Chapitre II :

CINEMATIQUE
DU
POINT MATERIEL

CHAPITRE II : CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

II-1 CINEMATIQUE DU POINT

La majorité des objets étudiés en physique sont en mouvement; allant des particules élémentaires (les électrons, les protons et les neutrons qui constituent les atomes), jusqu'aux galaxies, en passant par les objets usuels et les corps célestes. On peut exprimer fonctionnement de la nature si on arrive à définir le mouvement et à le mesurer.

II-1.1 Définition

La cinématique est l'étude des mouvements des masses, quantité de la matière, indépendamment des causes qui les engendrent.

II-1.2 Point matériel

On appelle point matériel, la matière qui est concentrée en son centre de gravité (o), sans dimension géométrique ou on peut négliger le mouvement de rotation autour de (o).
On sait que le mouvement d'un point est un concept relatif, autrement dit, on ne peut pas dire qu'un corps est "en mouvement" (ou "au repos") sans préciser par rapport à quoi. Donc on doit définir un repère doté d'un chronomètre, pour connaitre la position du point par rapport à ce dernier et l'instant correspondant à cette position. Il s'agit d'un repère d'inertie qu'on s'appelle référentiel.

Selon la nature du mouvement du point, sa position sera localisée par l'un des systèmes: cartésien, polaire, cylindrique ou sphérique.

a) Base cartésienne

Dans R_O, la position de la particule M est donnée par ses trois coordonnées cartésiennes (x,y,z) telles que :

x = abscisse de M ; y = ordonnée de M ; z = côte de M.

$$x = proj_{\vec{ox}}\overrightarrow{OM} ; y = proj_{\vec{oy}}\overrightarrow{OM} ; z = proj_{\vec{oz}}\overrightarrow{OM}$$

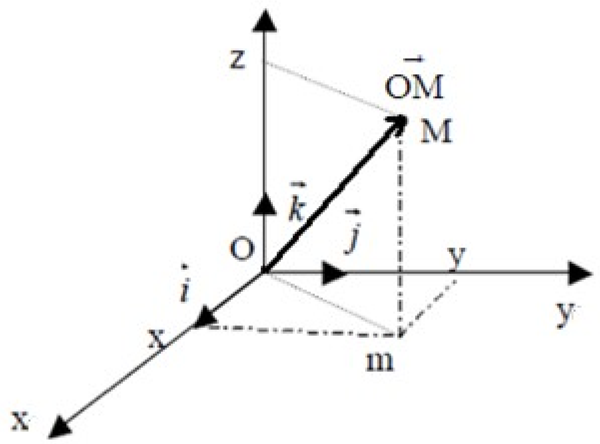


Figure II-1 *Représentation d'un vecteur dans la base cartésienne*

Dans R_O, le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Déplacement élémentaire

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M' très voisin de M) s'écrit:

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\vec{M} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

(Dans R_0, $d\vec{i} = d\vec{j} = d\vec{k} = \vec{0}$)

Remarque : quelque soit la base du système choisi :

Le vecteur vitesse , $\vec{V}$, sera donné par **: $\overrightarrow{dOM}$ / dt**

De même, le vecteur accélération, $\vec{a}$, sera donné par : $d\vec{V}$ / dt

b) Base cylindrique

Si la trajectoire du point M possède une symétrie axiale de révolution, il est impératif d'utiliser les coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) définies par:

$\rho = \left[\overrightarrow{Om}\right]$ (m est la projection de M sur le plan ($x\,O\,y$), $\varphi = angle(Ox\,,Om)$ et z est la projection du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe Oz .

