

Chapitre 1 Introduction aux signaux échantillonnés

1- Définitions

- 1.1 Signal:** Il s'agit d'une grandeur physique générée par un appareil ou appliquée à un dispositif. Exemples : température, pression, courant, tension, etc.
- 1.2 Signal continu :** Lorsque le temps est continu et l'amplitude est continue, le signal est continu (analogique), tel que le signal brut délivré par un capteur physique. Un signal continu est caractérisé par une infinité d'amplitude.
- 1.3 Signal discret :** Dans un système d'acquisition de données, les mesures sont réalisées à intervalles de temps réguliers. Le temps n'est plus traité comme une variable continue, mais est discrétisé (temps discret). En fait, un signal discret est obtenu par discrétisation d'un signal continu en utilisant un pas de discrétisation variable. Contrairement au signal continu, un signal discret est caractérisé par un nombre fini d'amplitude.
- 1.4 Signal échantillonné :** Il s'agit d'un signal continu discrétisé par un pas de temps régulier. Ce pas est appelé période d'échantillonnage.
- 1.5 Signal numérique :** Il s'agit d'un signal échantillonné quantifié en amplitude.
- 1.6 Quantification :** L'opération de quantification consiste à attribuer un nombre binaire à toute valeur (amplitude) prélevée au signal lors de l'échantillonnage.
- 1.7 Signal causal :** Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps. On note que nous ne considérerons dans la suite du cours que les signaux causaux.

2- Rappels sur la transformation de Laplace

1.1 Définition de la transformation de Laplace

La transformation de Laplace est un moyen mathématique élégant de résoudre les *équations différentielles linéaires*. En automatique, elle permet un développement simple des *modèles entrées-sorties* continus et une analyse qualitative directe de l'influence de variables externes sur un système (procédé).

On associe à la fonction $f(t)$ une autre fonction $F(p)$ de la variable complexe p appelée transformée de Laplace ainsi définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad (1.1)$$

En supposant que le signal $f(t)$ est nul pour $t < 0$ (*signal causal*). On parle donc de transformée de Laplace monolatère. Le symbole \mathcal{L} se lit 'l'opérateur de la transformée de Laplace'.

Exemple 1.1 : Calculons la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at}$, en utilisant l'équation (1.1), on obtient :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+p)t} dt = \frac{1}{-(a+p)} [e^{-(a+p)t}]_0^{\infty} = \frac{1}{(p+a)}$$

Donc :

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = F(p) = \frac{1}{(p+a)}$$

2.2 L'inversion de la transformation de Laplace

Parfois, il est nécessaire d'inverser la transformation de Laplace pour obtenir la solution ayant pour domaine le temps t (c'est-à-dire dans le *domaine temporel*). La transformation faisant passer du domaine des p (*domaine fréquentiel*) au domaine des t s'appelle **l'inversion de la transformation de Laplace**.

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace du signal $f(t)$, $t > 0$. L'intégrale :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp \quad (1.2)$$

s'appelle la transformée inverse de Laplace de la fonction (p), avec ' c ' est une valeur réelle.

Le symbole \mathcal{L}^{-1} se lit 'l'opérateur de la transformée inverse de Laplace'.

2.3 Propriétés de la transformation de Laplace

La transformation de Laplace possède plusieurs propriétés importantes. Celles-ci sont résumées dans le tableau suivant :

Tableau (1.1) : Propriétés de la transformation de Laplace

N°	Propriété	Fonction en temps	Transformée de Laplace
1	Linéarité	$a_1 f_1(t) \pm a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(p) \pm a_2 F_2(p)$
2	Retard	$f(t - m)$	$e^{-mp} \cdot F(p)$
3	Avance	$f(t + m)$	$e^{mp} \cdot F(p)$
4	Translation Complexe	$e^{+at} \cdot f(t)$	$F(p - m)$
		$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(p + m)$
5	Changement de l'unité du Temps	$f(t/a)$	$aF(ap)$
6	Dérivée	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0^+)$
7	Dérivée d'ordre n	$\frac{d^{(n)}f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} \cdot \left. \frac{d^{(k)}f(t)}{dt^k} \right _{t=0^+}$
8	Intégrale	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p} + \frac{f^{-1}(0^+)}{p}$
9	Théorème de la valeur initiale	$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$
10	Théorème de valeur Finale	$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$

2.4 Table élémentaire de transformées de Laplace

Le tableau suivant montre les transformées de Laplace de certaines fonctions élémentaires :

