les pôles et les zéros d'un système discret jouent un rôle important dans son comportement, et dans la conception d'une commande numérique.

Exemple 3.1

Soit un système LTI discret défini par sa fonction de transfert polynomiale en 'z':



En utilisant l'instruction '***tf***' de **MATLAB**, nous pouvons représenter la fonction de transfert (z) par le code suivant:

```
NumG=[1 1];
DenG=[1 0.2 -1];
T= 1;
G = tf(NumG, DenG,T,'variable','z')
```

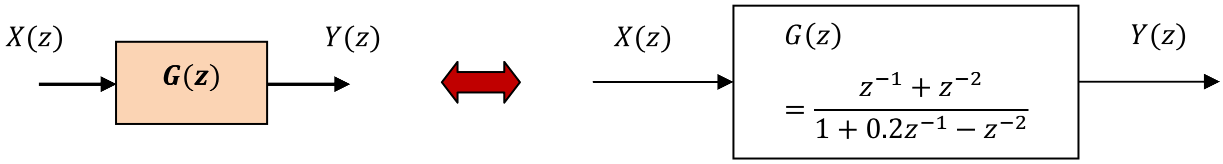
(2) Fonction de transfert discrète sous forme polynomiale en 'z^{-1}'

Un système LTI discret peut être aussi représenté par une fonction de transfert polynomiale en 'z^{-1}'. En multipliant dénominateur et numérateur de la fonction de transfert, décrite par l'équation (3.2), par le terme 'z^{-n}', et en posant '$d = n - m$', on fait apparaître des puissances négative de 'z'comme suit:

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = z^{-d}\frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m})}{(a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n})} \qquad (3.3)$$

Exemple 3.2

Prenons le système discret (z) de l'exemple **3.1**. En multipliant le dénominateur et le numérateur de la fonction (z) par le terme 'z−2', et en posant 'd = 2 − 1 = 1', il vient :



Dans cet exemple, nous voulons représenter sous **MATLAB** le système (z) discret précédent en fonction de 'z−1' par le code suivant :

```
NumG=[0 1 1];
DenG=[1 0.2 -1];
T= 1;
G = tf(NumG, DenG,T,'variable','z^-1')
```

(3) Fonction de transfert discrète sous forme zéro, pôle et gain

Une fonction de transfert d'un système LTI discret peut être représentée sous forme zéro, pôle et gain. Les formes <u>**factorisées**</u> suivantes, respectivement équivalentes aux équations (3.2) et (3.3), sont parfois utiles:

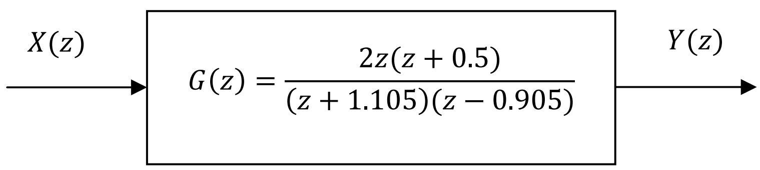
$$G(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n)} = \frac{b_0 \prod_{j=1}^{m}(z - z_j)}{a_0 \prod_{i=1}^{n}(z - p_i)} \qquad (3.4)$$

$$G(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{-d}\frac{(1 - z_1 z^{-1})\ldots(1 - z_m z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})\ldots(1 - p_n z^{-1})} = \frac{b_0}{a_0} z^{-d}\frac{\prod_{j=1}^{m}(1 - z_j z^{-1})}{\prod_{i=1}^{n}(1 - p_i z^{-1})} \qquad (3.5)$$

où p_i , z_j et $\frac{b_0}{a_0}$ sont respectivement les pôles, les zéros et le gain (facteur d'Evans) du système LTI discret.

Exemple 2.3

Soit par exemple la fonction de transfert discrète suivante :



Dans ce cas, la fonction (z) sera introduite en utilisant le code **MATLAB** suivant :

```
ZerosG= [0 -0.5]' ; PolesG= [-1.105 0.905]'; K= 2; T= 1;
G = zpk(ZerosG ,PolesG ,K ,T)
```

3.2 Equations aux différences (équations récurrentes)

L'équation récurrente joue un rôle équivalent, dans l'étude des systèmes à temps discret, à celui que joue l'équation différentielle dans l'étude des systèmes à temps continu.

De façon formelle, l'équation récurrente d'un système discret, décrit par l'équation (3.3), s'écrit :

$$y(k) = \sum_{j=0}^{m} b_j x(k-d-j) - \sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) \tag{3.6}$$

Donc une équation récurrente permet d'exprimer la sortie $y(k)$ à l'instant 'k' en fonction des échantillons passés de la sortie et de l'entrée.

Exemple 3.4

Soit la fonction de transfert discrète : $F(z) = \frac{0.2}{(z-0.8)}$.

On veut déterminer l'équation récurrente correspondante :

D'abord, on exprime la fonction de transfert (z) sous forme polynomiale en '$z{-}1$' :

$$F(z) = \frac{0.2}{(z-0.8)} = \frac{0.2}{(z-0.8)}\frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{0.2z^{-1}}{(1-0.8z^{-1})}$$

Donc :

$$F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.2z^{-1}}{(1-0.8z^{-1})}$$

Il résulte :

$$(1-0.8z^{-1})Y(z) = 0.2z^{-1}X(z) \Rightarrow Y(z) - 0.8z^{-1}Y(z) = 0.2z^{-1}X(z)$$

Pour avoir (k), il suffit d'appliquer la transformée inverse en 'z' sur les deux cotés de l'équation:

$$\mathcal{Z}^{-1}[Y(z) - 0.8z^{-1}Y(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[0.2z^{-1}X(z)]$$

En utilisant les propriétés de la transformée en z inverse, par conséquent, l'équation récurrente correspondante est obtenue:

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] - 0.8\mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}Y(z)] = 0.2\mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}X(z)]$$

$$\Rightarrow y(k) - 0.8\,y(k-1) = 0.2x(k-1) \Rightarrow y(k) = 0.8\,y(k-1) + 0.2x(k-1)$$

Maintenant, prenons l'entrée (k) comme un échelon unité et $y(0)$=0 comme condition initiale. Puis, calculons les premiers échantillons de sortie (k) (tableau suivant) :

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$x(k)$	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
$y(k)$	*0*	*0.2*	*0.36*	*0.488*	*0.590*	*0.672*

Tableau (3.1) : Calcul de la suite d'échantillons

3.3 Représentation des systèmes LTI discrets par schéma-blocs

Afin de représenter un système LTI discret par un schéma-blocs, trois opérateurs élémentaires peuvent être utilisés, à savoir : multiplication par un scalaire, sommation algébrique et décalage temporel (retard).

