Chapitre 2 Transformée en z des signaux échantillonnés

1- Introduction

D'un point de vue mathématique, la transformation de Laplace est un moyen de traiter les signaux et les systèmes décrits en temps continus ; tandis que la transformation en 'z' est l'outil mathématique permettant de traiter les signaux et les systèmes décrits en temps discret.

2- Dérivation de la Transformée en z

Soit le signal échantillonné $f^*(t)$ exprimé comme :

$$f^*(t) = f(kT) = f(t).\delta_T(t) = f(t).\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT).\delta(t-kT)$$

Pour un signal causal ; c'est-à-dire, il est défini pour : $t \geq 0$,

En utilisant la Transformée de Laplace pour calculer la transformée de Laplace d'un signal échantillonné, on a :

$$F^*(p) = L\{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-pkT}$$

Si on met la transformation suivante:

$$z = e^{pT}$$

Alors,

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = F(z)$$

Et donc, on obtient la definition suivante.

Soit un signal échantillonné $f^*(t) = f(kT) = f(k)$, sa transformée en z, dénotée par $F(z)$ ou $\mathcal{Z}[f^*(t)]$, est définie par la série de puissances négatives suivante, où 'z' est une variable complexe dans le plan z :

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = Z\{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \qquad (2.1)$$

Ici, $\mathcal{Z}$ représente l'opérateur de la transformée en 'z'.

3- Propriétés de la transformée en 'z'

La transformée en 'z' possède les propriétés suivantes :

3.1 Linéarité

Pour tout deux signaux temporels numériques (échantillonnés) $f_1(k)$ et $f_1(k)$. Soit aussi deux nombres réels a et b, on a :

$$TZ\{af_1(k) + bf_2(k)\} = aTZ\{f_1(k)\} + bTZ\{f_2(k)\} = aF_1(z) + bF_2(z) \qquad (2.2)$$

3.2 Translation temporelle

Pour tout signal numérique (échantillonné) $f(k)$, m entier naturel, et T > 0, on a :

- **Cas de retard** :

$$TZ\{f(k-mT)\} = z^{-\alpha}TZ\{f(k)\} = z^{-\alpha}.F(z) \qquad (2.3)$$

- **Cas d'Avance** :

$$TZ\{f(k+mT)\} = z^m\left[TZ\{f(k)\} - \sum_{k=0}^{m-1} f(k).z^{-k}\right] = z^m\left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k).z^{-k}\right] \qquad (2.3)$$

3.3 Multiplication par le temps

Pour tout signal temporel $f(k)$, on a :

$$TZ\{kf(k)\} = -zT\frac{d}{dz}[TZ\{f(t)\}] = -zT\frac{dF(z)}{dz} \qquad (2.4)$$

3.4 Théorème de la valeur initiale

Soit $f(k) = f(kT) = f^*(t)$ un signal échantillonné temporel quelconque, $F(z)$ sa transformée en z, on a :

$$f(0) = \lim_{k\to 0} f(k) = \lim_{z\to\infty} F(z) \tag{2.5}$$

3.5 Théorème de la valeur Finale

Soit $f(t)$ un signal temporel échantillonné quelconque et $F(z)$ sa transformée en z. si tous les pôles en z de $F(z)$ sont dans le cercle trigonométrique (unité), on a :

$$f(\infty) = \lim_{k\to\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z) \tag{2.6}$$

3.6 Théorème de la Convolution discrète

Soit $f(t)$ un signal temporel échantillonné quelconque et $F(z)$ sa transformée en z, on a :

$$TZ\{f_1(k) * f_1(k)\} = F_1(z).F_1(z)$$

4- Table de transformée en 'z' de signaux élémentaires

Le tableau suivant montre les transformées en 'z' de certains signaux élémentaires :

