CHAPITRE III

SOMMAIRE

Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

CHAPITRE III DYNAMIQUE D'UN POINT MATERIEL

III-1 DYNAMIQUE D'UN POINT MATERIEL

III-1.1 Notion de base

La dynamique a pour but d'expliquer le mouvement des corps, en reliant l'accélération aux forces subies.

III-1.2 Première loi de Newton-Principe d'inertie

Enoncé du principe d'inertie

Dans un référentiel d'inertie aussi appelé référentiel galiléen, un système est dit isolé ou au repos s'il n'est soumis à aucune force.

L'énoncé du principe : Tout corps reste dans l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme dans lequel il se trouve, et ne le contraignent à changer d'état.

III-2 PRINCIPE D'INERTIE POUR PARTICULE LIBRE

On exprime la force qui s'applique sur un point matériel de masse *m* dans un référentiel galiléen, par la dérivée du vecteur quantité de mouvement par rapport au temps comme suit:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}$$

La quantité de mouvement $\vec{p}$ est le produit de la masse par la vitesse. Si la masse est constante, la formulation du principe fondamental devient :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$
$$donc \vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{a}$ étant l'accélération de l'objet.

Référentiel galiléen:

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la relation fondamentale de la dynamique est vérifiée. Le temps étant absolu, on définit une seule chronologie pour tous les référentiels galiléens. Actuellement la référence est l'horloge atomique. Elle utilise des atomes de césium qui émettent un rayonnement électromagnétique de période T. La seconde est alors définie comme étant

s = 9 192 631 770T

Masse et centre de masse:

Soit un point O quelconque, et N points M_i de masse individuelle m_i. On définit le centre de masse Ω par la relation :

$$m_T \vec{O\Omega} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{OM}_i$$

La masse totale est :

$$m_T = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

La définition de m_T est indépendante du point de référence (ici : O) pour la raison suivante (A est un autre point) et en utilisant la définition de la masse totale:

$$m_T \vec{O\Omega} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{OM}_i \Rightarrow m_T\left(\vec{OA} + \vec{A\Omega}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\vec{OA} + \vec{AM}_i\right) \Rightarrow m_T \vec{A\Omega} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{AM}_i$$

Cette définition se généralise à un solide quelconque en remplaçant les sommes par des intégrales et les masses individuelles pas la densité locale.

III-3 LOI DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

III-3.1 Quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement, $\vec{p}$, d´un corps en translation est égale au produit de la masse, m, par le vecteur vitesse, $\vec{v}$, du corps :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

III-3.2 Principe de conservation de la quantité de mouvement

Un système est dit isolé quand il n'est soumis à aucune force extérieure. On dit qu'un système est pseudo-isolé quand la somme des forces extérieures, auxquelles il est soumis, est nulle, et quand ces forces ont le même point d'application. Donc, le mouvement qui en résulte est le même dans les deux cas, plus précisément

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

D'où, la quantité de mouvement totale est conservée.

III-4 DEUXIEME LOI DE NEWTON

III-4.1 Notion de force

La force nette qui s'exerce sur un corps est égale au produit de la masse de ce corps par son accélération ».

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

L'énoncé le plus général est introduit si on définit la quantité de mouvement du corps **p** par :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

et l'énoncé de la 2$^{\text{ème}}$ loi est alors :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

L'énoncé un retombe sur le deuxième si la masse du corps est constante (en dérivant le terme « $m\vec{v}$ » par rapport au temps).

Les projections sur les 3 axes d'un repère (ici cartésien) attaché au référentiel inertiel de la loi $\vec{F} = m\vec{a}$

$$F_x = ma_x = \frac{dv_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_y = ma_y = \frac{dv_y}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$F_z = ma_z = \frac{dv_z}{dt} = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

III-4.2 Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental permet d'écrire :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\vec{a}$$

Le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ et la 2ème loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ diffèrent donc par le terme $\frac{dm}{dt}\vec{V}$

III-5 TROISIEME LOI DE NEWTON : '*Principe de l'action et de la réaction'*

Soient deux points matériels A et B. Le principe de l'action et de la réaction s'énonce ainsi :

« La force appliquée par A sur B est l'opposée de celle appliquée par B sur A »

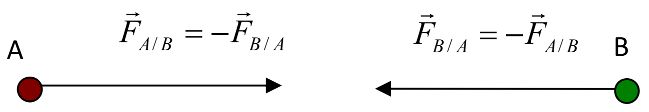

Figure III-1 : *Principe de l'action et de la réaction*

Supposons qu'il n'existe pas de forces extérieures, Du point de vue quantité de mouvement totale, on a :

$$\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \vec{F}_{B/A} + \vec{F}_{A/B} = \vec{0}$$