(1) Multiplication par un scalaire

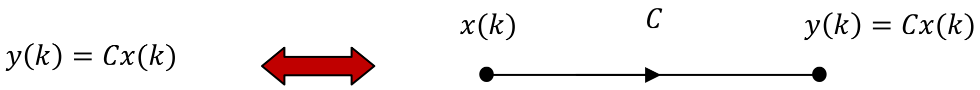


Figure (3.9) : Symbole représentant l'opération de la multiplication par un scalaire C

(2) Sommation algébrique

$$y(k) = 3x_1(k) - 2x_2(k) + x_3(k)$$

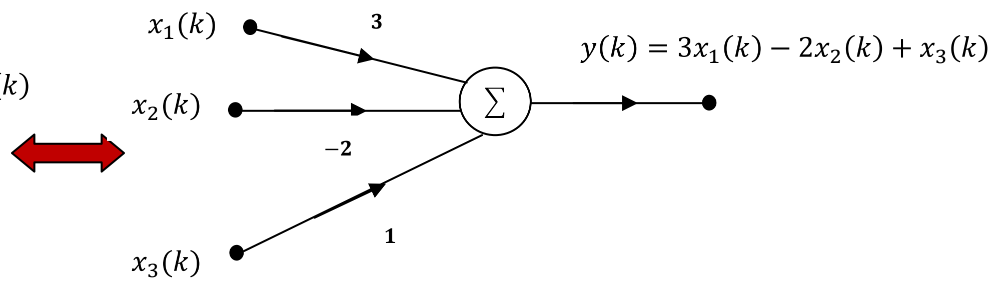


Figure (3.10) *: Symbole représentant l'opération de la sommation algébrique*

(3) Décalage temporel (retard)

$$y(k) = x(k - m)$$

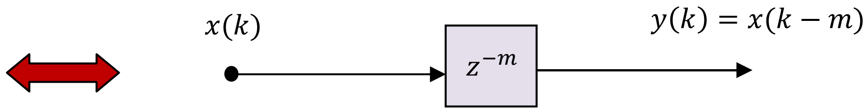


Figure (3.11) : Symbole représentant le décalage temporel (retard)

Exemple 2.5

Soit un système LTI discret défini par le schéma-blocs suivant :

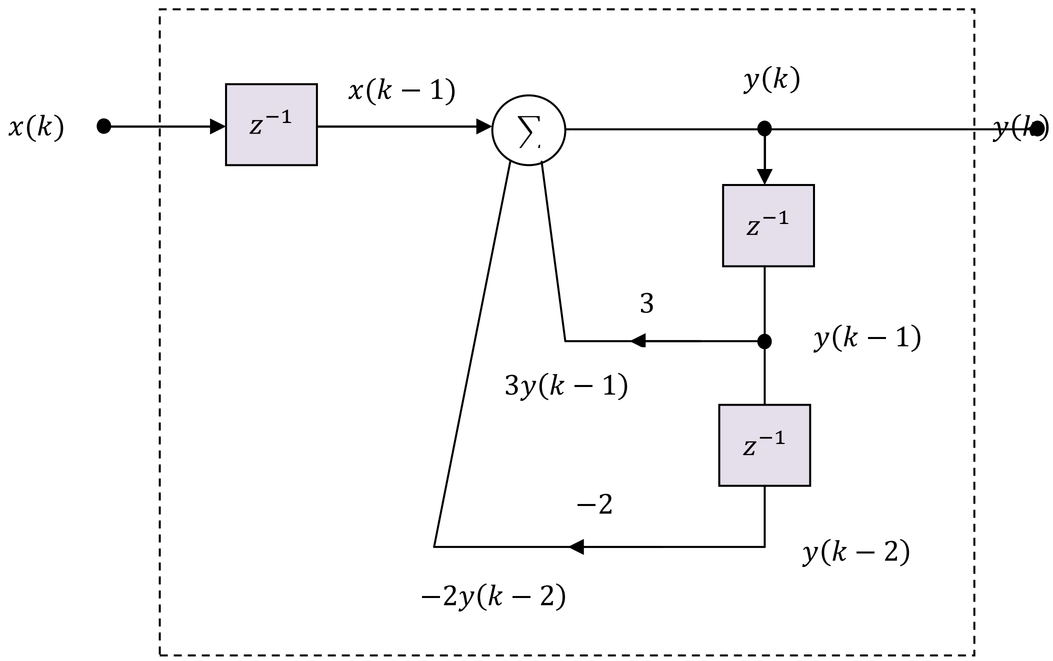


Figure (3.12) : Schéma-blocs d'un système LTI discret

A partir du schéma-blocs de la figure (3.12), on peut tirer facilement l'équation récurrente correspondante :

$$y(k) = x(k-1) + 3y(k-1) - 2y(k-2)$$

Puis, on peut aussi déterminer la fonction de transfert discrète correspondante :