No.	$f(t)$	$f(kT)$	$F(z)$
1	$\delta(t)$	$\delta(kT) = \delta(k)$	1
2	$u(t)$	$u(kT) = u(k)$	$\frac{z}{z-1}$
3	t	kT	$\frac{zT}{(z-1)^2}$
4	t^2	$(kT)^2$	$\frac{z(z+1)T^2}{(z-1)^3}$
5	t^3	$(kT)^3$	$\frac{z(z^2+4z+1)T^2}{(z-1)^4}$
6	$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha kT} = a^k$	$\frac{z}{z-a}$
7	$1 - e^{-\alpha t}$	$1 - a^k$	$\frac{(1-a)z}{(z-1)(z-a)}$
8	$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$	$a^k - b^k$	$\frac{(a-b)z}{(z-a)(z-b)}$
9	$te^{-\alpha t}$	kTa^k	$\frac{azT}{(z-a)^2}$
10	$\sin(\omega_n t)$	$\sin(\omega_n kT)$	$\frac{\sin(\omega_n T)z}{z^2 - 2\cos(\omega_n T)z + 1}$
11	$\cos(\omega_n t)$	$\cos(\omega_n kT)$	$\frac{z[z - \cos(\omega_n T)]}{z^2 - 2\cos(\omega_n T)z + 1}$

Tableau 2.1 : Table de transformée en 'z'de signaux élémentaires

5- Méthodes de Calcul de la Transformée en z

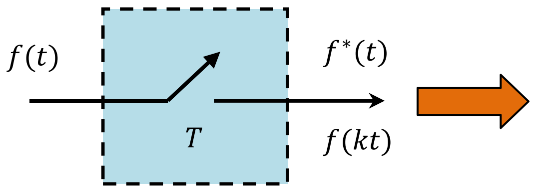
Afin de calculer la transformée en 'z' d'un signal, deux méthodes de calcul peuvent être utilisées.

5.1 Première méthode : Passage de $f(t)$ à $F(z)$

En fait, la transformée en 'z' d'un signal f(k) correspond à la transformée de Laplace du signal échantillonné $f^*(t)$, c'est-à-dire que :

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = L\{f^*(t)\}|_{z=e^{pT}} = F^*(p)|_{z=e^{pT}} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \tag{2.7}$$

Ce passage peut être défini suivant le diagramme suivant :



$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) \xrightarrow{L} F^*(p) \xrightarrow{z=e^{pT}} F(z)$$

Figure (2.1) : Diagramme montrant le passage de (t) à (z)

Exemple 2.1

En appliquant le passage de (t) à (z), la transformée en 'z' de l'échelon unité est obtenue comme suit :

$$U(z) = TZ\{u(kT)\} = U^*(p)|_{z=e^{Tp}} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT).z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1.z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad |z^{-1}| < 1$$

Ici, la série $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$forme une série géométrique convergente de raison $q = z^{-1}$.

Alors :

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

5.2 Deuxième méthode (Méthode des résidus) : Passage de $F(p)$ à $F(z)$

Lorsqu'on sait la transformée de Laplace d'un signal continu $f(t)$, on peut calculer la transformée 'z' du signal $f(t)$ en utilisant la méthode des résidus :

$$F(z) = \sum_{p_i} r_i = \sum_{p_i} \left[Résidus\ de\ \frac{F(p)}{1-e^{Tp}z^{-1}} \right] \Bigg|_{p=p_i} \tag{2.8}$$

où :

p_i: sont les pôles de la fonction (p).

r_i sont les résidus associés aux pôles p_i.

Ici, deux cas peuvent être considérés :

❖ **Cas 1 : cas de pôles simples**

Lorsque la fonction $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ a des pôles simples, le résidu correspondant à l'un de ces pôles simples a pour expression :

$$r_i = \left[Résidus\ de\ \frac{F(p)}{1-e^{Tp}z^{-1}} \right] \Bigg|_{p=p_i} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \cdot \frac{1}{1-e^{Tp}z^{-1}} \tag{2.9}$$

Avec :

$$D'(p_i) = \frac{dD(p)}{dp} \Bigg|_{p=p_i}$$

Exemple 2.2

Soit la transformée de Laplace $F(p) = \frac{1}{p}$. Calculons par la méthode des résidus la transformée en z, dénotée par la fonction (z).

Solution :

Posons $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{1}{p}$, par identification on trouve : $\begin{cases} N(p) = 1 \\ D(p) = p \end{cases}$

Pour avoir les pôles de $F(p)$, on résout l'équation $D(p) = 0 \Longrightarrow p_1 = 0$.

$p1$: est le seul pôle simple de (p).