La quantité de mouvement d'un système isolé reste constante

On arrive à résumer les trois lois de newton comme suit :

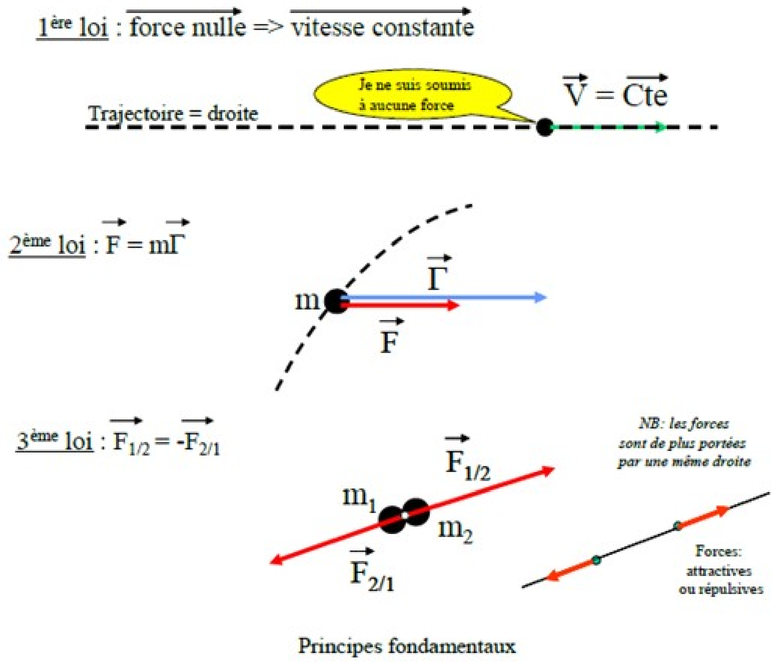

Figure III-2 : *Lois de Newton*

III-6 UTILISATION DE LA TROISIEME LOI DE NEWTON

III-6.1 Gravitation universelle

On considère deux corps ponctuels A et B, ayant les masses m_A et m_B, séparés par une distance d, ces corps exerce l'un sur l'autre par des forces d'interactions gravitationnelles attractives $\overrightarrow{F_{A/B}}$ et $\overrightarrow{F_{B/A}}$, on sait que les deux forces ayant:

- même droite d'action (AB)
- des sens opposés
- même intensité (ou valeur) : $F_{A/B} = F_{B/A} = G\,\frac{m_A.m_B}{d^2}$

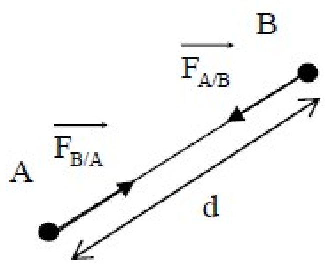

Figure III-3 : *Gravitation universelle*

G : constante de gravitation universelle

Sachant que dans le système des unités international (SI) **:** m_A et m_B sont en kilogrammes (kg)**,** d en mètres (m) $G = 6.67.\ 10^{-11}\ m^3.\ kg^{-1}.\ s^{-2}$

N.B: cette loi est aussi valable pour des corps volumineux présentant une répartition sphérique de masse, (le cas des planètes et des étoiles, la distance d est celle qui sépare leurs centres).

Gravitation à la surface d'un astre

On exprime la force de gravitation qui retient les objets (m) à la surface d'un astre sphérique (M), par la loi de Newton :

$$f = G\frac{M.m}{R^2}$$

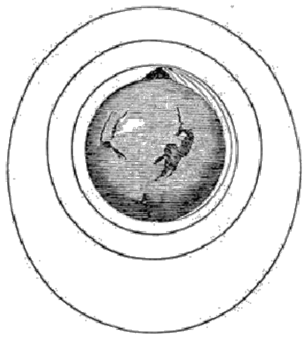

Figure III-4 : *Gravitation à la surface d'un astre*

Si l'on applique cette force sur un objet de masse unité à la surface de ce corps, on obtient la valeur de la gravité appelée *pesanteur* sur Terre. L'astre est caractérisé par deux paramètres, la masse du corps M et son rayon R apparaissent dans l'expression de la loi de Newton.

La force de gravitation s'exerce toujours en s'éloignant du corps. L'accélération centrifuge due à la vitesse de rotation de l'objet autour du corps compense la gravité.