Tableau (1.2) : Transformée de Laplace des fonctions Elémentaires

N°	Fonction en temps : $f(t)$	Transformée de Laplace : $F(p)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{p}$
3	$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
4	$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

5	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
6	$t^n \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^{n+1}}$
7	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
8	$\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
9	$e^{-at} \sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
10	$e^{-at} \cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

3- Signaux Discrets usuels

Dans les systèmes de commande (d'asservissement) numériques (ou échantillonnés), on manipule souvent les signaux qui peuvent être de type : **continu**, **échantillonné**, **bloqué** et **numérisé**. Nous présentons dans cette section en utilisant **MATLAB**, la définition de quelques signaux fondamentaux utilisés dans l'asservissement des systèmes discrets, à savoir : l'**impulsion** de Dirac discrète et le **peigne de Dirac**.

3-1 Impulsion de Dirac discrète (Kronecker)

L'**impulsion de Dirac** (Kronecker) est un signal **non réalisable**. Physiquement, on a coutume de modéliser une impulsion de Dirac par un signal rectangle dont la largeur tend vers 0 et l'amplitude tend vers l'infini. L'impulsion de Dirac unité discrète est définie comme suit :

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{pour } k = 0 \\ 0, & \forall k \neq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Pour une impulsion unité discrète et décalée à l'instant $k = k_0$, on a la définition suivante :

$$\delta(k - k_0) = \begin{cases} 1, & \text{pour } k = k_0 \\ 0, & \forall k \neq k_0 \end{cases}$$

Graphiquement, une représentation typique de l'impulsion de Dirac discrète est donnée par la figure suivante:

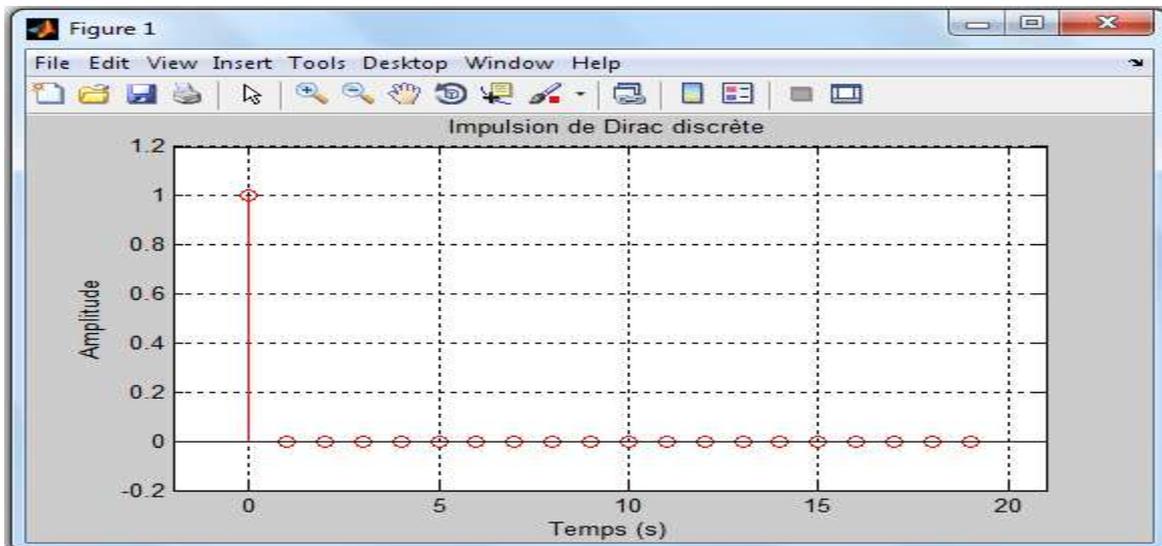


Figure 1.1 Représentation de l'impulsion de Dirac discrète

3.2 Peigne de Dirac

Ce signal est parfois appelé **train d'impulsions**, **distribution de Dirac** ou **fonction d'échantillonnage**. Le peigne de Dirac $\delta_T(t)$ est défini par :

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (1.4)$$

Graphiquement, on représente le peigne de Dirac comme il est montré par la figure suivante :