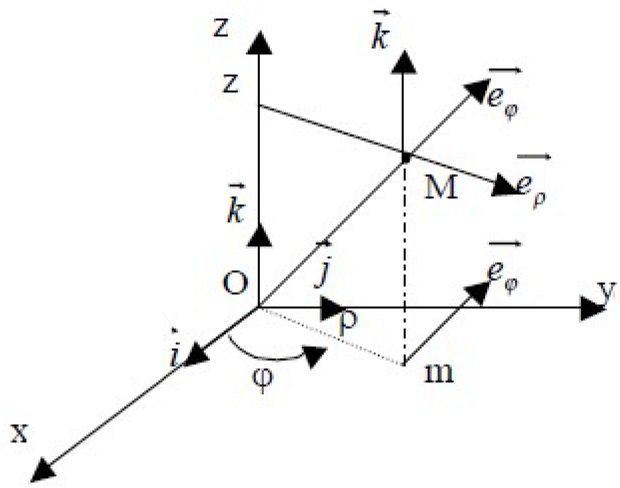
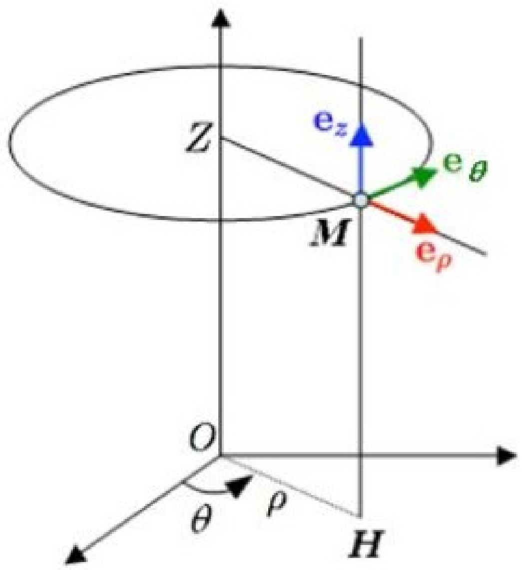


Figure II-2 *Représentation d'un vecteur dans la base cylindrique.*



Remarque : le système de coordonnées cylindriques, (ρ,θ,z), **est une version à trois dimensions** du système de coordonnées polaires (ρ,θ), avec z est la hauteur du point M, c'est àdire que z = C^{ste}, comme montre la figure ci-contre :

La base associée aux coordonnées polaires est :

$$(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta})$$

Donc, le vecteur position dans la base polaire s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\, \overrightarrow{e_\rho}$$

La nouvelle base orthonormée directe

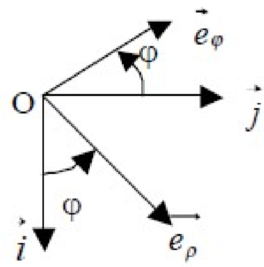
$(\vec{e}_\rho\ , \vec{e}_\varphi\ , \vec{k}\ )$ est associée à ce système de coordonnées cylindriques telle que :

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$$

Avec :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \text{Et} \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_\rho$$



Dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}$), le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$$

Déplacement élémentaire

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M' très voisin de M) est:

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}) = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho + dz\vec{k}$$

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}$$

Correspondance avec les coordonnées cartésiennes

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\theta = \left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z\end{cases}$$

c) Base sphérique

Lorsque on a une symétrie sphérique autour d'un point O, on utilise les coordonnées sphériques (r, θ ,φ) de la particule à étudier telles que :

$$r = \left|\overrightarrow{OM}\right| : \theta = angle(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}); \varphi = angle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$$

