Chapitre I : Electrostatique

Cours Nº 1

I- Généralités

I.1 Electrisation des corps

L'atome, bien évidemment, est un système électriquement neutre. En perdant un électron, il devient un cation qui est ion positif et en capturant un électron, il devient un anion qui est un ion négatif.

Tous les corps s'électrisent par plusieurs moyens :

a) -Par frottement :

Le frottement d'une tige de verre avec un morceau de la soie entraine un transfert des électrons vers ce dernier. La tige devient chargée positivement et la soie négativement. Les deux corps sont dits électrisés **figure I-1.**

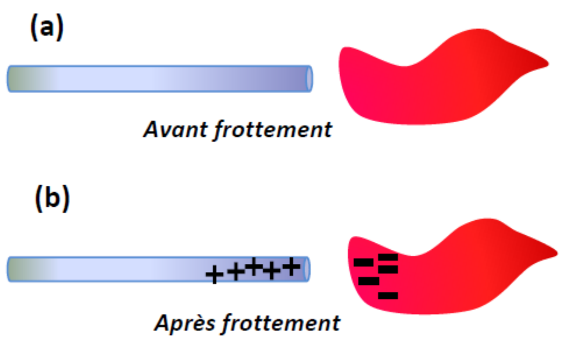


Figure I-1. Electrisation par frottement

Les deux corps sont dits électrisés ou chargés d'électricité. **On appelle ce phénomène l'électrisation par frottement.**

b) Electrisation par influence :

Une boule chargée positivement attire les électrons libres de la tige conductrice. Le côté de la boule devient chargé négativement (électrons) et l'autre côté est chargé positivement (ions positifs) (**figureI-2**). **On appelle ce phénomène l'électrisation par influence.**

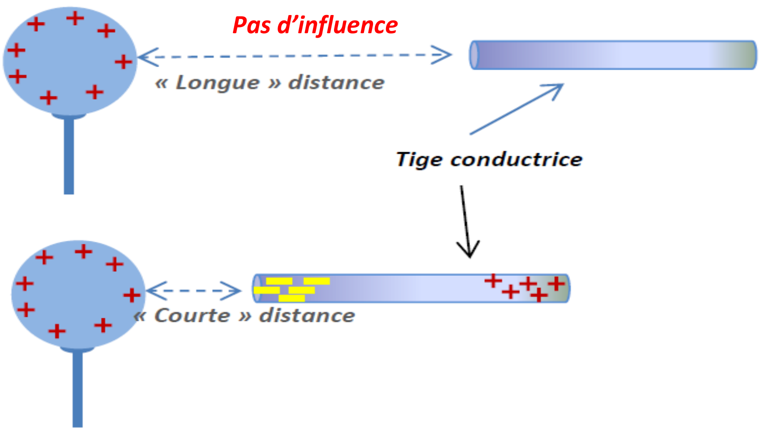


Figure I-2. Electrisation par influence

c) Electrisation par conduction

Si maintenant on relie entre la boule chargée positivement et la tige électriquement neutre par un fil métallique (voir **figure II-3**), on constate alors que la tige se trouve électrisée positivement et que l'électrisation de la boule a diminuée par une charge égale à celle de la tige. La charge électrique a été transmise par le fil métallique. On dit que le fil est un conducteur électrique et que la tige est électrisée par conduction

On appelle ce phénomène l'électrisation par conduction

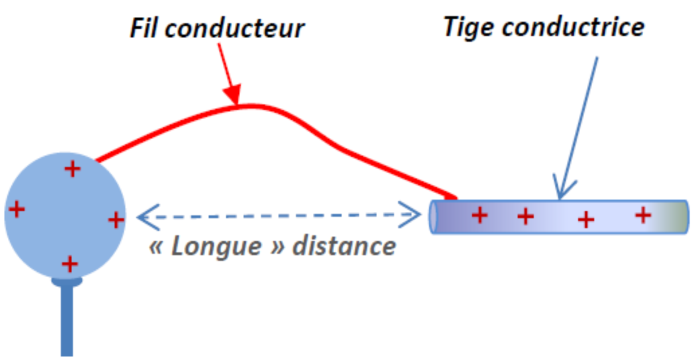
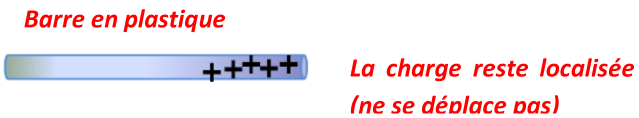


Figure I-3. Electrisation par conduction

I.2 Types des corps :

Dans certains corps, l'électrisation reste localisée là où elle a été créée par frottement (voir **figure II-4)**. **C'est les isolants ou diélectriques**.