Pour ce faire, il suffit d'appliquer la transformée en 'z' sur les deux cotés de l'équation récurrente, on obtient:

$$\mathcal{Z}[y(k)] = \mathcal{Z}[x(k-1) + 3y(k-1) - 2y(k-2)]$$

En utilisant les propriétés de la transformée en 'z', on aura:

$$Y(z) = z^{-1}X(z) + 3z^{-1}Y(z) - 2z^{-2}Y(z) \Rightarrow (1 - 3z^{-1} + 2z^{-2})Y(z) = z^{-1}X(z)$$

En utilisant la définition de la fonction de transfert, on peut avoir :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Sous forme polynomiale en z, on obtient :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

4- Discrétisation des systèmes LTI Monovariables continus

Soit un système LTI monovariable continu défini par une fonction de transfert continue (p), telle que :

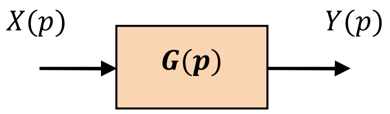


Figure (3.13) *: Schéma fonctionnel d'un système LTI monovariable continu*

Plusieurs méthodes de **discrétisation** peuvent être utilisées afin de ***numériser*** ce système LTI monovariable continu représenté par la fonction de transfert (p), parmi ces méthodes, on peut citer:

- La discrétisation par ***un bloqueur d'ordre zéro*** (**BOZ**) ;
- La discrétisation par ***un bloqueur d'ordre un*** (**BOU**) ;
- La discrétisation par ***approximation de 'Tustin'***, et,
- La discrétisation par ***approximations d'Euler*** (**arrière** et **avant**).

4.1 Discrétisation par un bloqueur d'ordre zéro (BOZ)

La fonction de transfert discrète du système $G(z)$ peut être obtenue par la ***discrétisation*** de la fonction de transfert continue (p) en utilisant un ***bloqueur d'ordre zéro*** (**BOZ**), comme le montre les figures suivantes :

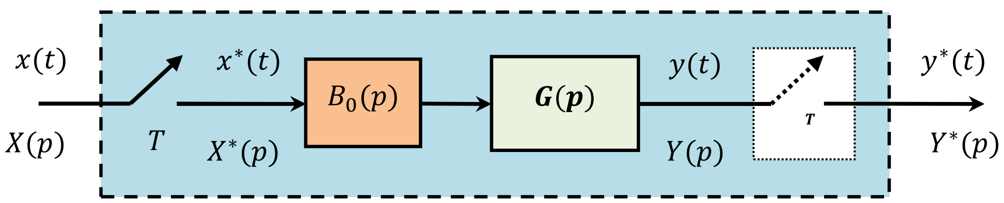


Figure (3.14) *: Schéma fonctionnel illustrant la discrétisation du système (p) continu par un* ***BOZ***

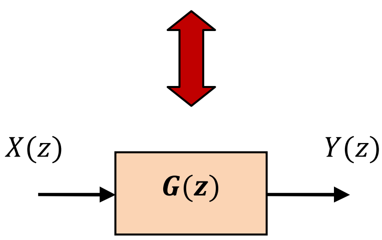


Figure (3.15) : Schéma fonctionnel d'un système LTI discret équivalent

La fonction de transfert discrète obtenue par le **BOZ** est donnée par :

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right] \qquad (3.7)$$

4.2 Discrétisation par un bloqueur d‘ordre un (BOU)

La version discrète de la fonction de transfert continue (p) peut être obtenue aussi en la discrétisant par un bloqueur d‘ordre un (**BOU**) comme le montre les figures suivantes :

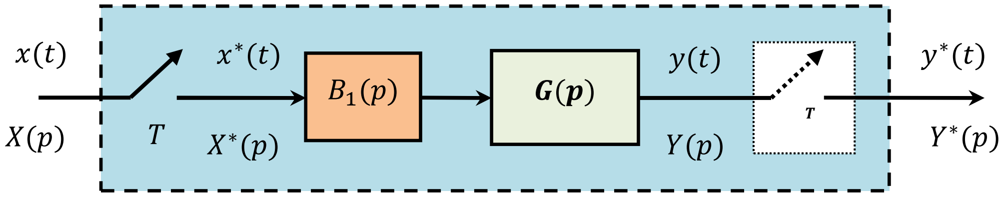


Figure (3.16)** : Schéma fonctionnel illustrant la discrétisation du système (p) continu par un **BOU

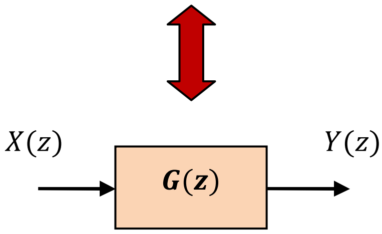


Figure (3.17) : Schéma fonctionnel d’un système LTI discret équivalent

La fonction de transfert discrète obtenue par le **BOU** est donnée par :

$$G(z) = (1 - z^{-1})^2 \mathcal{Z}\left[\frac{1 + Tp}{Tp^2} G(p)\right] \tag{3.8}$$

4.3 Discrétisation par approximation de Tustin

Il est également possible d’obtenir la version discrète du système (p) en utilisant l’approximation de ‘**Tustin**’ (approximation bilinéaire) comme le montre la figure suivante:

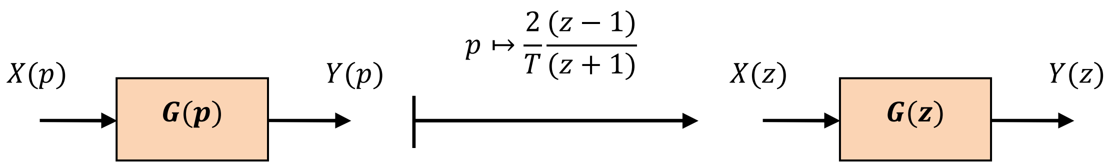


*Figure (3.18) : Schéma fonctionnel figurant la discrétisation du système (p) continu par approximation de **Tustin***

Il s’agit de remplacer la variable complexe de Laplace ‘p’ par $\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}$, par conséquent, dans ce cas la fonction de transfert discrète s’obtient comme suit :

$$G(z) = \left. G(p)\right|_{p=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \tag{3.9}$$

4.4 Discrétisation par approximation d’Euler

Cette approche consiste à approximer la dérivée continue entre deux instants d’échantillonnage (principe d’Euler). En fait, deux approximations sont considérées : ***discrétisation arrière*** et ***discrétisation avant***.