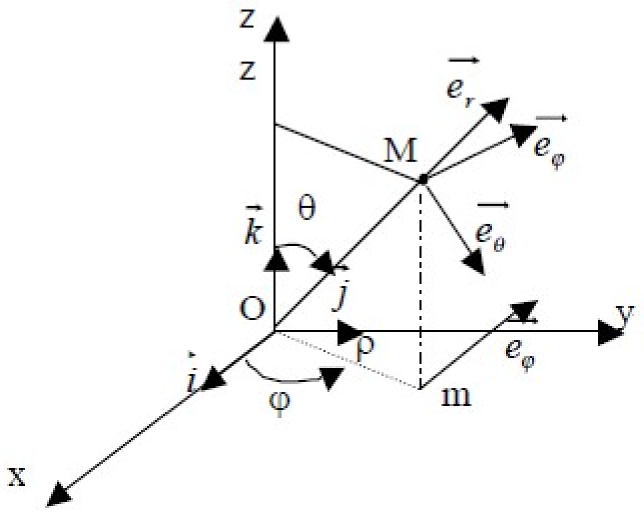


Figure II-3 *Représentation d'un vecteur dans la base sphérique.*

Quand M décrit tout l'espace,

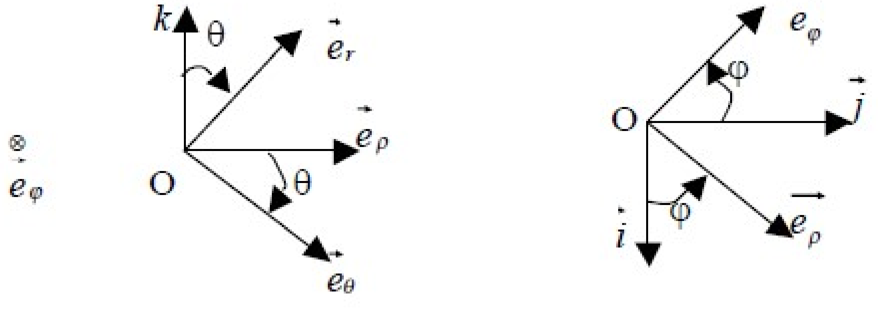
$$0 < r < +\infty; 0 < \varphi < 2\pi; 0 < \theta < \pi$$

Une nouvelle base s'introduit alors : ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$). On exprimera ces vecteurs comme suit :

$$\vec{e}_r = \sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{k} = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{k} = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{k} + \cos\varphi\vec{k}$$



Dans la base sphérique ; ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$) , le vecteur position s'écrit sous la forme: $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.

Correspondance avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x = OH\ cos\varphi = r\ sin\theta\ cos\varphi \\ y = OH\ sin\varphi = r\ sin\theta\ sin\varphi \\ z = r\ cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ tg\theta = \left(\frac{\rho}{z}\right) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ tg\varphi = \left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

II-2 MOUVEMENT RECTILIGNE

Si la trajectoire d'un point matériel est une droite et sa vitesse constante (donc son accélération γ nulle), on dit qu'il est en mouvement rectiligne uniforme.

La trajectoire est une portion de droite. Il est évident alors de repérer le point *M* sur cette droite confondue, par exemple, avec l'axe *Ox* (à une dimesion) des coordonnées cartésiennes. Il n'y a alors qu'une équation horaire $x(t)$ et une seule composante pour les vecteurs vitesses:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$$

Ouˇ le module de la vitesse s'exprime par :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

C'est une équation différentielle qui permet de donner l'information sur le mouvement et sa nature.

- Si la vitesse est constante donc

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v dt = v\int_{t_0}^{t} dt$$

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

$$\Rightarrow x = v(t - t_0) + x_0$$

Il s'agit de l'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme.

- Si la vitesse varie en fonction du temps, elle s'exprime de la façon suivante :

Si l'accélération γ (a) est constante alors *:*

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_0\, dt \Rightarrow v - v_0 = a_0(t - t_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + a_0(t - t_0) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0\, dt + a_0 \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\quad dt$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$$

C'est un mouvement uniformément varié (accéléré ou retardé).

La relation (valable uniquement dans le cas du MRUA) entre la variation de la vitesse et le déplacement est donnée comme suit :

$$v - v_0 = a_0(t - t_0) \Rightarrow (t - t_0) = \frac{v - v_0}{a_0}$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)^2 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2a_0} (v^2 - {v_0}^2)$$

$$\Rightarrow v^2 - {v_0}^2 = 2a_0(x - x_0)$$

II-2.1 Vecteur position

En physique, le vecteur position c'est le vecteur déplacement d'un objet reliant une ancienne position à une nouvelle, autrement dit, la position finale moins(-) la position initiale. Ce vecteur est une grandeur physique vectorielle, qui est une fonction vectorielle du point considéré. Par exemple, le travail d'une force, est égal au produit de la force par le déplacement de son point d'application.