Exemple : le verre, le soufre, la paraffine, l'ébonite, l'ambre, le caoutchouc, les résines synthétiques ....



Le deuxième type des corps sont les conducteurs, ce sont des matériaux qui se chargent en totalité (la charge circule librement dans les conducteurs)

Exemple : les métaux, les alliages, le corps humain, l'eau, la terre....

I.3 Charge électrique

La charge électrique **(notée *q*)** est une grandeur caractéristique de certaines particules. Toute charge n'existe que sur une particule chargée qui possède une **masse non nulle**. L'unité de la charge électrique ***q*** dans le système international **(SI)** est **le Coulomb, (notée C).**

L'expérience montre qu'il y a deux types de charges électriques dites **charge positive et charge négative**.

La figure I-5 montre le comportement électrique des différentes natures de charges.

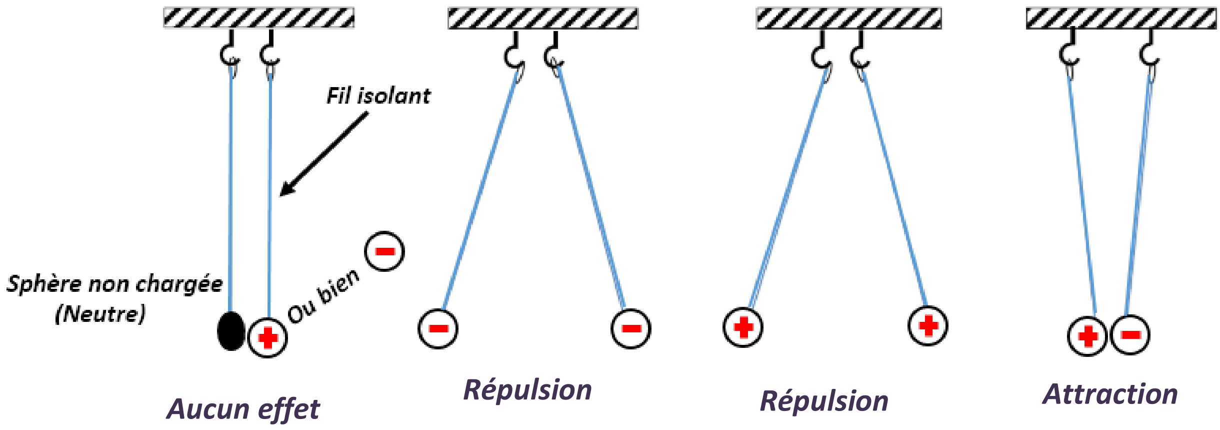


Figure I-5. Type des interactions entre différents particules.

I.4 Quantification de la charge

La plus petite quantité de charge que l'on puisse isolée est appelée la charge élémentaire. Cette charge élémentaire est la charge électrique d'un proton ou d'un électron qui vaut $\boldsymbol{e = \pm 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}}$ **C.** La charge électrique **q** quelconque ne peut exister que sous forme de multiples entiers de la charge élémentaire ***e*, c'est-à-dire $\mathbf{q = N\,e}$, on dit que la charge électrique est quantifiée.**

Exemple :

- Si **q= 8 10^{-3} C,** alors elle est constituée de **4.993 10^{16}** protons ($\mathbf{N=\frac{q}{e}}$) .
- Si **q= -2.15 10^{-8} C,** alors elle est constituée de **1.342 10^{9}** électrons ($\mathbf{N=\frac{q}{e}}$)

Remarque : La charge élémentaire ***e*** est appelée aussi le **quanta** de la charge électrique.