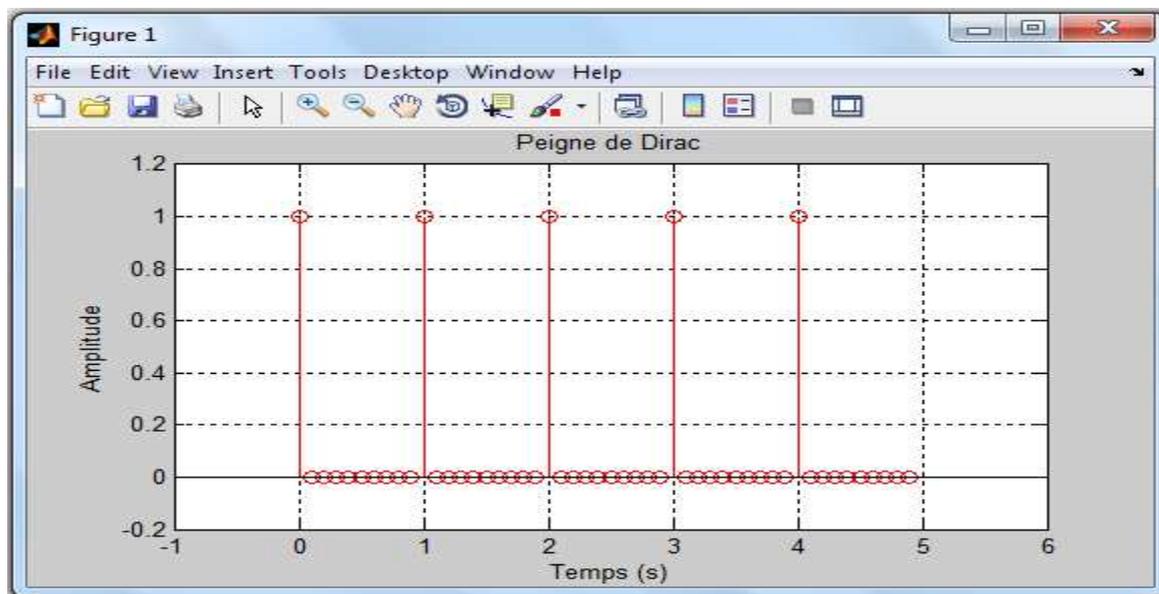


Figure 1.2 Représentation du peigne de Dirac

4- Echantillonnage d'un signal continu

4.1 Définition de l'échantillonnage

L'échantillonnage est une opération de conversion d'un signal continu $f(t)$ en une série d'impulsions, dont les amplitudes sont déterminées par les valeurs du signal continu $f(t)$ aux instants d'échantillonnage. L'échantillonnage produit donc, à partir d'un signal continu $f(t)$, la **suite d'échantillons** $\{f(kT)\}$:

$$\{f(kT)\} = \{f(0), f(1T), f(2T), \dots, f(kT)\} \quad (1.5)$$

que l'on note, en général :

$$f^*(t) = f(kT) = \{f(kT)\} = \{f(0), f(1T), f(2T), \dots, f(kT)\} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_k\} \quad (1.6)$$

ou encore :

$$f(k) = f(kT) = \{f(kT)\} = \{f(0), f(1T), f(2T), \dots, f(kT)\} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_k\} \quad (1.7)$$

On définit :

k : variable entière positive, $k \in \mathbb{N}$; T : est la période d'échantillonnage (Par définition $T > 0$) ; kT : sont les instants d'échantillonnage ; (kT) et f_k : sont les amplitudes du signal continu (t) aux instants d'échantillonnage kT ; $f^*(t) = f(k)$: est le signal échantillonné du signal continu $f(t)$.

4.2 Principe et modélisation de l'échantillonnage

L'idée consiste à utiliser un **interrupteur idéal** que l'on ferme pendant une durée très courte ($t \rightarrow 0$), puis que l'on ouvre pendant une durée T (**période d'échantillonnage**). La figure suivante montre la modélisation de l'opération de l'échantillonnage par un interrupteur idéal.