Si l'on note M la position finale du point, le vecteur position (dans une base uni-dimetionnelle) se note $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.

II-2.2 Vecteur vitesse

Dans le cas d'un mouvement rectiligne suivant Ox, la vitesse est définit par $v_x = \frac{dx}{dt}$ ainsi, l'expression de la vitesse en fonction du temps est donnée par : $v_x = a_x \times t + v_{ox}$

A l'aide de cette formule, on peut déterminer la vitesse à n'importe quel moment, connaissant la vitesse initiale v_{0x} et l'accélération a_x (qui sont des constantes).

Le module du vecteur $\vec{v}$: $v = |v_x|$. Si $v_x > 0$ alors $v = v_x$. Et si $v_x < 0$ alors $v = -v_x$.

La représentation de la vitesse v_x en fonction du temps t est une droite, soit croissante (si $a_x > 0$), ou décroissante (si $a_x < 0$) comme montre la figure II.4.

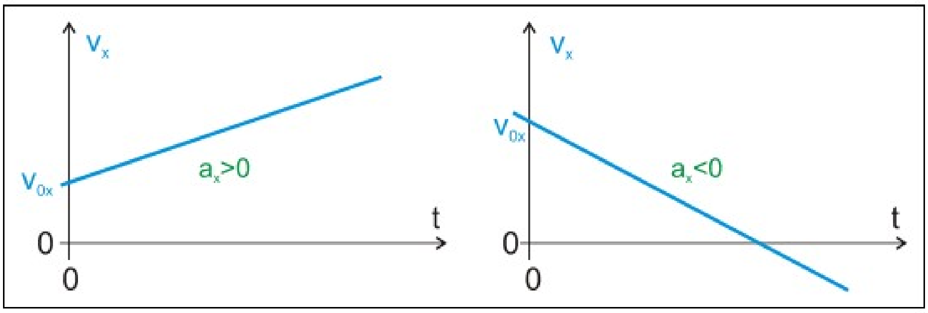
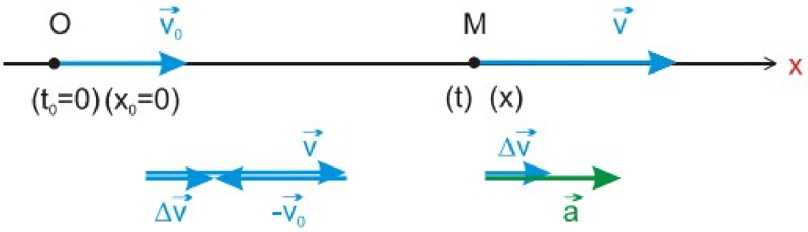


Figure II-4 *Représentation de la vitesse v_x en fonction du temps t.*

II-2.3 Vecteur accélération

A l'instant $t_0 = 0$, le mobile se trouve à l'origine; $x = x_0 = 0$ et $v_x = v_{0x}$ (vitesse initiale). à l'instant $t > 0$, le mobile se trouve au point M d'abscisse x, et la vitesse du mobile est $\vec{v}$. De même que $\vec{v}_0$, le vecteur $\vec{v}$ n'a qu'une seule coordonnée, suivant l'axe Ox, c'est v_x. Si $\vec{v}$ est de même sens que l'axe Ox c.à.d. $v_x > 0$.



Le vecteur vitesse $\vec{v}$ varie, donc, $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ dans l'intervalle de temps $\Delta t = t - t_0$. L'accélération moyenne $\vec{a}_m$ du mobile M s'exprime par :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Comme l'accélération instantanée $\vec{a}$ est constante, elle est égale à l'accélération moyenne $\vec{a}_m$. Donc :