Calculons $D'(p_1) = \frac{dD(p)}{dp}\Big|_{p=p_1} = 1$, et comme $N(p=0) = 1$, alors le résidu r_1 associé au pôle simple $p_1 = 0$, $\forall\, T$:

$$r_1 = \left[Résidus\ de\ \frac{F(p)}{1-e^{Tp}z^{-1}}\right]\Bigg|_{p=0} = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)}.\frac{1}{1-e^{T.0}z^{-1}} = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Par conséquent :

$$F(z) = \sum\nolimits_{p_i} r_i = r_1 = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

❖ Cas 2 : cas de pôles multiples

Dans le cas où $F(p)$ possède des ***pôles multiples***, le résidu correspondant à l'un de ces pôles multiples a pour expression :

$$r_i = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left[(p-p_i)^n\ \frac{F(p)}{1-e^{Tp}z^{-1}}\right]\Bigg|_{p=p_i} \qquad (2.10)$$

Pour un pole multiple p_i d'ordre n, (n est la multiplicité du pole p_i).

Exemple 1.4

Calculons par la méthode des résidus la transformée en 'z' de la fonction $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$:

Solution :

Posons $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{1}{p^2(p+1)}$, par identification on trouve : $\begin{cases} N(p) = 1 \\ D(p) = p^2(p+1) \end{cases}$

Pour avoir les pôles de (p), on résout l'équation :

$$D(p) = p^2(p+1) = 0 \Longrightarrow \{p1 = -1, pôle\ simple\ p2 = 0, pôle\ double\ (n=2)$$

D'abord, calculons le résidu $r1$ associé au pôle simple $p1 = -1$:

$$r1 = \frac{1}{D'(p)}\frac{1}{(1-e^{Tp}z^{-1})}|_{p=-1} = \frac{1}{2p(p+1)+p^2}\frac{1}{(1-e^{Tp}z^{-1})}|_{p=-1}$$

$$r1 = \frac{1}{(1-e^{-T}z^{-1})} = \frac{z}{z-e^{-T}},\quad \forall\ T > 0$$

Puis, calculons le résidu $r2$ associé au pôle double $p2$=0:

$$r2 = \frac{d}{dp}[p^2.\frac{1}{p^2(p+1)}.\frac{1}{(1-e^{Tp}z^{-1})}]|_{p=0}$$

$$r2 = \left[\frac{-(1-e^{Tp}z^{-1}) + (p+1)Te^{Tp}z^{-1}}{(p+1)^2(1-e^{Tp}z^{-1})^2}\right]\Bigg|_{p=0}$$

$$r2 = \frac{-(1-z^{-1}) + Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = -\frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2},\quad \forall\, T > 0$$

D'où :

$$TZ\left\{\frac{1}{p^2(p+1)}\right\} = r1 + r2 = \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2},\quad \forall\, T > 0$$

Remarque :

Avant de déterminer la transformée en 'z' d'une fonction (p), il est préférable de décomposer la fonction (p) en éléments simples (méthode de décomposition par fractions rationnelles) :

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p^2} + \frac{C_3}{(p+1)}$$

Les coefficients C_1, C_2 et C_3 sont calculés comme suit :

$$C_1 = \frac{d}{dp}[p^2\mathrm{F(p)}]|_{p=0} = \frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p+1}\right]\Bigg|_{p=0} = -1$$

$$C_2 = [p^2 \mathrm{F(p)}]|_{p=0} = \left[\frac{1}{p+1}\right]\Big|_{p=0} = 1$$

$$C_3 = [(p+1)\mathrm{F(p)}]|_{p=-1} = \left[\frac{1}{p^2}\right]\Big|_{p=-1} = 1$$

D'où :

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)}$$

Donc :

$$F(z) = TZ[F(p)] = TZ\left[\frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)}\right] = -TZ\left[\frac{1}{p}\right] + TZ\left[\frac{1}{p^2}\right] + TZ\left[\frac{1}{(p+1)}\right]$$

En utilisant le tableau de la transformée en 'z', on trouve :

$$F(z) = -\frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T}}, \quad \forall\, T > 0$$

6- Inversion de la transformée en 'z'