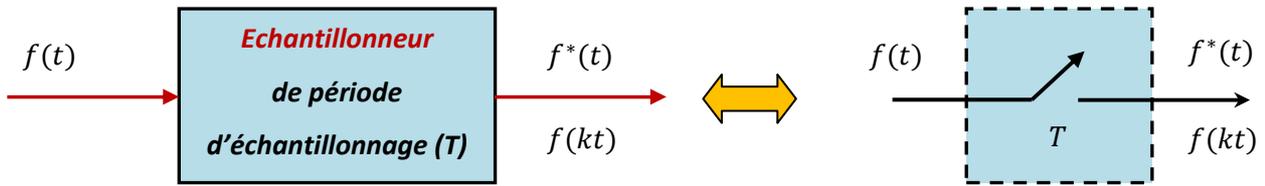


Figure 1.3 : Modélisation de l'échantillonnage par un interrupteur idéal : Échantillonnage d'un signal continu (t)

4.3 Opération de l'échantillonnage

L'opération de l'échantillonnage se traduit mathématiquement par la multiplication du signal continu à échantillonner (t) par le peigne de Dirac $\delta_T(t)$. Pour $t > 0$, on a :

$$f^*(t) = f(kT) = f(k) = f(t) \times \delta_T(t)$$

$$f^*(t) = f(t) \times \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \times \delta(t - kT) \quad (1.8)$$

Cette opération peut être schématisée comme suit :

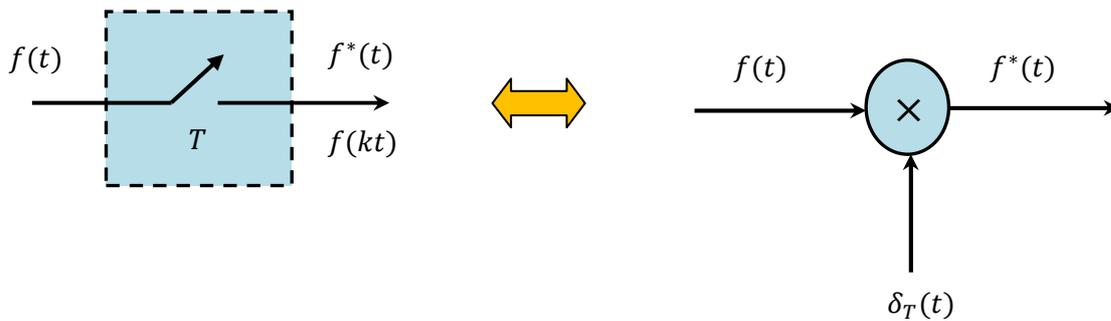


Figure 1.4 : Schéma décrivant illustrant l'opération de l'échantillonnage d'un signal continu par un peigne de Dirac

5- Exemples de signaux usuels échantillonnés

5.1 Échelon unité

Ce signal est défini par :

a) Dans le cas continu

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \forall t \geq 0 \\ 0, & \forall t < 0 \end{cases}$$

b) Dans le cas échantillonné :

$$u(k) = \begin{cases} 1, & \forall k \geq 0 \\ 0, & \forall k < 0 \end{cases}$$

Ou :

$$u(k) = u(kT) = u^*(t) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 1, \dots, 1 \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

La figure de **MATLAB** suivante propose une représentation schématique de l'échelon unité échantillonné obtenu avec $T = 0.5$ (s) versus l'échelon unité continu :

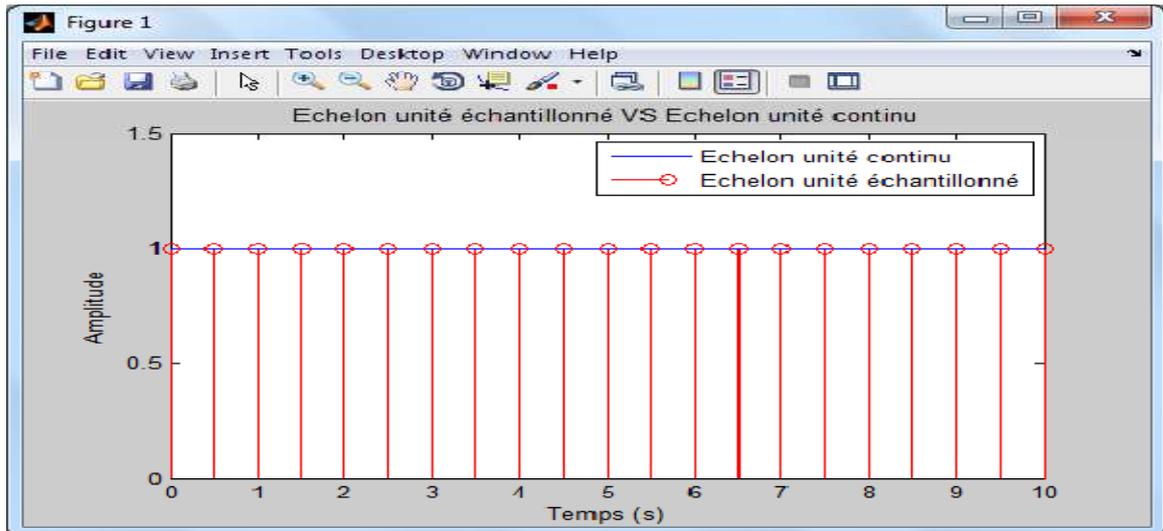


Figure 1.5 : Echelon unité échantillonné VS. Echelon unité continu

5.2 Rampe unité

Ce signal est défini par :