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

L'accélération $\vec{a}$ a la même direction que $\Delta\vec{v}$: elle n'a donc qu'une seule coordonnée suivant Ox, c'est $\vec{a}_x$. Elle est égale à la coordonnée suivant Ox de $\Delta\vec{v}$, notée $(\Delta\vec{v})_x$, divisée par Δt. on voit que $(\Delta\vec{v})_x = v_x - v_{0x} = \Delta v_x$;

$$\vec{a} = \frac{(\Delta\vec{v})_x}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_x} - \overrightarrow{v_{0x}}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{v_x}}{\Delta t}$$

Si $\Delta\vec{v}$ est de même sens que l'axe Ox, alors, $\Delta v_x > 0$ et $a_x > 0$

Le vecteur accélération est défini comme suit : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

II-2.4 Cas particulier

a) Mouvement rectiligne uniforme, MRU

MRU, C'est un mouvement en ligne droite avec vitesse constante, dont le vecteur vitesse est constant en grandeur, direction et sens.

$$v = \frac{dx}{dt}, v(m.s^{-1}), dx(m), dt(s)$$

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme (M.C.U.) :

- C´est un mouvement à vitesse constante et dont la trajectoire est circulaire.
- C´est, approximativement, celui de la plupart des planètes autour du soleil. Leurs trajectoires étant, en réalité, légèrement elliptiques.
- C'est aussi le mouvement de tous les points d'un solide tournant "régulièrement" autour d'un axe fixe. (Manège, roue d'un véhicule...)

b) Mouvement rectiligne uniformément varié, MRUV

Le mouvement rectiligne uniformément varié, est un mouvement dont la trajectoire est une droite. Afin de repérer la position d'un mobile sur cette trajectoire, nous utilisons un repère avec un seul axe (Ox) de même direction que celle de la trajectoire. Ceci constitue le repère le plus pratique car le vecteur position n'aura qu'une seule coordonnée c'est l'abscisse x du mobile. Il suffit de munir la trajectoire d'une origine O et d'une orientation, pour laquelle on choisira si possible celle du mouvement.

A l'instant initial, le mobile est en train de se déplacer avec la vitesse initiale, tangentielle à la trajectoire, donc de même direction que l'axe Ox. v_0 n'a donc qu'une seule coordonnée, suivant Ox, c'est v_{0x}. Si v_0 est de même sens que l'axe Ox, $v_{0x} > 0$.
Les conditions initiales sont donc : Si à $t = t_0 = 0$, $x = x_0$ et $v_{x0} = 0$.

Alors : $\begin{cases} v_x = a_x \times t + v_{ox} \\ x = \frac{1}{2} a t^2 + x_0 \end{cases}$

II-3 MOUVEMENT CURVILIGNE

Le mouvement d'un objet est dit curviligne si sa trajectoire est une courbe.

II-3.1 Abscisse curviligne

Si la trajectoire d'un mobile M est connue, on peut l'orienter et choisir un point origine O.
La valeur algébrique de l'arc M_1M_2 est l'abscisse curviligne s du point M.

* s > 0 si en allant de O à M on se déplace dans le sens de l'orientation.
* s < 0 si en allant de O à M on se déplace dans le sens inverse de l'orientation.

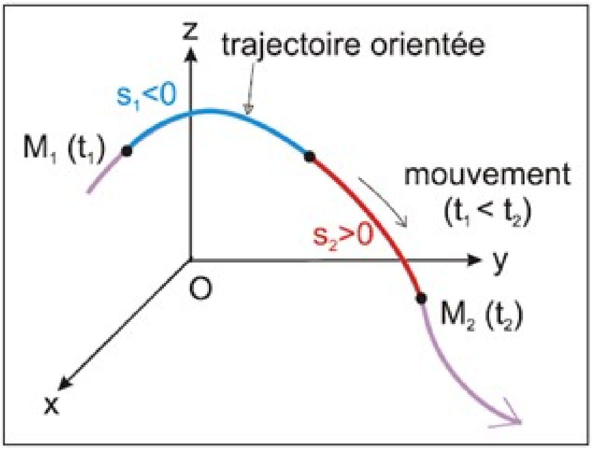


Figure II-5 *Trajectoire d'un mobile M en mode curviligne*

Le bon sens impose qu'on oriente la trajectoire dans le sens du mouvement. Le déplacement (positif) d'un mobile se trouvant initialement en M_1 (abscisse curviligne S_1) à l'instant t_1 et arrivant en M_2 (abscisse curviligne S_2) à l'instant t_2, est évidemment :

$$|\Delta s| = |s_2 - s_1|$$

ΔS est indépendant de l'origine O

II-3.2 Vecteur position

Soit M le mobile dans le repère $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La position de M à chaque instant est repérée par les coordonnées (x, y, z) du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

On sait que: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et le module de ce vecteur : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$.