I.5 Conservation de la charge électrique

C'est un principe dont le sens est que la charge ne s'annihile pas et ne se crée pas. Alors dans un système isolé, la somme algébrique des charges dans ce système est conservé (reste constante).

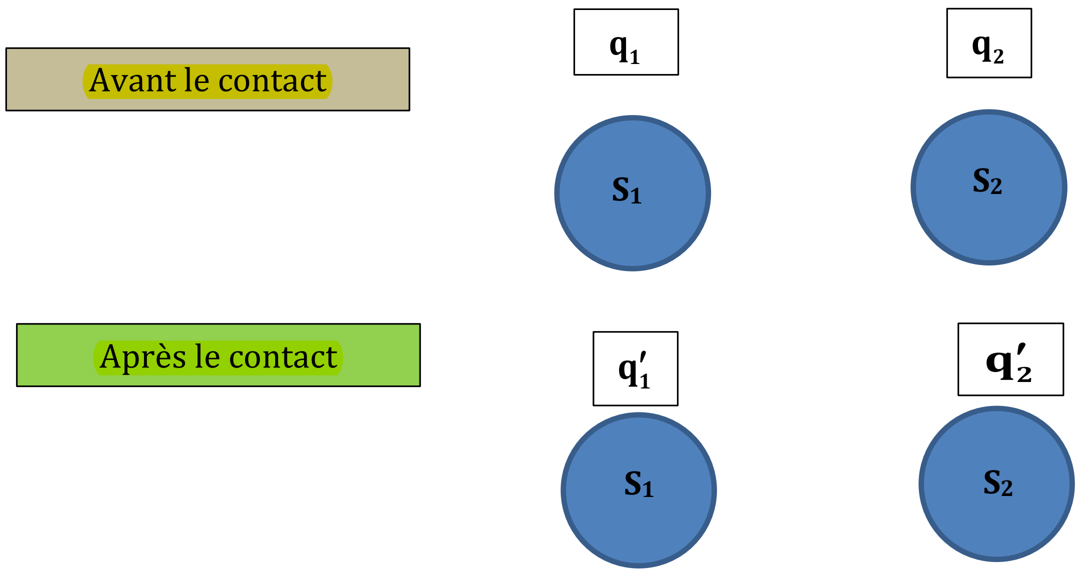
Exemple d'application :

Soit deux sphères conductrices et identiques S_1 et S_2, qui portent des charges q_1 et q_2 respectivement ; on les met en contact puis on les sépare.

- Calculer les charges qu'elles prennent après ce contact et montrer le sens de déplacement des charges ainsi que le nombre de charges transférées.

Sachant que : $\mathbf{q_1 = 3\ 10^{-8}\ C\ \ et\ \ q_2 = 8\ 10^{-8}\ C}$

Solution :



- Calcul des nouvelles charges :

Comme les deux sphères sont identiques et homogène, après le contact les deux sphères auront la même charge $\Rightarrow \mathbf{q'_1 = q'_2}$

La charge totale est conservée $\sum \mathbf{q_i\,(avant\ le\ contact)} = \sum \mathbf{q_i\,(apr\acute{e}s\ le\ contact)}$

On obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2\ \ (Conservation\ de\ la\ charge)} \\ \mathbf{q'_1 = q'_2\ \ (sph\grave{e}res\ identiques\ )} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} = 5.5\ 10^{-8}\,C}$$

On remarque que la charge de la sphère S_1 est augmentée de **$3\ 10^{-8}$ C à $5.5\ 10^{-8}$ C,** comme si elle a reçu des charges positives. Par contre la charge de la sphère S_2 est diminuée de **$8\ 10^{-8}$ C** à **$5{,}5\ 10^{-8}$** C, donc elle a perdu des charges positives.