a) Dans le cas continu

$$r(t) = \begin{cases} t, & \forall t \geq 0 \\ 0, & \forall t < 0 \end{cases}$$

b) Dans le cas échantillonné :

$$r(k) = \begin{cases} k, & \forall k \geq 0 \\ 0, & \forall k < 0 \end{cases} \quad \text{ou:} \quad r(k) = \begin{cases} kT, & \forall k \geq 0 \\ 0, & \forall k < 0 \end{cases}$$

Ou :

$$r(k) = r(kT) = r^*(t) = \left\{ \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4, \dots, k \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} kT \delta(t - kT)$$

On donne dans la figure de **MATLAB** suivante une représentation schématique de la rampe échantillonnée obtenu avec $T = 0.5$ (s) versus la rampe continue :

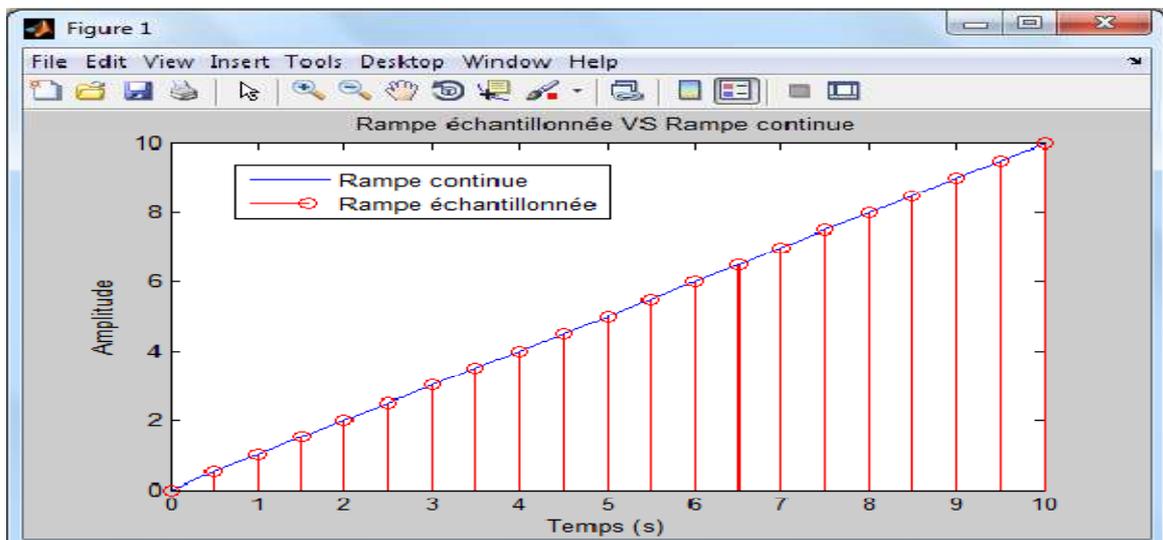


Figure 1.6 : Rampe échantillonnée VS Rampe continue

5.3 Signal Sinusoïdal

Soit le signal sinusoïdal continu $f(t)$ suivant :

$$f(t) = \sin(t), \forall t \geq 0 \quad (1.13)$$

Sa version échantillonnée est obtenue comme suit :

$$f^*(t) = f(kT) = f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\omega kT)\delta(t - kT) = \begin{cases} \sin(\omega kT), & \forall k \geq 0 \\ 0, & \forall k < 0 \end{cases}$$

La figure de **MATLAB** suivante permet de représenter graphiquement les deux signaux continu $f(t)$ et échantillonné $f^*(t)$. L'échantillonnage a été effectué avec $T = 0.25$ (s).