L'expression de la vitesse de satellisation à une distance d du centre est donnée par la formule :

$$V = \sqrt{\frac{GM}{d}}$$

On peut l'obtenir facilement en égalant l'accélération centrifuge due à la rotation, à la pesanteur :

$$f = G\frac{Mm}{d^2}, f = ma, \frac{V^2}{d} = \frac{G.M}{d^2}\ alors \quad V = \sqrt{\frac{GM}{d}}\ avec, d = R$$

La valeur de la gravité ***g*** à la surface de la Terre est bien connue, facile à retrouver connaissant son diamètre et sa masse. Il en est de même de la plupart des objets du système solaire. Ces calculs peuvent faire l'objet de nombreux exercices qui présentent un intérêt pratique pour comprendre les conditions qui règnent à la surface des astres.

III-6.2 Forces de contact

Le vecteur force, $\vec{F}$, est défini par sa direction, son sens et sa valeur exprimée en newtons (N). Une force peut être localisée ou répartie. (Constituée de plusieurs forces qui s'exercent sur tous les points du système SI). Dans ce dernier cas, on considère la résultante de ces diverses forces appliquées au centre d'inertie du système

a) Réaction

On considère un corps placé sur un support solide, il existe une force qu'on nome force de réaction du support, R ou N, qui s'y oppose, elle s'applique sur ce corps à la surface de contact, son vecteur est toujours orthogonal à cette surface.

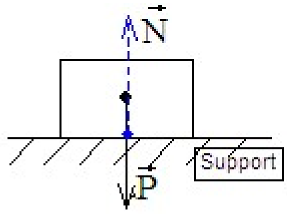

Figure III-5 : *Principe de la réaction*

b) Frottement solide

L'origine de ces forces est à l'échelle moléculaire : lorsque la distance entre 2 atomes diminuent, ils s'attirent puis finissent par se repousser pour de très petites distances. Les forces de frottement résultent de l'interaction de ce nombre immense d'atomes sur la surface de contact entre deux objets. La paramétrisation de la force nette est empirique et dépend de la nature des solides en contact, de la qualité de la surface, etc…

Dans la figure (III-6), on tire sur ce bloc avec une force $\vec{T}$. $\vec{N}$ est la force de réaction (dû à la répulsion à l'échelle moléculaire) et est perpendiculaire à la surface. $\vec{F}$ est la composante tangentielle est dans le plan de la surface de contact.

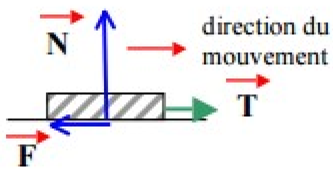

Figure III-6 : *Forces agissants sur un corps*

La force $\vec{F}$ est opposée à la direction du mouvement ainsi à la direction de la force $\vec{N}$ qui veut mettre le corps en mouvement donc elle freine le corps. Si le bloc ne bouge pas alors T+F=0Si le corps en interaction avec le support *ne glisse pas* sur ce dernier, on parle de **frottement statique, F_s,** et on sait que :

$$F_s = \mu_S N$$

avec μ_S un coefficient de frottement statique qui dépend de la nature des matériaux en contact et de leur état de surface. L'inégalité ci dessus devient égalité lorsque les deux surfaces commencent juste à glisser l'une sur l'autre, et la force tangentielle atteint alors son maximum. S'il y a mouvement et les surfaces glissent l'une sur l'autre on s'aperçoit que le frottement devient généralement plus faible et on introduit un coefficient de frottement cinétique, **μ_c,** et la force de **frottement cinétique**, **F_c**, peut être exprimée comme suit :

$$F_c = \mu_C N$$

c) Frottement visqueux

On considère un solide en mouvement dans un fluide, on a plusieurs régimes en fonction de la grandeur de la vitesse, v, par rapport au fluide

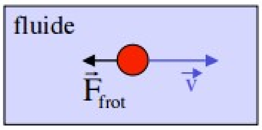

Figure III-7 : *Frottement visqueux*

Pour les faibles vitesses (< 5 m/s dans l'air) en régime laminaire:

k = coefficient caractéristique de la géométrie du solide

η = coefficient de viscosité du fluide

La force de frottement est définie par :

$$\vec{F} = -k\eta\vec{v}$$

avec $k = 6\pi R$ Pour une boule de rayon R.

d) Frottement de tension

Par définition, la force qui s'exerce sur un système par un fil est la force de tension $\vec{T}$. Elle est caractérisée par:

