Chapitre I:

RAPPELS MATHEMATIQUES

CHAPITRE I : RAPPELS MATHEMATIQUES

I-1 NOTION DE GRANDEURS PHYSIQUES

I-1.1 Définition

I-1.2 Expression numérique d'une grandeur physique

I-1.3 Système d'unités

I-1.4 Unités composées

I-2. ÉQUATIONS AUX DIMENSIONS

1-2.1 Présentation

1-2.2 Calcul dimensionnel

1-2.3 Propriétés

I-3 NOTION DE VECTEURS

I-3.1 Généralités sur les calculs scalaires et vectoriels

a) Définition

- **Coordonnées**
- **Calcul à partir des coordonnées de deux points**
- **Projection d'un vecteur dans un plan**

b) Opérations sur les vecteurs

- **Somme des vecteurs**
- **Produit scalaire**
- **Produit vectoriel**
- **Produit mixte**

INTRODUCTION

- On sait que la physique est une science qui peut décrire de façon à la fois conceptuelle et quantitative les éléments de la matière et leurs interactions.
- Le vrai physicien c'est celui qui part d'observations et développe des théories en utilisant l'outil des mathématiques pour assumer l'évolution de systèmes.
- La physique est le domaine des résultats mesurables et reproductibles par expérience. Cette méthode permet de confirmer ou d'infirmer les hypothèses fondées sur une théorie donnée.
- La branche responsable en physique qui étudie le mouvement des systèmes matériels et leurs déformations, en relation avec les forces qui provoquent ou modifient ce mouvement, c'est **la mécanique**.

Objectif de ce cours :

L'objectif de ce module est d'enrichir les connaissances des étudiants de première année pour faire une base dans le domaine de la physique générale et la mécanique du point en précision.

I-1 NOTIONS DE GRANDEURS PHYSIQUES

I.1.1 Définition

Si on peut exprimer quantitativement la propriété d'un corps ou d'une matière d'un phénomène sous forme d'un nombre et d'une référence (unité), alors cette propriété est appelée **grandeur physique**. La mesure d'une grandeur physique X peut donc toujours s'écrire sous la forme :

$$X = x \text{ Unité}$$

Avec :
x : un réel,
Unité: l'unité choisie pour évaluer la grandeur.

La valeur d'une grandeur physique est exprimée sous la forme du produit d'un nombre par une unité. L'unité n'est qu'un exemple particulier de la grandeur concernée, utilisé comme référence.

I -1.2 Expression numérique d'une grandeur physique

Pour donner l'expression numérique d'une grandeur physique, on doit faire attention aux règles suivantes.

Premièrement: Préciser l'unité d'une grandeur physique.

Deuxièment: Le résultat d'un calcul numérique doit être en accord avec la précision des données utilisées pour effectuer ce calcul, il faut respecter les règles sur les chiffres significatifs.

Dans le cas des multiplications ou de divisions des grandeurs : le résultat est donné avec le même nombre de chiffres significatifs que celui de la donnée la moins précise, en utilisant la notation scientifique.
Dans le cas d'additions ou de soustractions : le résultat est donné avec le même nombre de décimales (chiffres après la virgule) que celui de la donnée la moins précise (à condition de garder la même puissance de 10).

Ce n'est qu'en 1960 qu'est né officiellement un système international définissant (S.I) les 7 unités de base permettant de décrire l'ensemble des sciences physiques (Tableau I-1). Depuis là la plupart des constantes physiques universelles sont données dans les unités du système international.

Grandeur physique	Lettre choisie	Symbole de l'unité
Longueur	l	m (mètre)
Masse	m	kg (kilogramme)
Temps	t	s (seconde)
Intensité de courant électrique	i	A (Ampère)
Température	T	K (kelvin)
Intensité lumineuse	j	cd (candela)
Quantité de matière	n	mol (mole)

Tableau I-1 *Les unités du système international.*

I-1.3 Unités composées

Les unités dérivées sont nombreuses et viennent compléter les unités de base. Elles peuvent avoir des noms spéciaux mais peuvent toujours être exprimées à partir des unités de base. La liste suivante (tableau I-2) n'est pas exhaustive et présente principalement les unités **(à connaître)** que nous seront amenées à utiliser dans ce cours.