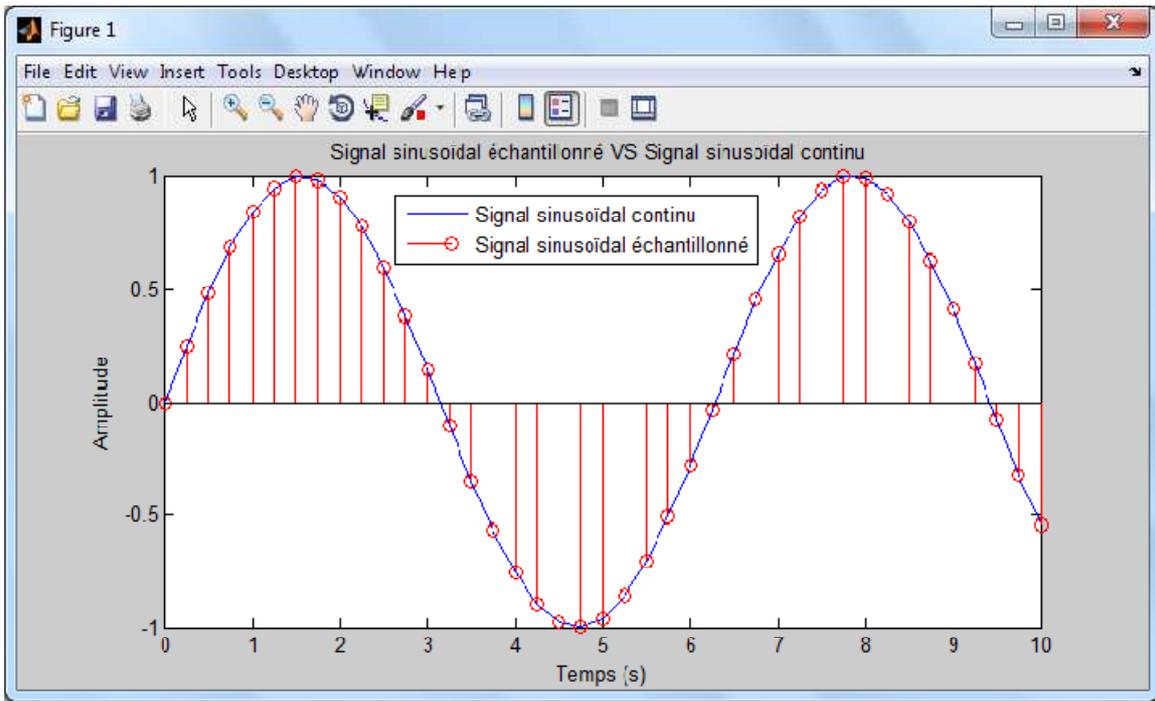


Figure 1.7 : Signal sinusoïdal échantillonné VS Signal sinusoïdal continu

6- Transformée de Laplace d'un signal échantillonné

Soit $f^*(t)$ le signal échantillonné de $f(t)$. Par définition (sans démonstration), la transformée de Laplace de $f^*(t)$ est donnée comme suit :

$$F^*(p) = L\{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-pkT}$$

avec $F^*(p)$ est la transformée de Laplace de $f^*(t)$.

La figure suivante décrit un diagramme montrant le passage de (t) à $F^*(p)$:

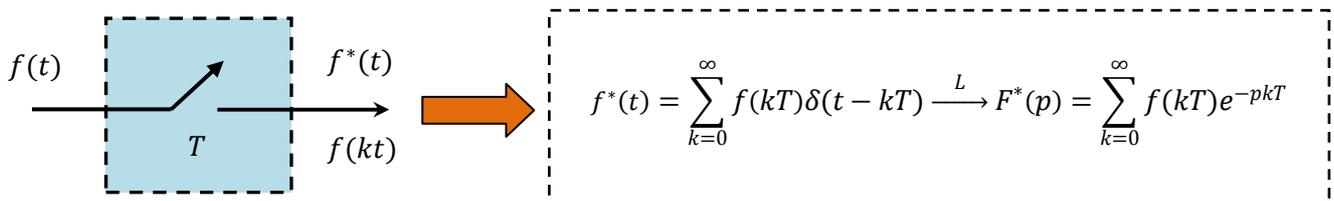


Figure 1.8 : Diagramme montrant le passage de (t) à $F^*(p)$

7- Choix de la période d'échantillonnage

Parmi les points les plus importants dans la mise en place d'une commande numérique est le choix de la période d'échantillonnage T . Pour trouver la période d'échantillonnage convenable T , et par conséquent pour avoir un bon échantillonnage, on utilise le **théorème de Shannon**. Ce théorème fournit les règles qui permettent de garantir un minimum de pertes d'informations dues à l'échantillonnage.