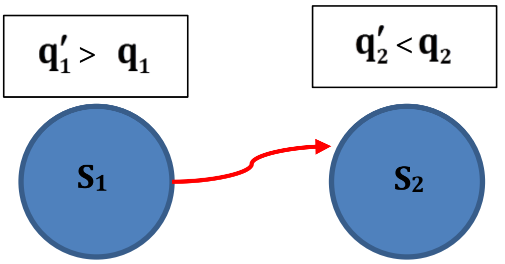
Scientifiquement ce phénomène est expliqué par le transfert des électrons de la sphère S_1 vers la sphère S_2, car la charge positive dans les conducteurs est fixe représentés par la charge des protons.

La quantité de la charge transférée est **Δq** :

$$\Delta q = |q_1 - q_1'| = |q_2 - q_2'| = 2.5\ 10^{-8}\,C$$

Le nombre des électrons transféré au cours de ce contact est :

$$N = \frac{\Delta q}{e} = 3.433\ 10^{11}\,\text{électrons}$$



Le sens de transfert (S_1 vers S_2)

Cours Nº 2

I.2 Loi de Coulomb (forces électrostatiques)

La force électrique exercée par la charge ponctuelle q_1 sur la charge ponctuelle q_2 placées toutes les deux dans le vide (figure I.6) est donnée par la loi

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{1/2}}$$

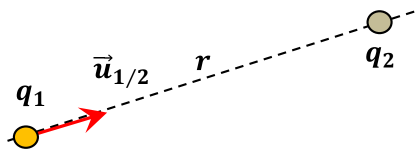


Figure I-6

K est une constante, $\boxed{K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 [\text{MKSA}]}$

r : étant la distance entre les deux charges.

$\vec{u}_{1/2}$ est un vecteur unitaire sortant de la charge qui cause la force q_1 vers l'effet q_2. (cause vers l'effet)

$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$ est la permittivité électrique du vide (dans la matière, on utilise **$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$** où **$\varepsilon_r$** est la permittivité relative de la matière par rapport au vide).

Si q_1 et q_2 sont de nature différente : la force qu'applique q_1 sur q_2 est attractive. Alors $\vec{F}_{1/2}$ et $\vec{u}_{1/2}$ a de sens opposé (figure I-7)

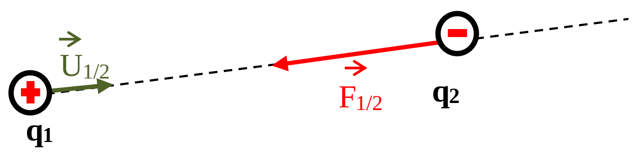


Figure I-7 Force attractive.

Si q_1 et q_2 sont de même nature : la force qu'applique q_1 sur q_2 est répulsive. Alors $\vec{F}_{1/2}$ est de même sens que $\vec{u}_{1/2}$. (Figure I-8)

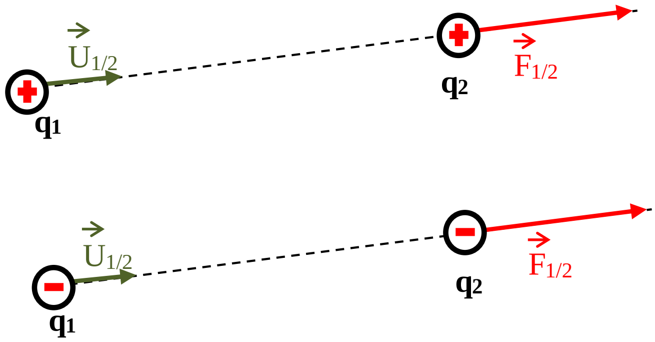


Figure I-8 Force répulsive.

Exemple

Calculer la force électrique exercée par la charge q_1 sur la charge q_2. Sachant que :

$q_1 = 3.10^{-3}$ C, $q_2 = -5.10^{4}\ C$ et $r = 20\ mm$

$$\|\vec{F}_{1/2}\| = K\frac{|q_1||q_2|}{r^2} = 9.10^9\,\frac{3.10^{-3}\ 5.10^{-4}}{(20.10^{-3})^2} = 33{,}7510^6\ C$$

q_1 et q_2 de signe opposé alors $\vec{F}_{1/2}$ est opposé à $\vec{u}_{1/2}$, donc les deux charges s'attirent (force attractive).