Grandeur :	relation de définition	Expression en unités SI
Longueur	L	*m*
Surface	$S = L^2$	m^2
Volume	$V = L^3$	m^3
Temps	T	*s*
Vitesse	$v = \frac{L}{T}$	$m.s^{-1}$
Accélération	$a = \frac{v}{T}$	$m.s^{-2}$
Fréquence	$f = \frac{1}{T}$	s^{-1}
Pulsation	$\omega = \frac{angle}{T}$	$rad.s^{-1}$
Masse	M	*Kg*
Masse volumique	$\rho = \frac{M}{v}$	$kg.m^{-3}$
Force	$F = Ma$	$kg.m.s^{-2}$
Travail, énergie	$E, Q, W = FL$	$kg.m^2.s^{-2}$
Puissance	$P = \frac{W}{T}$	$kg.m^2.s^{-3}$
Pression	$P = \frac{F}{S}$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
Intensité de courant	I	*A*
Charge	$q = IT$	*A.S*
Ddp, fem	$U = \frac{P}{I}$	$kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}$
Résistance	$R = \frac{U}{I}$	$kg.m^2.s^{-3}.A^{-2}$
Conductance	$G = \frac{1}{R}$	$kg.m^{-2}.s^3.A^2$
Capacité	$C = \frac{q}{U}$	$kg.m^{-2}.s^4.A^2$

Tableau I-2 : *Quelques unités dérivées du système international*

I-2. ÉQUATIONS AUX DIMENSIONS

La dimension d'une grandeur correspond à ce que représente cette grandeur, elle renseigne sur sa nature. C'est une caractéristique plus générale que son unité dont le choix est adapté à l'échelle du phénomène étudié. Bien que les deux soient liées, il est important de faire la distinction entre la dimension d'une grandeur physique et son unité :

Exemple **:** une distance a pour dimension une longueur mais peut s'exprimer dans différentes unités : m, cm, pouce, mille, parsec (échelle astronomique), angtröm (échelle atomique). Deux grandeurs de même dimension peuvent être données dans des unités différentes. Cependant le calcul de l'unité d'une grandeur permet de retrouver sa dimension (et inversement).

1-2.1 Présentation de l'équation aux dimensions

Par convention, on donnera la dimension d'une grandeur en fonction de sept dimensions fondamentales (il y a autant de grandeurs fondamentales que d'unités de base). La dimension d'une grandeur s'exprime sous la forme :

$$[G] = \dim G = M^x L^y T^z \theta^a I^b N^c J^d$$

avec des nombres réels comme exposant (positifs ou négatifs).

La fore par exemple : F = ma, $[F] = MLT^{-2}$

1-2.2 Calcul dimensionnel

Le calcul dimensionnel peut permettre de :

- retrouver la dimension et l'unité d'une grandeur si l'on connait une équation qui relie cette grandeur à d'autres de dimension connue.
- prédire la forme d'une loi physique afin de trouver la solution à certains problèmes sans avoir à résoudre d'équation **;** pour plusieurs phénomènes physiques étudiés exprimer une grandeur caractéristique du phénomène (notée G) en fonction des paramètres influençant le phénomène (notés Pi) de la forme suivante :

$$G = k \times p_1^a \times p_2^b \times ....$$

Avec: a,b,… des constantes sans dimension que l'on peut déterminer à l'aide de calcul dimensionnel, K une constante sans dimension qui ne peut pas être déterminée à l'aide de calcul dimensionnel.

Pour certaines grandeurs il faut absolument connaître quelques équations afin de retrouver rapidement leur dimension et leur unité, par exemple :

Pour retrouver la dimension et l'unité d'une force : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ou $\vec{P} = m\vec{g}$

Pour retrouver la dimension et l'unité d'une énergie : $E = mc^2$ ou $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Pour retrouver la dimension et l'unité d'une pression : $P = \frac{F}{S}$

1-2.3 Propriétés

Une équation est homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension. Une expression qui est non homogène, est nécessairement fausse, ainsi pour manipuler les équations aux dimensions, il faut savoir que:

- On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension.
- Dans une fonction trigonométrique (sinus, cosinus, tangente), le nombre est forcément sans dimension.
- La dimension du produit de deux grandeurs est égale au produit de leurs dimensions.
- La dimension de A^n est la dimension de A à la puissance n.