(1) Discrétisation arrière : $p \mapsto \frac{(z-1)}{Tz}$

Cette discrétisation est représentée par la figure suivante :

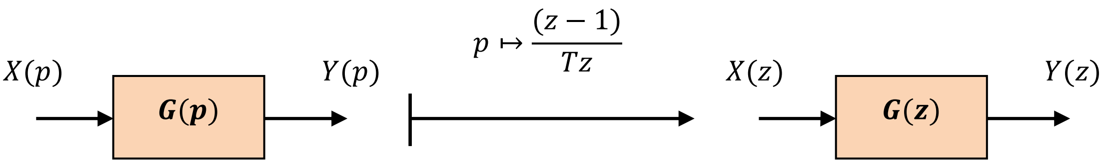


Figure (3.19) : Schéma fonctionnel figurant la discrétisation du système (p) *continu par approximation* ***d'Euler arrière***

Dans ce cas, la fonction de transfert discrète est obtenue comme suit :

$$G(z) = G(p)\big|_{p=\frac{(z-1)}{Tz}} \qquad (3.10)$$

(2) Discrétisation Avant : $p \mapsto \frac{(z-1)}{z}$

Cette discrétisation est représentée par la figure suivante :

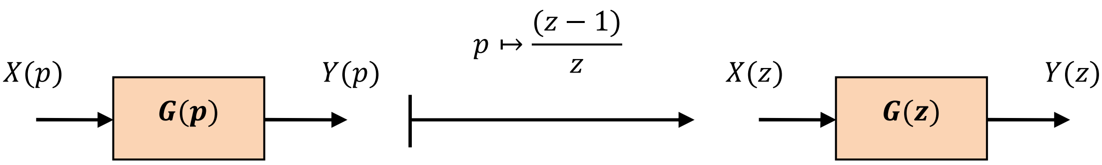


Figure (3.19) : Schéma fonctionnel figurant la discrétisation du système (p) *continu par approximation* ***d'Euler Avant***

Dans ce cas, la fonction de transfert discrète est obtenue comme suit :

$$G(z) = G(p)\big|_{p=\frac{(z-1)}{z}} \qquad (3.11)$$

Exemple 3.6

On considère un système continu de premier ordre de gain statique 1 et de constante de temps 10 :

$$G_c(p) = \frac{1}{(1+10p)}.$$

La version discrète de $G_c(p)$ est obtenue comme suit :

- ***discrétisation par un bloqueur d'ordre zéro (BOZ) :***

$$G_d(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G_c(p)}{p}\right]$$

Etape 1 : on forme la fonction : $\frac{G_c(p)}{p}$

$$\frac{G_c(p)}{p} = \frac{1/10}{p\left(p+\frac{1}{10}\right)}$$

Etape 2 : décomposer la fonction $\frac{G_c(p)}{p}$ en éléments simples

$$\frac{G_c(p)}{p} = \frac{1/10}{p\left(p+\frac{1}{10}\right)} = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p+\frac{1}{10}}$$

Avec :

$$C_1 = p.\frac{G_c(p)}{p}\bigg|_{p=0} = \frac{1/10}{\left(p+\frac{1}{10}\right)}\bigg|_{p=0} = 1$$

$$C_2 = \left(p+\frac{1}{10}\right).\frac{G_c(p)}{p}\bigg|_{p=0} = \frac{1/10}{p}\bigg|_{p=-\frac{1}{10}} = -1$$

Donc :

$$\frac{G_c(p)}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{10}}$$

Etape 3 : on calcule la transformée en z

$$\mathcal{Z}\left[\frac{G_c(p)}{p}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{10}}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{p}\right] - \mathcal{Z}\left[\frac{1}{p + \frac{1}{10}}\right]$$

Etape 4 : on utilise le tableau de la correspondance entre T Laplace et TZ, on trouve :

$$\mathcal{Z}\left[\frac{G_c(p)}{p}\right] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{10}}}$$

Prenons T = 10 sec,

$$\mathcal{Z}\left[\frac{G_c(p)}{p}\right] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-1}z^{-1}}$$

Alors :

$$G_d(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G_c(p)}{p}\right] = (1 - z^{-1})\left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-1}z^{-1}}\right] = 1 - \frac{(1 - z^{-1})}{1 - e^{-1}z^{-1}}$$

$$G_d(z) = \frac{1 - e^{-1}z^{-1} - (1 - z^{-1})}{1 - e^{-1}z^{-1}} = \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}}{1 - e^{-1}z^{-1}} = \frac{0.6321z^{-1}}{1 - 0.3679z^{-1}} = \frac{0.6321}{z - 0.3679}$$

- discrétisation par approximation de Tustin:

$$G_d(z) = G_c(p)\Big|_{p=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \frac{1}{(1 + 10p)}\Big|_{p=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \frac{1}{1 + 10\left(\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}\right)} = \frac{Tz + T}{(T + 20)z + (T - 20)}$$

Prenons : T = 10 sec,

$$G_d(z) = \frac{10z + 10}{(10 + 20)z + (10 - 20)} = \frac{z + 1}{3z - 1} = \frac{0.3333z + 0.3333}{z - 0.3333}$$

On peut également obtenir ce résultat en utilisant le code **MATLAB** suivant :

```
NumGc= 1;
DenGc = [10 1];
Gc = tf(NumGc, DenGc) ;
T= 10;
% Déscritisation par un BOZ
Gd_BOZ = c2d(Gc,T,'zoh')
% Déscritisation par approximation de Tustin
Gd_Tustin = c2d(Gc,T,'tustin')
```

5- Choix de la période d'échantillonnage pour les systèmes dynamiques

Pour les cas des systèmes dynamiques, le choix de la période d'échantillonnage 'T' doit pratiquement satisfaire les intervalles suivants :

$$5f_C \leq f_T \leq 25f_C \Leftrightarrow \frac{2\pi}{25\omega_C} \leq T \leq \frac{2\pi}{5\omega_C} \tag{3.12}$$

où

f_T, f_C et ω_C sont respectivement la fréquence d'échantillonnage, la fréquence de coupure et la pulsation de coupure du système à discrétiser.