- Principe de superposition

La force qu'applique plusieurs charges ponctuelles $\boldsymbol{q_i}$ sur une charge ponctuelle $\boldsymbol{q}$ est égales la somme de toutes les forces induit les charges en question, une par une comme si les autres n'existent pas **(figure I-9).**

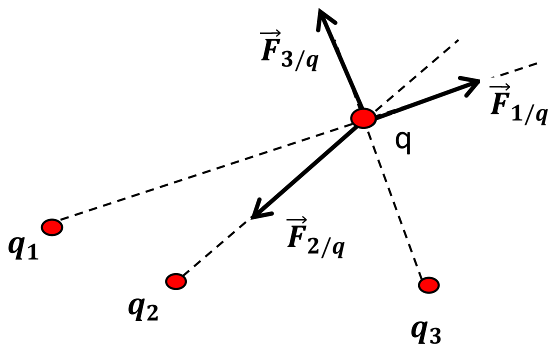
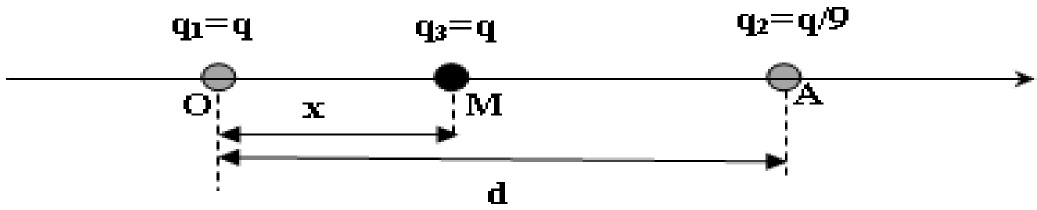


Figure I-9 **Cas de plusieurs charges ponctuelles.**

$$\boxed{\vec{F}_{(q_i\,sur\,q)} = K\sum_{1}^{n}\frac{q\,q_i}{r^2}\vec{u}_i}$$

Exercice d'application

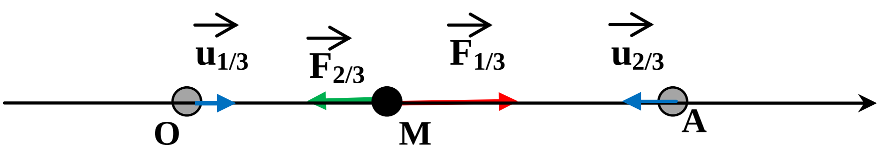
On considère le système de charges ponctuelles, représenté sur la figure ci-dessous. Les charges $\mathbf{q_1}$ et $\mathbf{q_2}$ sont fixées respectivement aux points **O** et **A** distants de d. Soit une charge $\mathbf{q_3}$, qui peut se déplacer entre **O** et **A**.



1. Donner l'expression de la force $\vec{\mathbf{F}}$ qui s'exerce sur q_3 au point **M**.
2. A quelle abscisse $\mathbf{x_0}$, la charge $\mathbf{q_3}$ est dans une position d'équilibre ?AN :**d=4cm**.

Solution

1-Expression de la force $\vec{\mathbf{F}}$ qui s'exerce sur q_3 au point **M**.



$$\overrightarrow{F_3} = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3}$$

$$\vec{F}_{1/3} = K\,\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\,\vec{\imath} = K\,\frac{q^2}{x^2}\,\vec{\imath}$$

$$\vec{F}_{2/3} = K\,\frac{q_2 q_3}{r_{23}^2}\,(-\vec{\imath}) = -K\,\frac{q^2}{9(d-x)^2}\,\vec{\imath}$$

$$\overrightarrow{F_3} = kq^2\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9(d-x)^2}\right]\vec{\imath}$$

3. A quelle abscisse x, la charge q_3 est dans une position d'équilibre pour d=4cm.

A l'équilibre $\overrightarrow{F_3} = \vec{0} \implies$

$$\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9(d-x)^2}\right] = 0$$

$$8x^2 - 0.72x + 0.0144 = 0$$

$\sqrt{\Delta} = 0.24$

Deux solutions

$$\begin{cases} x_1 = 0.03\ m = 3cm \\ \quad ou \\ x_2 = 0.06m = 6cm \end{cases}$$