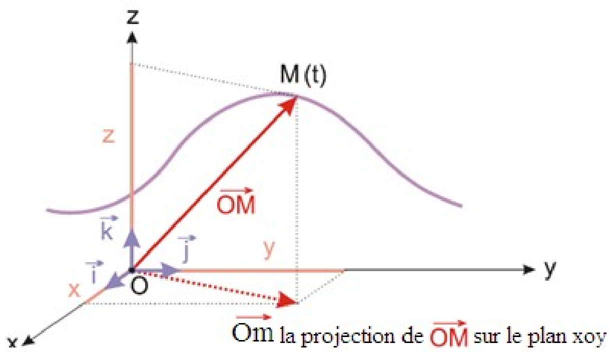


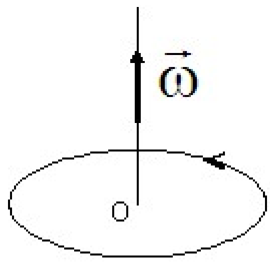
Figure II-5 *Vecteur position à trois dimensions*

Si le repère est orthonormé, (x, y, z) sont appelées coordonnées cartésiennes du point M. S'il y a mouvement, ces coordonnées varient en fonction du temps. Les fonctions x = f(t), y = g(t) et z = h(t) sont nommées équations horaires du mouvement. Le mouvement d'un point M est parfaitement connu si on connaît ces équations horaires.

II-3.3 Vecteur vitesse angulaire

S'il s'agit d'un mouvement circulaire, le mobile est animé d'une vitesse angulaire de module constant. , appelé "période de révolution", et les abscisses curvilignes donnent la même position du mobile sur le cercle, car c'est un vecteur constant et le produit vectoriel est toujours dirigé vers le centre du cercle.

La vitesse angulaire est définie par : $\omega(t) = \frac{d\phi}{dt}$ (ϕ l'angle de rotation) elle peut, comme la vitesse linéaire $\vec{v}$, être représentée par une fonction vectorielle du temp



Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ a :

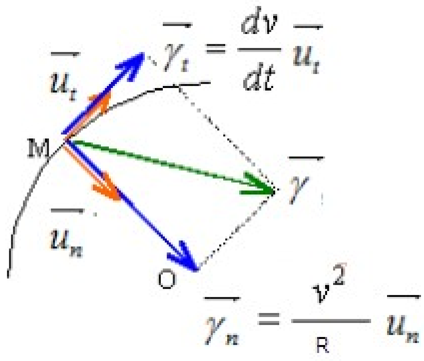
- une direction perpendiculaire au plan du mouvement,
- un sens tel que le déplacement du mobile s'effectue dans le sens direc
- un module $\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{V}{R}$

$\vec{\omega}$ est un vecteur axial car il est porté par un axe fixe. On l'appelle souvent " vecteur rotation". Il est pratique, en général, de prendre un système d'axes orthonormés tel que le plan du mouvement soit parallèle au plan xOy. Dans ce cas, l'axe de rotation coïncide avec l'axe $\overrightarrow{Oz}$ alors on aura : $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

II-3.4 Vecteur accélération

Dans le cas d'un mouvement curviligne, l'accélération c'est la résultante de deux accélérations ; une composante suivant un axe tangentiel γ_t (a_t) au mouvement et une composante suivant un axe normale γ_n. Le vecteur accélération normale, $\overrightarrow{\gamma_n}$ (a_n) est orienté vers le centre de courbure. Le vecteur accélération s'écrit dans la base de Frenet (ou base intrinsèque), $(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_n})$