- Cas d'un système du premier ordre

Pour un système du premier ordre, la période d'échantillonnage doit pratiquement satisfaire l'intervalle suivant :

$$0.25\tau \leq T \leq 1.25\tau \qquad (3.13)$$

où τ est la constante de temps du système du premier ordre à discrétiser.

- Cas d'un système du second ordre

Un système du second ordre peut être discrétisé si :

$$\frac{0.25}{\omega_0} \leq T \leq \frac{1.25}{\omega_0} \qquad (3.14)$$

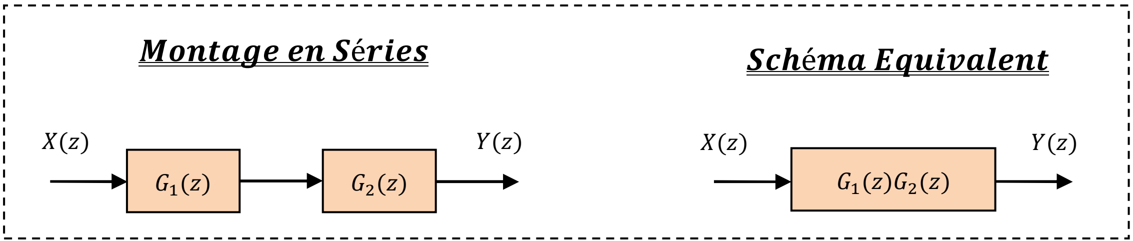
où ω_0 est la pulsation propre du système du second ordre à discrétiser.

6- Association des systèmes discrets

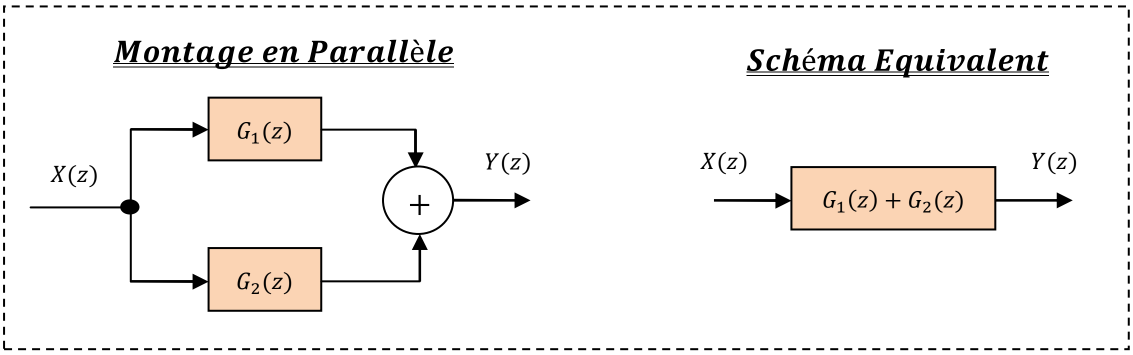
Comme dans le cas continu, on peut calculer la **fonction de transfert** équivalente de deux systèmes LTI à temps discret mis :

- En série,
- En parallèle ou,
- En rétroaction.

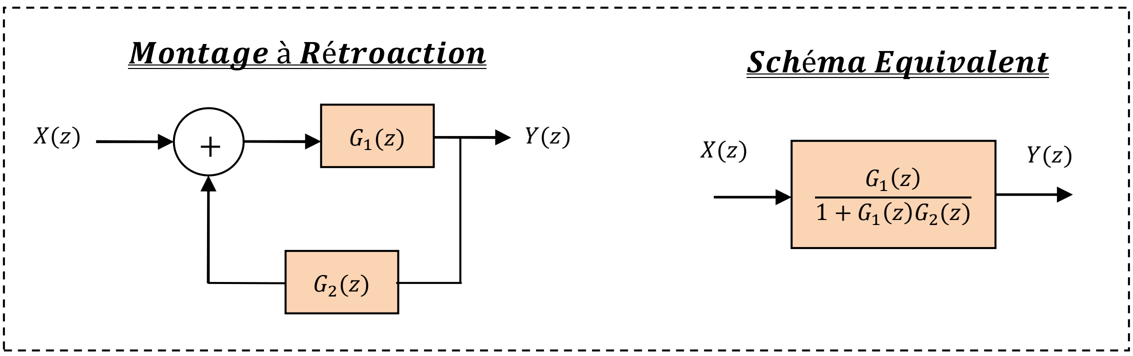
6.1 Deux systèmes Discrets montés en série



6.2 *Deux systèmes discrets montés en parallèle*



6.3 Deux systèmes montés en rétroaction



Exemple 3.7

Considérons deux systèmes discrets dont les fonctions de transfert sont les suivantes :

$$G_1(z) = \frac{1}{(z+1)} \quad et \quad G_2(z) = \frac{1}{(z+2)}$$

Le code **MATLAB** suivant, permet de calculer à la fois:

(z) : fonction de transfert de deux systèmes $G_1(z)$ et $G_2(z)$ montés en série.