La deuxième solution $\boldsymbol{x_2}$ est rejetée, par ce qu'elle est supérieure à ***d.***

Cours N° 3

I.3 Le champ et le potentiel électrostatique

Une charge ponctuelle **q** crée en toute point dans son espace un champ $\vec{E}(M)$ et un potentiel électrique **V(M)**

1) Expression mathématique du champ électrique :

Le champ électrique est une grandeur vectoriel définit par :

$$\boxed{\vec{E}(M) = K\frac{q}{r^2}\vec{u}}$$

En module : $$\boxed{\|\vec{E}(r)\| = K\frac{|q|}{r^2}}$$

Où :

r : est la distance entrela charge **q** et le point où on veut calculer le champ électrique.

$\vec{u}$: est un vecteur unitaire sortant de la charge **q** qui crée le champ électrique vers le point **M.** Son unité dans le système international est (Newton. coulomb) **N.C** ou bien **V/m** (Volt/mètre).

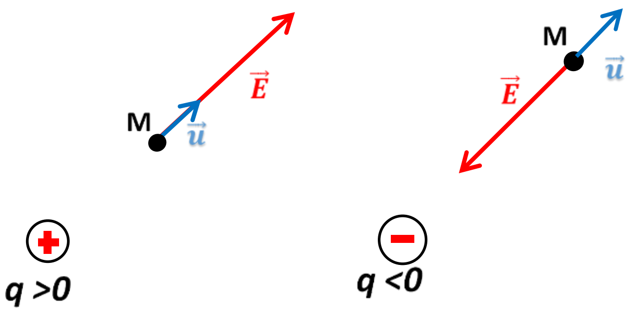


Figure I-10 : Champ électrique crée par une charge ponctuelle.

Comme le montre la figure I.10 :

- Le champ crée par une charge positive est sortant (dans le sens de $\vec{u}$).
- Le champ crée par une charge négative est entrant (sens opposé à $\vec{u}$).

2) Relation entre le champ électrique $\vec{E}$ et la force électrique $\vec{F}$:

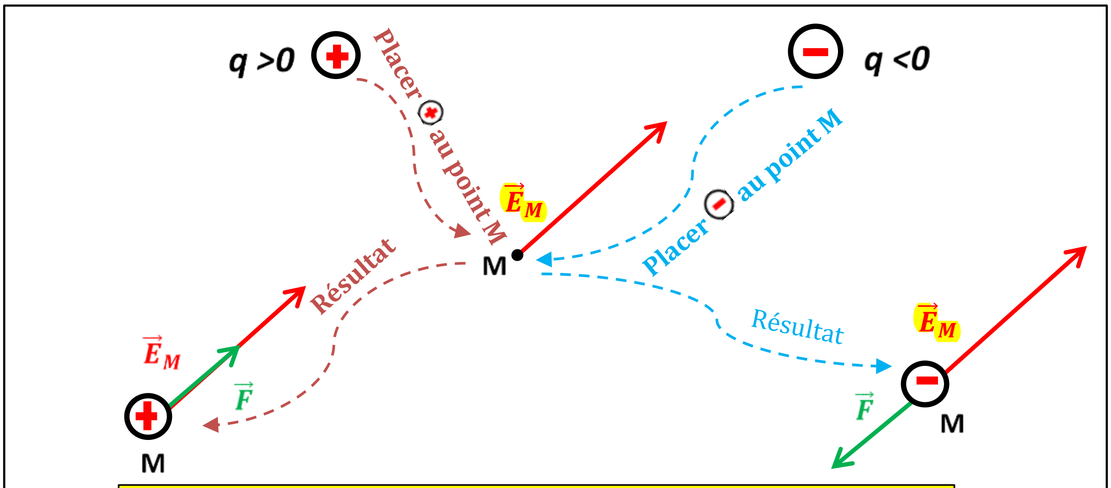
Si on place une charge électrique **q** au point **M** où le champ électrique est $\vec{E}(M)$