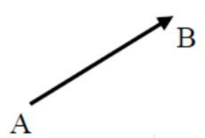
I-3 NOTION DE VECTEURS

A la fin du 19ème siècle, Le calcul vectoriel a été développé car il est largement utilisé par les physiciens. Déjà au début de l'étude de la mécanique, son utilisation s'impose, lorsqu'on désire décrire un mouvement dans l'espace à trois dimensions.

I-3.1 Généralités sur les calculs scalaires et vectoriels

Un scalaire est un nombre positif, négatif ou nul, utilisé pour représenter des quantités diverses : temps, température, masse, énergie, etc…

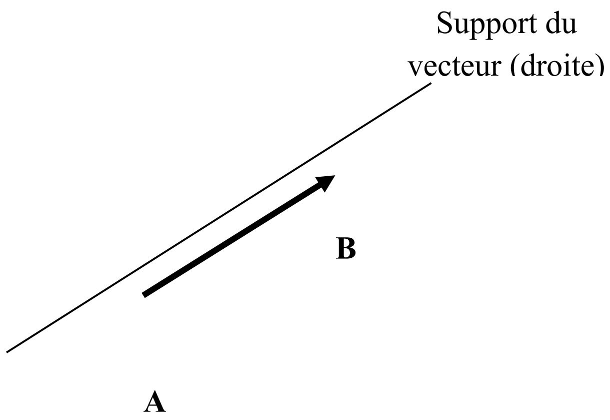
Un vecteur est caractérisé par quatre caractéristiques à savoir l'origine A, le support de la droite (AB), le sens de A vers B et le module. On le représente par un segment orienté. Il est défini par une direction, un sens sur cette direction et une longueur. Cette longueur n'est autre que la norme du vecteur.



$\overrightarrow{AB}$

Deux vecteurs liés d'origine différentes, sont dits égaux lorsqu'ils ont la même direction, même sens et même module : ils représentent le même vecteurs glissant. Deux vecteurs liés, d'origines quelconques, sont dits opposés lorsqu'ils ont la même direction, même grandeur et des sens opposés : ils sont dits directement opposés lorsqu'ils sont portés par la même droite.

a) Définition

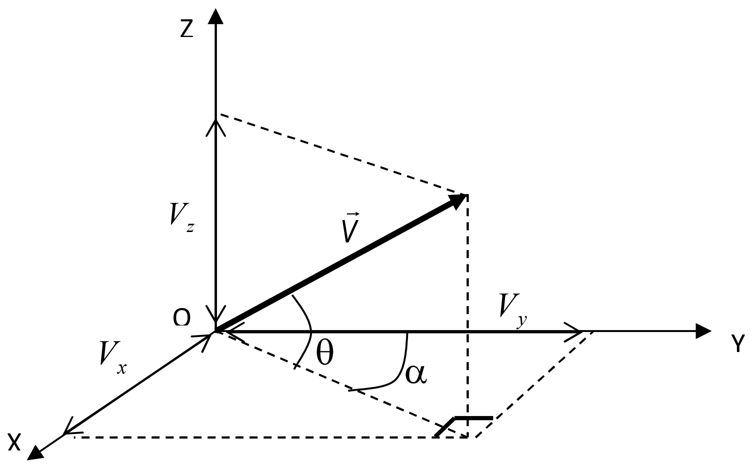


Un vecteur est défini par :

- une direction	droite
- une origine	point A
- un sens	de A vers B
- une norme (ou intensité)	$\|\overrightarrow{AB}\|=d(A,B)$

➢ **Coordonnées**

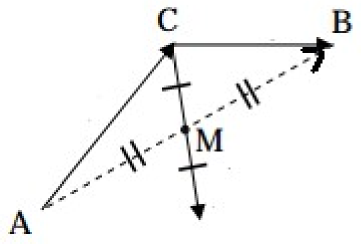
Soit $\vec{V}$ un vecteur de composantes V_x, V_y et V_z dans un repère (o,x,y,z). Sa norme est un scalaire.