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma_t} + \vec{\gamma_n} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + \frac{v^2}{R}\vec{u_n}$$



Remarques: Si la vitesse de la particule est constante on aura une composante nulle de l'accélération tangentielle (a_t ou γ_t), on peut déterminer le rayon de courbure, R, en utilisant l'expression suivante : $\gamma_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{\gamma_n}$

APPLICATION

Etude de mouvement en coordonnées cylindrique :

Dans la base cylindrique, le vecteur position s'écrit :

$$\vec{r} = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{e_z}$$

Le vecteur vitesse est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\,\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\,\vec{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\,\vec{e_z}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z}$$

On sait que :

$$\frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta} = \vec{e_\theta} \Longrightarrow \frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}, \qquad \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_\rho} \Longrightarrow \frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e_\rho}$$

Donc le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\,\vec{e_\theta} + \ddot{z}\,\vec{e_z}$$

II-4. MOUVEMENT RELATIF

II-4.1 Définition

Le mouvement d'un point matériel peut être réparti en deux mouvements distincts

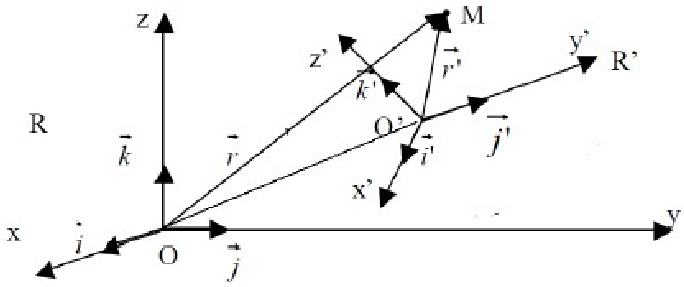
- Un mouvement par rapport à un repère fixe qu'on nommera repère absolu

- Un mouvement par rapport à un repère mobile qu'on nommera repère relatif.

Toutes les grandeurs (position, vitesses et accélération) seront identifiées par rapport au repère approprié.

II-4.2 Changement de référentiel

Soit un point matériel M en mouvement par rapport à un repère R'(o',x',y',z') mobile, lui même en mouvement par à un repère fixe R (O,x,y,z).



Pour étudier un mouvement, on utilise les définitions suivantes : le trièdre Oxyz (repère R) est le repère absolu ou référentiel absolu ; le trièdre O'x'y'z' (repère R') est le repère relatif ou référentiel relatif ; le mouvement du point M par rapport à « R » s'appelle mouvement absolu ; le mouvement du point M par rapport à « R' » s'appelle mouvement relatif ; le mouvement de « R' » par rapport à « R » s'appelle mouvement d'entraînement.

II-4.3 Relation position-position

La position de M dans R est la position absolue et sa position dans R' c'est sa position relative : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$

Alors : $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

II-4.4 Relation Vitesse-Vitesse

La vitesse absolue est la vitesse de M par rapport à R

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Cette vitesse peut être calculée d'une autre façon :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

On pose :

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} \qquad \vec{V}_r = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

D'où la relation de chasles ;

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

V_r : vitesse relative c'est la vitesse du mobile M par rapport au repère mobile R'

V_e : vitesse d'entrainement c'est la vitesse du repère R' par rapport au repère R.

Deux cas de mouvement de R' peuvent être, en translation et en rotation, la vitesse absolue et relative gardent la même expression par contre la vitesse d'entrainement se met différemment.

II-4.5 Relation Accélération- Accélération

L'accélération absolue c'est l'accélération du point M dans le repère R :

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2} + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{z}\,'}{dt}\right)$$
$$+\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}\,' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}\,' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}\,'$$

L'accélération absolue est la somme de trois accélérations (γ_a ou a_a):

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \qquad \overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c}$$

avec :

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}\,' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}\,' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}\,'$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{z}\,'}{dt}\right)$$