Il va apparaitre sur cette charge une force électrique $\vec{F}$ (voir la figure I.11),

donnée par la relation suivante :

$$\boxed{\vec{F} = q.\vec{E}(M)}$$

$$si \begin{cases} q > 0 \Rightarrow \vec{F}\ et\ \vec{E}\ \text{ont le même sens} \\ q < 0 \Rightarrow \vec{F}\ et\ \vec{E}\ \text{de sens opposé} \end{cases}$$



On place une charge q ⊕ Ou bien ⊖ au point M où le champ est $\vec{E}_M$.
$\Longrightarrow$ une force électrique $\vec{F}$ appliquée sur q,
Le sens de $\vec{F}$ dépend de la nature de la charge q.

Figure I-11 Effet du champ électrique sur une charge électrique

Remarque :

Dans le cas de deux charge ponctuelle **q₁** et q_2, la force qui s'exerce sur la charge q_1 sur q_2 est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1/2} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$$

$\vec{E}_1(r)$: Le champ électrique créé par la charge q_1

$$\boxed{\Rightarrow \vec{F}_{1/2} = q_2.\vec{E}_1(r)}$$

3) Expression mathématique du potentiel électrique V

Le potentiel électrique est une grandeur scalaire, définit par l'expression suivante :

$$V(r) = K\frac{q}{r}$$

r : est la distance entre la charge **q** et le point où on veut calculer le potentiel électrique. Son unité dans le système international est le volt **(V).**

4) Les lignes de champ et les surfaces équipotentielles

Les lignes de champ sont des lignes tangentes au vecteur de champ électrique en chacun de ses points.

Figure I-11 ligne de champ

Sur la figure I.12, on représente les lignes de champ pour différent cas.
La mise en présence de deux charges, d'égale valeur, entraîne une déformation des lignes de champ et on obtient une nouvelle topographie (figuresI.12). En chaque point, la ligne de champ est tangente au champ résultant.

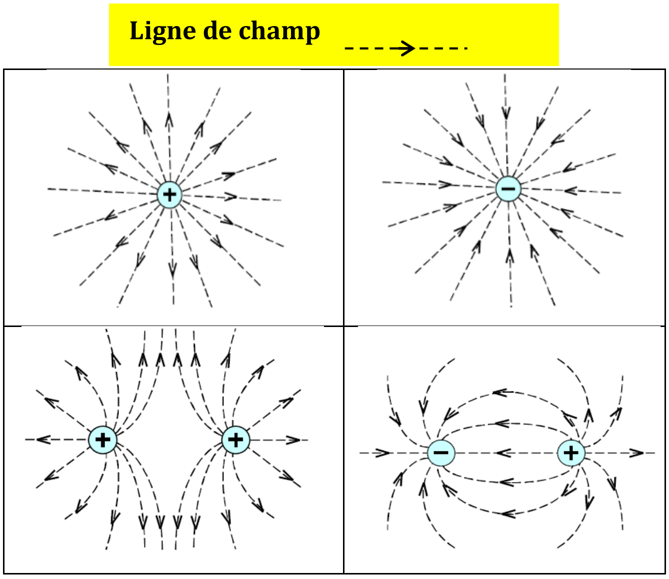


Figure I-12 lignes de champs pour diffèrent distribution de charges

Les Surfaces équipotentielles sont des surfaces où en tout point le potentiel est le même, V sur cette surface est constant (dV=0),figure I-13.

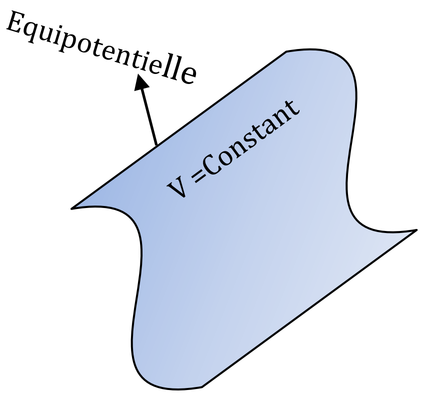


Figure I-13 Surface équipotentielle

Dans le cas d'une charge ponctuelle, les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques de centre O et les lignes de champ sont radiales (figures I-14).