- **Calcul à partir des coordonnées de deux points**

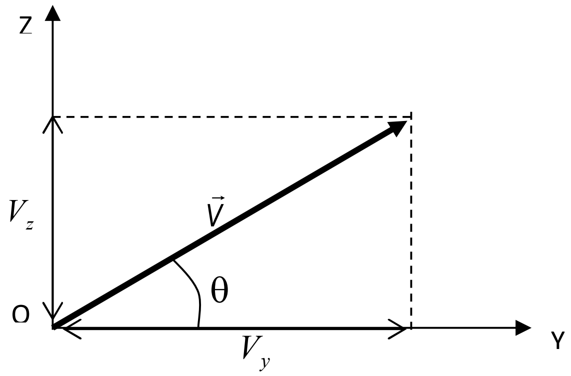
Soient A et B deux points tels que : $A\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{pmatrix}$

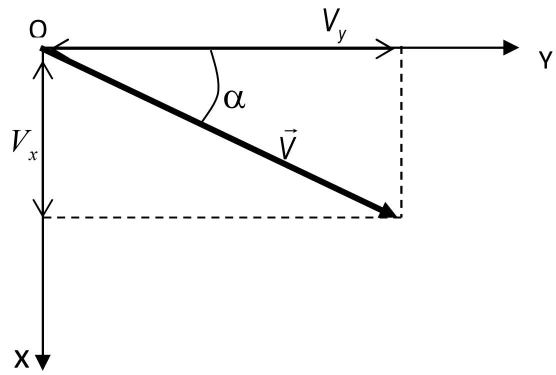
Soit un troisième point c tel que : $C\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix}$



- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

- **Projection d'un vecteur dans un plan**





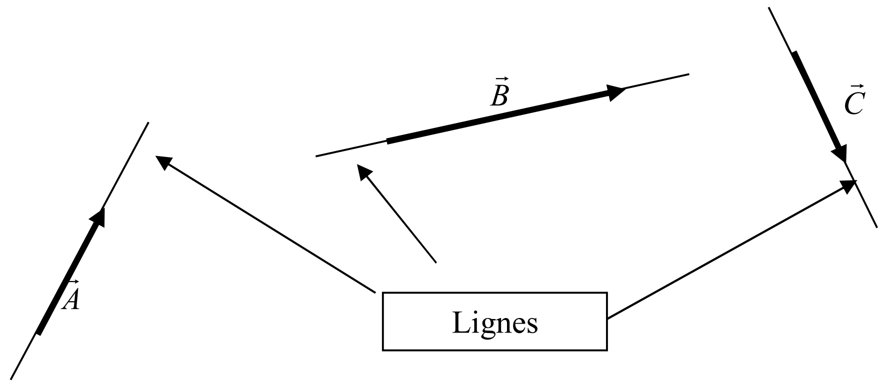
Les coordonnées du vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'écrivent :

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix}$$

I-3.2 Opérations sur les vecteurs

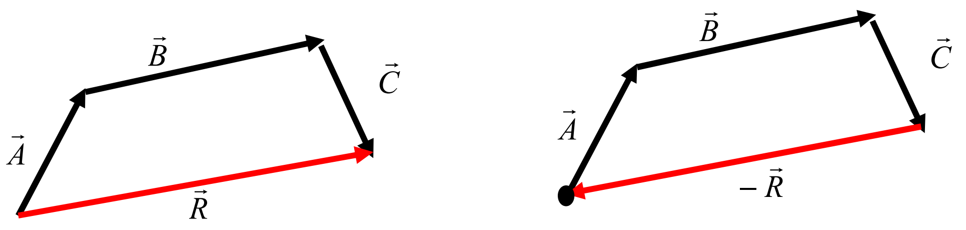
- **Somme des vecteurs**

Somme : soient $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ trois vecteurs libres. Les lignes d'actions de ces vecteurs ne sont pas forcement dans le même plan.



Par définition, la somme des trois vecteurs est le vecteur $\vec{R}$ appelé **vecteur résultant** qui s'écrit :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$



Un vecteur qui a pour norme (ou module) nulle est dit vecteur nul.