6.1 Définition

Le passage de la transformée en 'z' (z) à la fonction continue $f(t)$ n'est pas unique. En effet, (z) est la transformée de la fonction continue $f^*(t)$ obtenue par **échantillonnage d**e période T et **blocage** d'ordre zéro de la fonction continue (t). En fait, la perte d'information entre deux instants d'échantillonnage empêche la reconstitution de la fonction (t). On notera la transformation inverse $\mathcal{Z}^{-1}$:

$$f^*(t) = \{f(kT)\} = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] \tag{2.11}$$

6.2 Méthodes de calcul de la transformée inverse en 'z'

Plusieurs méthodes permettent d'obtenir l'ensemble d'échantillons $\{f(kT)\}$, on distingue :

- la méthode des résidus,
- la Méthode de la division polynomiale,
- la Méthode de la décomposition en éléments simples (Décomposition en Fractions Rationnelles),
- la méthode de l'équation aux différences.

(1) Méthode des résidus :

L'ensemble d'échantillons $\{(kT)\}$ est obtenu par l'expression suivante :

$$f(kT) = \sum_{p_i} r_i = \sum_{p_i} [Résidus\ de\ z^{k-1}.F(z)]|_{z=p_i} \tag{2.12}$$

Où :

p_i: sont les pôles de la fonction $F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

On définit le résidu ri à un pôle d'ordre n en $z = p_i$ par :

$$r_i = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-p_i)^n\, z^{k-1}.F(z)]|_{z=p_i} \tag{2.13}$$

Exemple 2.3

Calculons la transformée inverse en 'z' de la fonction $F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}, \forall\, T > 0$:

pour $k = 0$:

$$f(0) = \left[Résidus\ de\ z^{-1}.\frac{Tz}{(z-1)^2}\right]\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\, z^{-1}.\frac{Tz}{(z-1)^2}\right]\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}[T]|_{z=1} = 0$$

pour $k > 0$:

$$f(kT) = \left[Résidus\ de\ z^{k-1}.\frac{Tz}{(z-1)^2}\right]\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\, z^{-1}.\frac{Tz}{(z-1)^2}\right]\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}[Tz^k]\big|_{z=1} = kT[z^{k-1}]\big|_{z=1} = kT$$

D'où :

$$f(kT) = \begin{cases} 0, & pour\ \ k = 0 \\ kT, & \forall\ k > 0 \end{cases}$$

Ou bien :

$$f(kT) = kT, \quad \forall\ k \geq 0, \qquad \forall\, T > 0$$

(2) Division polynomiale :

La fonction (z) se présente fréquemment comme une fraction rationnelle en 'z' ou en 'z^{-1}':

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

Il s'agit de diviser le numérateur par le dénominateur pour obtenir une série en 'z^{-1}'.

Exemple 2.4

Etant donné la fonction en 'z' suivante : $F(z) = \frac{2z-3}{3z^2+2z-1}$.

Calculons les premiers échantillons $f(k) = f(kT)$ par division polynomiale :

Les premiers échantillons $f(k) = f(kT)$ sont donc: $f_0 = 0$; $f_1 = \frac{2}{3}$; $f_2 = -\frac{13}{9}$; $f_3 = \frac{32}{27}$

(3) Méthode de la décomposition en éléments simples

Le principe de cette méthode est décrit comme suit :

- Former la fonction $\frac{F(z)}{z}$;
- Décomposer la fonction $\frac{F(z)}{z}$ en éléments simples ;
- Tirer l'expression de $F(z)$ en fonction de 'z^{-1}' ;
- Déterminer les échantillons $f(kT)$ en utilisant la table de la transformée en 'z'.

Exemple 2.5

Soit la fonction en 'z' suivante : $F(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$.