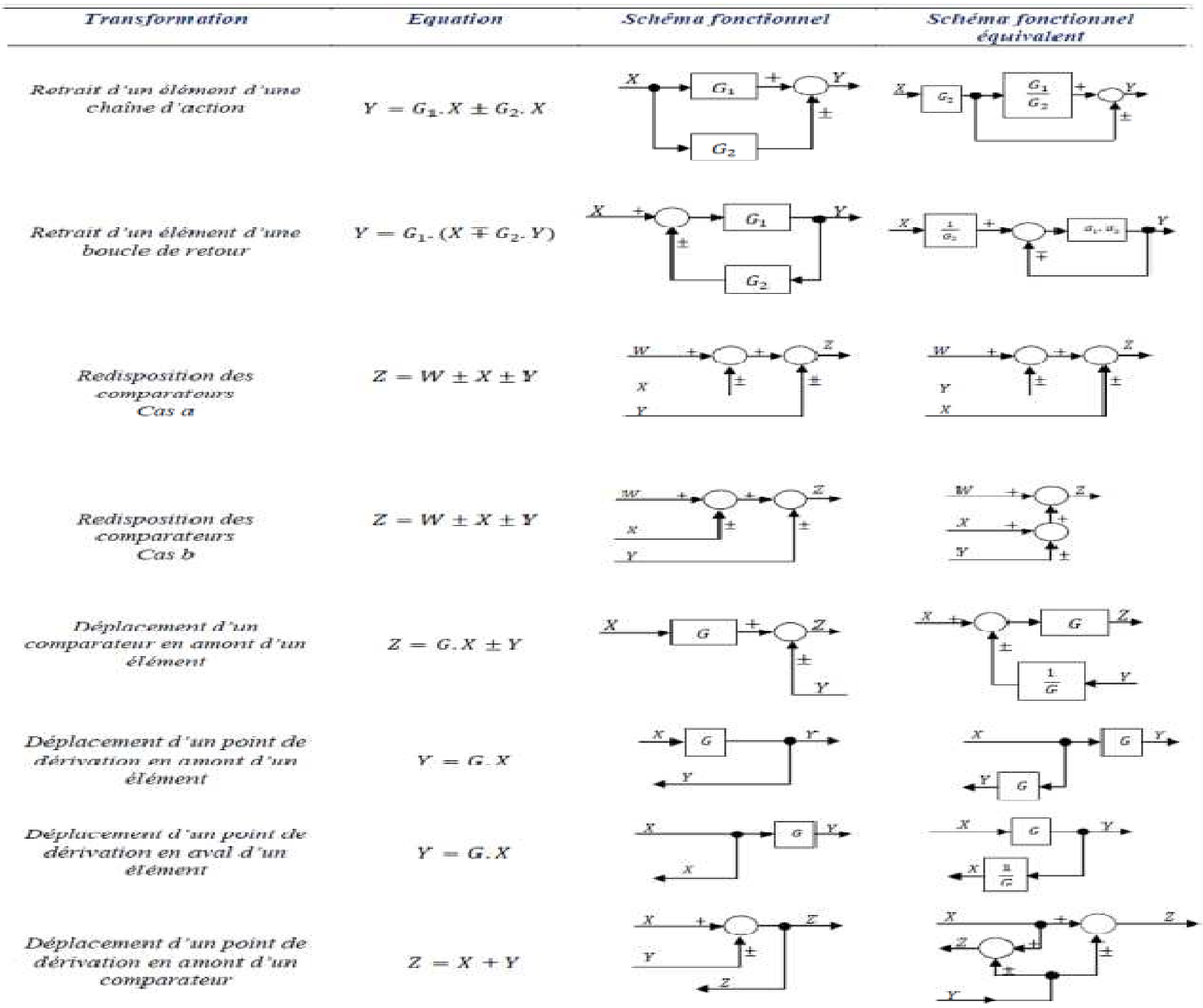
(z) : fonction de transfert de deux systèmes $G_1(z)$ et $G_2(z)$ montés en parallèle.

(z) : fonction de transfert de deux systèmes $G_1(z)$ et $G_2(z)$ montés en rétroaction.

```
z=tf('z');
G1=1/(z+1);
G2=1/(z+2);
Gs=series(G1,G2);
Gp=parallel(G1,G2);
Gf=feedback(G1,G2);
```

7- Règles de transformation des schémas blocs

On peut simplifier les schémas de systèmes de commande numérique compliqués en employant des transformations faciles à établir. A ce sujet, quelques règles courantes sont recensées dans le tableau suivant :



Transformation	Equation	Schéma fonctionnel	Schéma fonctionnel équivalent
Retrait d'un élément d'une chaîne d'action	$Y = G_1.X \pm G_2.X$		
Retrait d'un élément d'une boucle de retour	$Y = G_1.(X \mp G_2.Y)$		
Redisposition des comparateurs Cas a	$Z = W \pm X \pm Y$		
Redisposition des comparateurs Cas b	$Z = W \pm X \pm Y$		
Déplacement d'un comparateur en amont d'un élément	$Z = G.X \pm Y$		
Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément	$Y = G.X$		
Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément	$Y = G.X$		
Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un comparateur	$Z = X + Y$		

Tableau (2.2) : Règles de transformation des schémas fonctionnels (schémas blocs)

Remarque : Les lettres $G1$, $G2$ et G représentent des fonctions de transfert discrètes. Les lettres W, X, Y et Z représentent des signaux discrets.

8- Fonctions de transfert échantillonnées des systèmes complexes

Il s'agit de calculer la **fonction de transfert échantillonnée** équivalente d'un système résultant de l'association de systèmes élémentaires regroupés pour former, soit :

- Des commandes en boucle ouverte, soit ;
- Des commandes en boucle fermée.

Généralement, **la fonction de transfert échantillonnée** équivalente dépend essentiellement au **nombre** d'échantillonneurs et leurs **positions** dans la boucle.

8.1 Cas des Systèmes en boucle ouverte (BO)

Pour calculer la fonction de transfert échantillonnée équivalente des systèmes connectés en boucle ouverte, on distingue les cas suivants selon le nombre et la position des échantillonneurs.