•Une origine : point de contact (o) du système avec le fil

• Une direction : le fil

• Un sens : du système vers le fil

• Une norme : T

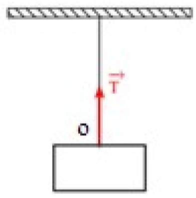

Figure III-9 : *Force de tension*

III-7 MOMENT CINETIQUE

On définit le moment cinétique au point O d'un point matériel M de masse m, animé d'une vitesse par l'expression suivante :

$$\vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

N.B : le moment cinétique dépend du référentiel choisi ainsi que du point O

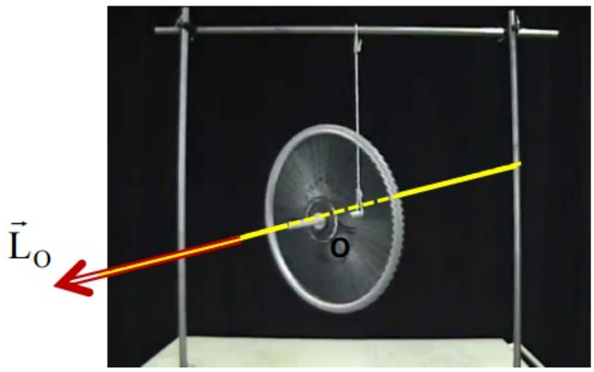

Figure III-10 *Moment cinétique*

On considère que la trajectoire du point matériel est contenue dans un plan (plan de la roue). Le moment cinétique est normal à ce plan (propriété du produit vectoriel).

III-7.1 Moment d'une force en un point de l'espace

Soit une force $\vec{F}$ agissant en un point M quelconque de l'espace. Le moment de la force au point A est :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

On constate que le moment de la force est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$.

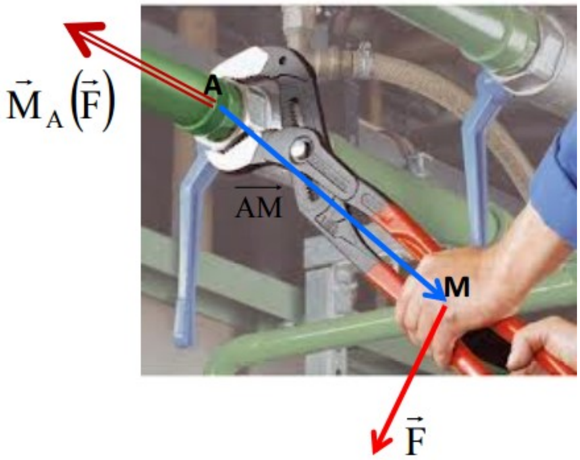

Figure III-2 *Moment d'une force en un point*

On sait que : $\left\|\vec{M}_A(\vec{F})\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \left\|\vec{F}\right\| \cdot \sin(\overrightarrow{AM}, \vec{F})$

Donc: le moment est maximal si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$ sont orthogonaux, ainsi, il est d'autant plus grand que la distance AM est importante, c'est-à-dire que le bras de levier est grand…

III-7.2 Loi du moment cinétique

Soit un point fixe **O**, dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un mobile ponctuel par rapport à un point fixe **O** est égale au moment en **O** de la résultante des forces appliquées au mobile :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F})$$

Et lorsque le référentiel n'est pas galiléen,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{f}_{inertie})$$

III-8 FORCE D'INERTIE

La force d'inertie s'appelle aussi inertielle, ou force fictive, ou pseudo-force est une force apparente agissante sur les masses lorsqu'elles sont observées à partir d'un référentiel non inertiel, ou depuis un point de vue en mouvement accéléré de translation ou de rotation.

Soient (R) un référentiel galiléen centré en 0, (R') un référentiel non galiléen centré en A, dont la rotation (instantanée) autour de (R) est donnée par le vecteur $\vec{\Omega}_{(R'/R)}$, et un point M mobile de masse *m* subissant des forces $\vec{F}$. Soit $v_r = \vec{v}(M)_{(R')}$ la vitesse relative de M dans (R').

D'après la loi de composition des mouvements, en notant $\vec{a}_a$ l'accélération absolue dans (R), $\vec{a}_r$ l'accélération relative dans (R'), $\vec{a}_e$ l'accélération d'entraînement et enfin $\vec{a}_c$ l'accélération de Coriolis, on a

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Aussi, d'après le principe fondamental de la dynamique, on a : $m\vec{a}_a = \vec{F} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c)$

D'où, dans le référentiel (R') on a: $m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$

En définissant les **forces d'inertie** $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ et $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$, donc on peut écrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel (R') non galiléen :

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

La force $\vec{F}_{ie}$ est appelée **force d'inertie d'entrainement**, elle s'exprime sous la forme suivante:

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_{ie} = -m(\vec{a}_a - \vec{a}_r - \vec{a}_c)$$

La force $\vec{F}_{ic}$ est appelée force d'inertie de Coriolis.