7.1 Théorème de Shannon

Pour pouvoir reconstituer un signal continu à partir d'un train d'échantillons de période T , il faut que la pulsation d'échantillonnage $\omega_T = 2\pi/T$ soit au moins deux fois plus grande des pulsations contenues dans le spectre fréquentiel du signal que l'on échantillonne. Ce théorème peut être interprété comme suit :

« Supposons qu'un signal $f(t)$ à échantillonner soit à énergie finie et possède, par conséquent, une **transformée de Fourier** (spectre fréquentiel) $F(\omega)$:

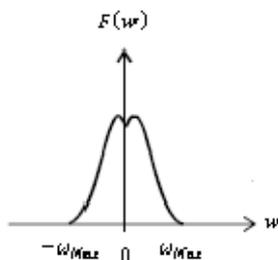


Figure 1.9 : Spectre fréquentiel du signal continu (t) : $F(\omega)$

Où :

ω : est la pulsation (variable fréquentielle);

ω_{Max} : est la pulsation la plus grande du spectre $F(\omega)$.

Alors la **transformée de Fourier** $F^*(\omega)$ du signal échantillonné $f^*(t)$ est donnée comme suit :

$$F^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - k\omega_T)$$

On obtient donc un spectre infini qui provient de la périodisation du spectre $F(\omega)$ autour des multiples de la pulsation d'échantillonnage ω_T . Pour avoir un bon échantillonnage en respectant le **théorème de Shannon**, il suffit de choisir la période d'échantillonnage T de telle sorte que :

$$\omega_T \geq 2\omega_{Max}$$

Un simple coup d'oeil au spectre $F^*(\omega)$, comme le montre la figure (1.10), on remarque bien qu'il n'y a pas de **phénomènes de recouvrement** (sans chevauchement).

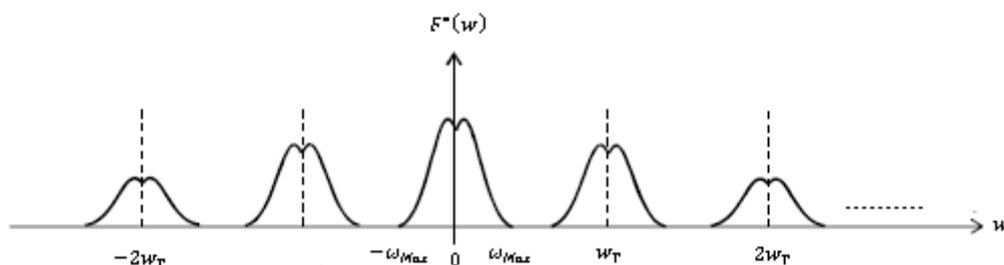


Figure 1.10 : Cas d'un spectre $F^*(\omega)$ sans recouvrement

En fait, en pratique :

- la période d'échantillonnage T doit respecter le théorème de Shannon.
- une période d'échantillonnage trop petite aura pour inconvénient de réduire l'efficacité de la rétroaction face aux perturbations.
- une période d'échantillonnage trop élevée surcharge inutilement la mémoire de l'ordinateur.

Le tableau suivant donne quelques indications valables pour un grand nombre de procédés sur la période d'échantillonnage recommandée :

<i>Signal à échantillonner</i>	<i>Période d'échantillonnage T recommandée</i>
<i>Courant dans les entraînements électriques</i>	$50 < T < 100$ (μs)
<i>Position en robotique</i>	$0.2 < T < 1$ (ms)
<i>Position en machine-outil</i>	$0.5 < T < 10$ (ms)
<i>Débit</i>	$1 < T < 3$ (s)
<i>Niveau</i>	$5 < T < 10$ (s)
<i>Pression</i>	$1 < T < 5$ (s)
<i>Température</i>	$10 < T < 45$ (s)

Tableau 1.3: Recommandations pour le choix effectif de la période d'échantillonnage T

7.2 Reconstitution d'un signal continu

L'**opération inverse** de l'échantillonnage, c'est-à-dire la transformation d'une suite d'échantillons en un signal continu acceptable technologiquement par les actionneurs, est appelée reconstitution, restitution ou encore extrapolation. Cette étape est indispensable en commande numérique ; en effet, à partir des nombres générés par l'ordinateur (généralement un calculateur numérique), une grandeur de commande analogique doit être construite afin d'activer le système à commander. En fait, cette opération est réalisée à l'aide de **filtres** ou de **bloqueurs**.