❖ ***Cas 1 : un système encadré par deux échantillonneurs***

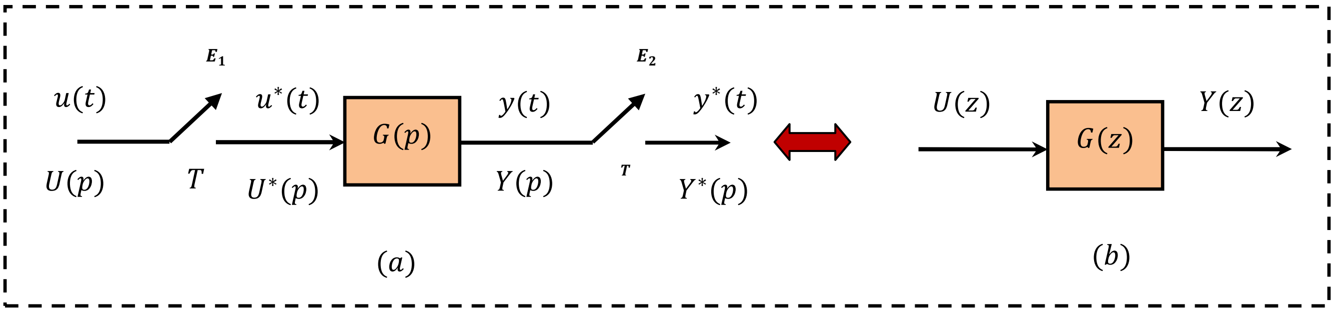


Figure (3.21) : (a). Schéma fonctionnel d'un système encadré par deux échantillonneurs.
(b). Schéma fonctionnel du système échantillonné équivalent

Avec :

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(p)] = \frac{\mathcal{Z}[Y(p)]}{\mathcal{Z}[U(p)]} = \frac{Y(z)}{U(z)} \qquad (2.15)$$

Evaluation

Avant le premier échantillonneur E_1 *:* $u(t) \mapsto \overset{L}{\rightarrow} U(p)$

Après le premier échantillonneur E_1 *et avant* (p)*:* $u(t) \mapsto \overset{E_1}{\rightarrow} u^*(t) \quad \Rightarrow U(p) \mapsto \overset{E_1}{\rightarrow} U^*(p)$

Avant le deuxième échantillonneur E_2 *:* $y(t) \mapsto \overset{L}{\rightarrow} Y(p) = U^*(p).G(p)$

Après le deuxième échantillonneur E_2*:* $y(t) \mapsto \overset{E_2}{\rightarrow} y^*(t) \quad \Rightarrow Y(p) \mapsto \overset{E_2}{\rightarrow} Y^*(p)$

Il résulte que :

$$Y^*(p) = [Y(p)]^* = [U^*(p).G(p)]^* = U^*(p)[G(p)]^* = U^*(p)G^*(p)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y^*(p) \mapsto \xrightarrow{z=e^{Tp}} Y(z) \\ U^*(p) \mapsto \xrightarrow{z=e^{Tp}} U(z) \Rightarrow Y(z) = U(z)G(z) \\ G^*(p) \mapsto \xrightarrow{z=e^{Tp}} G(z) \end{cases}$$

Par conséquent :

$$Y(z) = U(z)G(z) \Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}[Y(p)]}{\mathcal{Z}[U(p)]} = \mathcal{Z}[G(p)]$$

❖ ***Cas 2* : Cas d'un échantillonneur intermédiaire dans la chaîne**

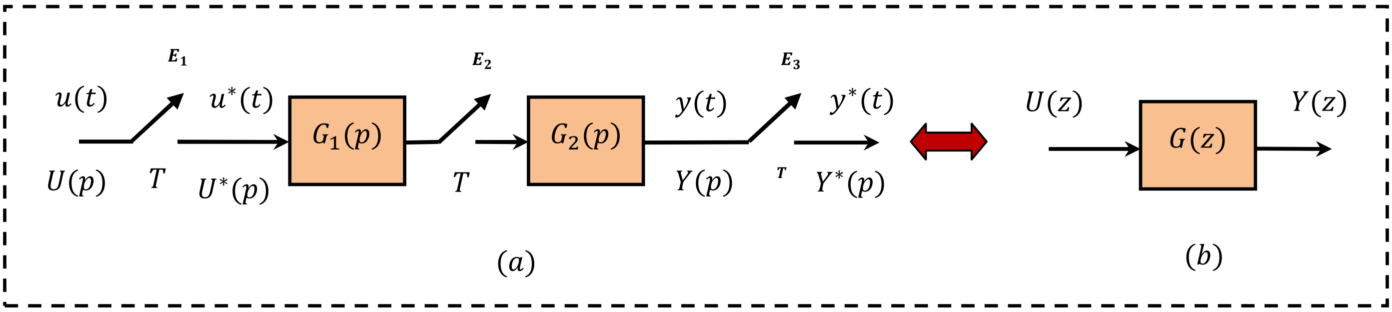


Figure (3.22) : (a). Cas d'un échantillonneur intermédiaire dans la chaîne.