Calculons les échantillons $f(k) = f(kT)$:

Solution :

Tout d'abord, formons $\frac{F(z)}{z}$:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z(z^2-3z+2)}\ ;$$

Décomposons $\frac{F(z)}{z}$ en éléments simples :

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z(z^2-3z+2)} = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z-1} + \frac{C_3}{z-2}$$

Les coefficients C_1, C_2 et C_3 sont calculés comme suit :

$$C_1 = \left[z\frac{\mathrm{F(z)}}{\mathrm{z}}\right]\Big|_{z=0} = \left[z\frac{1}{z(z-1)(z-2)}\right]\Big|_{z=0} = \left[\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right]\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \left[(z-1)\frac{\mathrm{F(z)}}{\mathrm{z}}\right]\Big|_{z=1} = \left[(z-1)\frac{1}{z(z-1)(z-2)}\right]\Big|_{z=1} = \left[\frac{1}{z(z-2)}\right]\Big|_{z=1} = -1$$

$$C_3 = \left[(z-2)\frac{\mathrm{F(z)}}{\mathrm{z}}\right]\Big|_{z=2} = \left[(z-2)\frac{1}{z(z-1)(z-2)}\right]\Big|_{z=2} = \left[\frac{1}{z(z-1)}\right]\Big|_{z=2} = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2}$$

Maintenant, Tirons l'expression de $F(z)$:

$$F(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z} - \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-2} = \frac{1}{2}(1) - \left(\frac{z}{z-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-2}\right)$$

Exprimons $F(z)$ en fonction de 'z^{-1}'

$$F(z) = \frac{1}{2}(1) - \left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2z^{-1}}\right)$$

On introduit la transformée en z inverse $\mathcal{Z}^{-1}$ sur l'expression de $F(z)$, on trouve:

$$f(k) = f(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{2}(1) - \left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2z^{-1}}\right)\right\}$$

$$f(k) = f(kT) = \frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\{1\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{1-2z^{-1}}\right)\right\}$$

En utilisant le tableau de la transformée en z, les échantillons $f(k) = f(kT)$ sont exprimés comme suit :

$$f(k) = f(kT) = \frac{1}{2}\delta(kT) - u(kT) + \frac{1}{2}2^{kT}, \forall\, k \geq 0, \qquad \forall\, T > 0$$

(4) Méthode de l'équation aux différences :

Cette méthode sera développée dans le chapitre suivant, nous en donnons seulement un exemple ici.

Exemple 2.6

Soit l'équation aux différences (équation de récurrence) suivante :

$$y(kT) = 0.5y((k-1)T) + u(kT)$$

En appliquant l'opérateur de la transformée en z, $\mathcal{Z}$, il vient :

$$\mathcal{Z}[y(kT)] = \mathcal{Z}[0.5y((k-1)T)] + \mathcal{Z}[u(kT)]$$

En se basant sur les propriétés de la transformée en 'z', on aura :

$$Y(z) = 0.5z^{-1}Y(z) + U(z)$$

Formons la fonction $F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$:

$$F(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})} = \frac{z}{(z-0.5)}$$

Annexe : Tableau de la transformée de Laplace et Transformée en z des Signaux élémentaires.

No.	Continuous time	Discrete time	Laplace transform	Z transform
1	$\delta(t)$	$\delta(kT) = \delta(k)$	1	1
2	$1(t)$	$1(kT) = 1(k)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
3	t	kT	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{zT}{(z-1)^2}$
4	t^2	$(kT)^2$	$\frac{2!}{p^3}$	$\frac{z(z+1)T^2}{(z-1)^3}$
5	t^3	$(kT)^3$	$\frac{3!}{p^4}$	$\frac{z(z^2+4z+1)T^2}{(z-1)^4}$
6	$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha kT} = a^k$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-a}$
7	$1 - e^{-\alpha t}$	$1 - a^k$	$\frac{\alpha}{\alpha(p+\alpha)}$	$\frac{(1-a)z}{(z-1)(z-a)}$
8	$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$	$a^k - b^k$	$\frac{\beta-\alpha}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{(a-b)z}{(z-a)(z-b)}$
9	$te^{-\alpha t}$	kTa^k	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$\frac{azT}{(z-a)^2}$
10	$\sin(\omega_n t)$	$\sin(\omega_n kT)$	$\frac{\omega_n}{p^2+\omega_n{}^2}$	$\frac{\sin(\omega_n T)z}{z^2 - 2\cos(\omega_n T)\,z + 1}$
11	$\cos(\omega_n t)$	$\cos(\omega_n kT)$	$\frac{s}{p^2+\omega_n{}^2}$	$\frac{z[z-\cos(\omega_n T)]}{z^2 - 2\cos(\omega_n T)\,z + 1}$