7.2.1 Bloqueur d'ordre zéro (BOZ)

Le développement important de la **théorie des systèmes échantillonnés** est dû principalement au développement de la commande par **calculateur numérique**. Dans ce cas, souvent, le signal fourni par le **calculateur numérique** est un signal numérique ; c'est-à-dire une suite des nombres binaires consistant les du signal de commande.

Un bloqueur d'ordre zéro (**BOZ**) est caractérisé par le fait que sa sortie ' $s(t)$ ' entre les instants d'échantillonnage ' kT ' et ' $(k + 1)T$ ' est constante et égale à $f(kT)$. Le **BOZ** permet de reproduire exactement un signal constant échantillonné en escalier, c'est-à-dire variant par paliers. Le bloqueur **BOZ** étant représenté figure suivante :

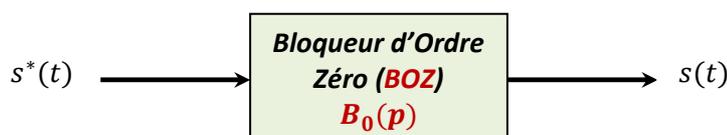


Figure 1.11: Schéma fonctionnel d'un bloqueur d'ordre zéro (**BOZ**)

Sa réponse impulsionnelle est définie comme suit :

$$h_{B_0}(t) = u(t) - u(t - T), \forall 0 \leq t \leq T \quad (1.17)$$

La fonction de transfert continue du bloqueur **BOZ** s'écrit par :

$$B_0(p) = \frac{(1 - e^{-pT})}{p} \quad (1.18)$$

La figure de **MATLAB** suivante montre la réponse impulsionnelle de **BOZ** :

Figure 1.12 : Réponse impulsionnelle d'un BOZ obtenue avec $T = 1(s)$

En effet, l'association **échantillonneur-bloqueur d'ordre zéro** (Figure (1.13)) permet une discrétisation par paliers d'un signal continu (Figure (1.14)).

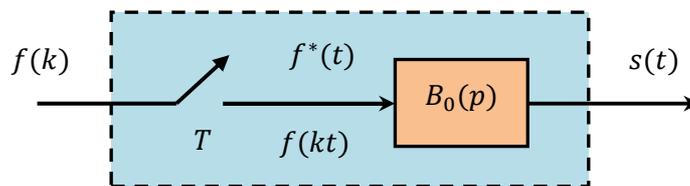


Figure 1.13 : Schéma fonctionnel d'un échantillonneur-bloqueur d'ordre zéro

La figure de **MATLAB** suivante permet de représenter graphiquement les deux signaux sinusoïdaux : continu et échantillonné-bloqué. L'échantillonnage a été effectué avec $T = 0.25 (s)$.

Figure 1.14 : Signal sinusoïdal continu VS Signal sinusoïdal échantillonné- bloqué (échantillonneur-bloqueur d'ordre zéro)

7.2.2 Bloqueur d'ordre un (BOU)

Le Bloqueur d'Ordre Un (**BOU**) permet l'extrapolation entre les instants d'échantillonnage ' kT ' et ' $(k + 1)T$ ' à partir de $f(kT)$ et de $((k + 1)T)$. Il permet donc de reproduire un signal échantillonné. Le bloqueur **BOU** étant représenté par le schéma fonctionnel suivant :

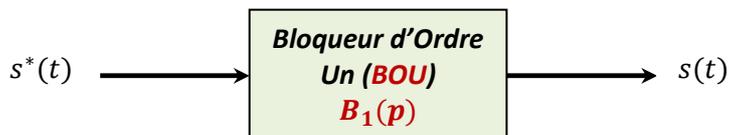


Figure 1.15: Schéma fonctionnel d'un bloqueur d'ordre un (**BOU**)

Sa fonction de transfert continue est donnée par l'équation suivante :

$$B_1(p) = (1 - e^{-Tp})^2 \left(\frac{1+Tp}{Tp^2} \right) \quad (1.19)$$

La réponse impulsionnelle de **BOU** est donnée par la figure de **MATLAB** suivante :

Figure 1.16: Réponse impulsionnelle d'un BOU obtenue avec $T = 1(s)$