(b). Schéma fonctionnel du système échantillonné équivalent

Avec :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}[Y(p)]}{\mathcal{Z}[U(p)]} = \mathcal{Z}[G_1(p)]\mathcal{Z}[G_2(p)] \qquad (2.16)$$

C'est-à-dire :

$$G(z) = G_1(z)G_2(z)$$

❖ ***Cas 3* : Cas *sans* échantillonneur intermédiaire dans la chaîne**

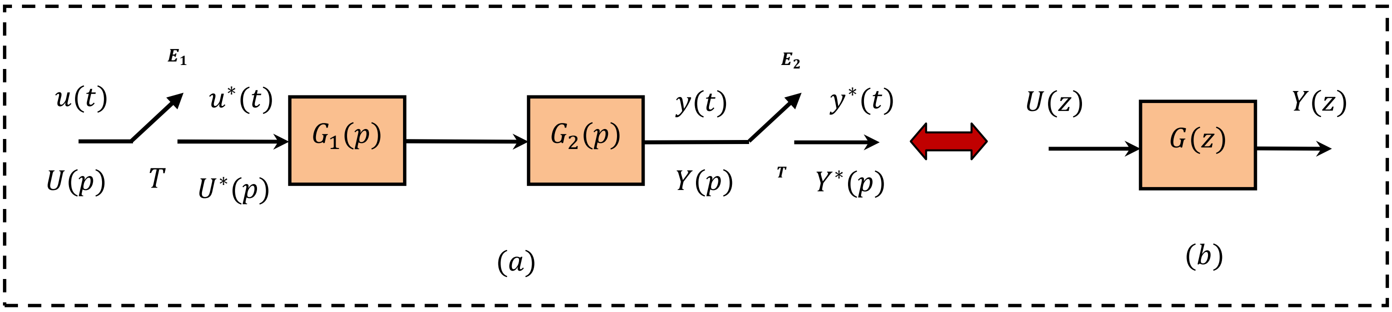


Figure (3.23) : (a). Cas sans échantillonneur intermédiaire dans la chaîne.

(b). Schéma fonctionnel du système échantillonné équivalent

Avec :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}[Y(p)]}{\mathcal{Z}[U(p)]} = \mathcal{Z}[G_1(p)G_2(p)] \qquad (2.17)$$

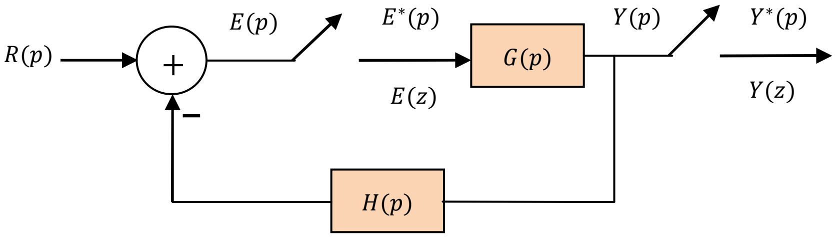
C'est-à-dire :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = [G_1G_2](z)$$

8.2 Cas des Systèmes en boucle fermée : systèmes bouclés (BF)

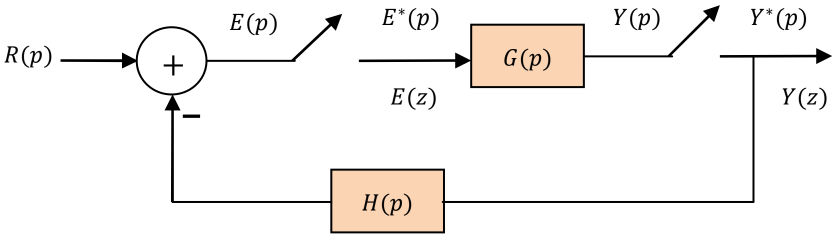
Le tableau suivant résume les cinq configurations typiques de systèmes de commande discrets en boucle fermée :

Schéma Fonctionnel | **Fonction de Transfert en BF**



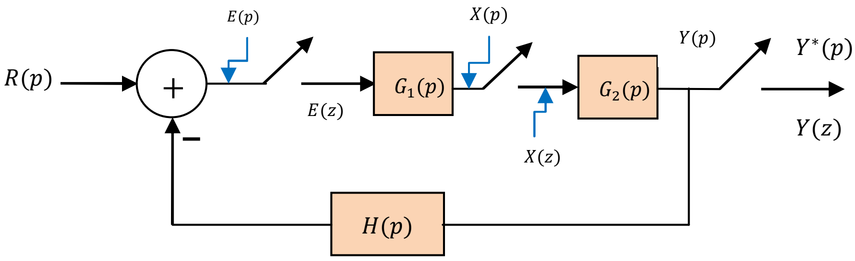
$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+[GH](z)}$$

Schéma Fonctionnel | **Fonction de Transfert en BF**



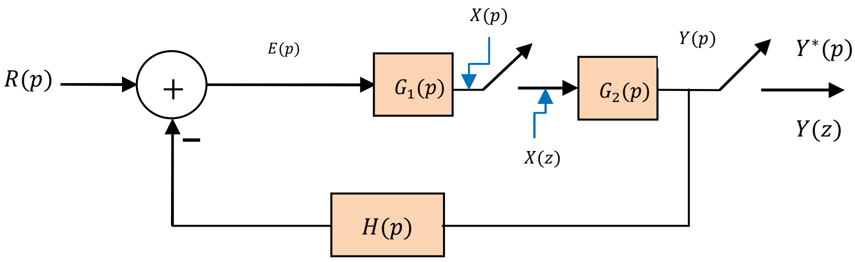
$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)H(z)}$$

Schéma Fonctionnel | **Fonction de Transfert en BF**



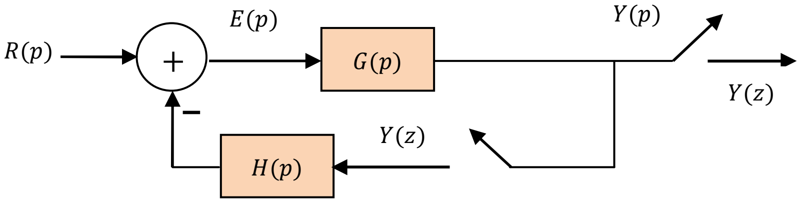
$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)[\boldsymbol{G_2H}](z)}$$

Schéma Fonctionnel | **Fonction de Transfert en BF**



$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_2(z)}{1+[\boldsymbol{G_1G_2H}](z)}$$

Schéma Fonctionnel | **Fonction de Transfert en BF**



$$Y(z) = \frac{[GR](z)}{1+[GH](z)}$$

Figure (3.24) : Configurations typiques des systèmes échantillonnés en Boucle Fermée (BF)