- **Produit scalaire**

Soient les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\vec{B}$ faisant entre eux un angle, θ, le produit scalaire est défini par :

$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = \left\|\overrightarrow{A}\right\|\left\|\overrightarrow{B}\right\| \cos\theta$, sachant que le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire,

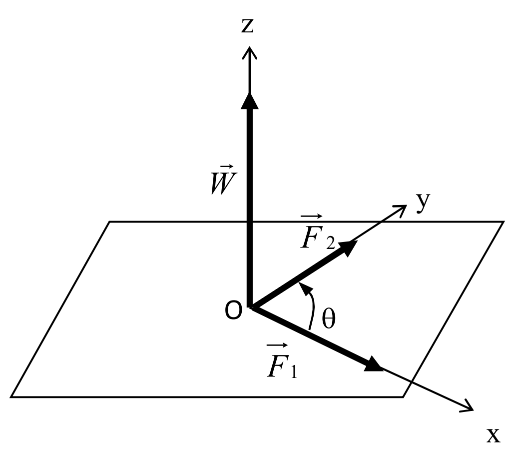
Soient les deux vecteur $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$,on a :

$$\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{et } \overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Alors : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = x_1 x_2 + y_1 y_1 + z_1 z_2$

- **Produit vectoriel**

Soient les deux vecteurs $\vec{F_1} et \vec{F_2}$, le produit vectoriel c'est un vecteur, on note, $\vec{F_1} \wedge \vec{F_2}$



on écrit : $\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2 = \vec{W}$

$\vec{W}$ est défini par sa direction, perpendiculaire au plan formé par $\vec{F}_1 et \vec{F}_2$; son sens est tel que le trièdre soit direct ; sa norme, $\|\vec{W}\| = \|\vec{F_1}\| . \|\vec{F_2}\| . \sin(\vec{F_1}, \vec{F_2})$.

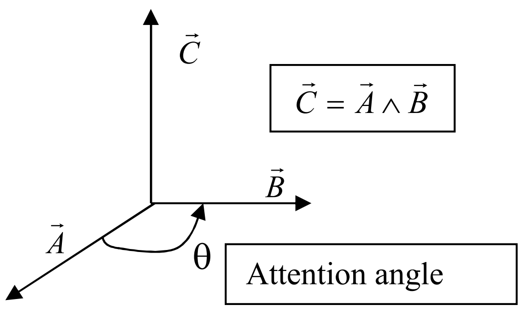
$$\longrightarrow \quad \vec{W} = \left| \begin{array}{l} y_1.z_2 - z_1.y_2 \\ z_1.x_2 - x_1.z_2 \\ x_1.y_2 - y_1.x_2 \end{array} \right.$$

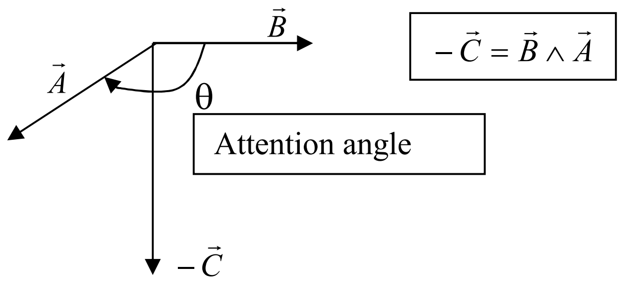
Exemples : calculer le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.

$$\vec{V_1} \left| \begin{array}{c} 6 \\ -2 \\ 3 \end{array} \right. \qquad \vec{V_2} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -2 \end{array} \right.$$

$$\vec{V_1} \left| \begin{array}{c} 2 \\ -3 \\ 4 \end{array} \right. \qquad \vec{V_2} \left| \begin{array}{c} -5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \right.$$

Propriétés: $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$





- **Produit mixte**

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ est la quantité scalaire exprimant le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs, est défini par :

$$\overrightarrow{V_1}.(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = (y_2z_3 - y_3z_2)x_1 - (x_2z_3 - x_3z_2)y_1 + (x_2y_3 - x_3y_2)z_1$$