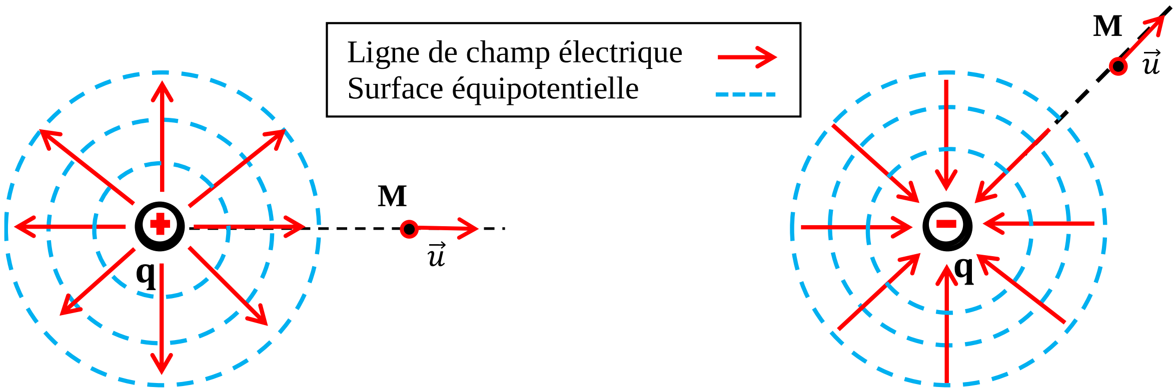


Figure I-14 Les lignes du champ et les surfaces équipotentielles

Remarque :

- La ligne de champ est orientée du potentiel le plus élevé au potentiel le moins élevé, c'est-à-dire le potentiel décroit le long d'une ligne de champ.
- Le champ électrique est plus intense là où les équipotentielles sont les plus resserrées.
- Le champ électrique (ou bien ligne de champ) est perpendiculaire à l'équipotentielle V

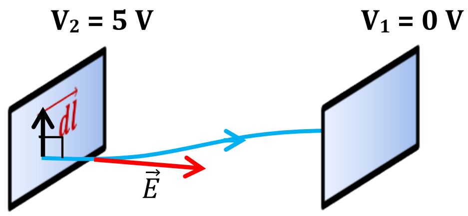


Figure I-15 Les lignes du champ et les surfaces équipotentielles.

5) Relation entre le champ et le potentiel électrique

La relation mathématique qui relie le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique **V** est définit par :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}(V(r))}$$

En coordonnées cartésiennes : $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$

En coordonnées cylindriques : $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$

En coordonnées sphériques : $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi\right)$

De cette relation :

- Si on connait l'expression du potentiel **V** en tout point de l'espace, on peut déterminer le champ électrique $\vec{E}$ est ceci par dérivation de l'expression de **V**.
- Et inversement, si l'expression de champ électrique $\vec{E}$ est connue on peut alors calculer le potentiel électrique **V** par intégration de l'expression de $\vec{E}$.

6) Champ et potentiel électrique créés par plusieurs charges ponctuelles (Principe de superposition)

L'ensemble de charge ponctuelles $\mathbf{q_i}$ dans l'espace (figure I-16) crée un champ $\vec{E}(M)$ et un potentiel **V(M)** électrique tels que :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

Le potentiel **V(M)** :

$$V(M) = V_1 + V_2 + \cdots + V_N = \sum_{i=1}^{N} V_i$$

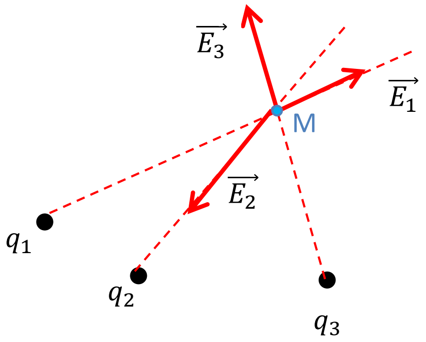


Figure I-16

7) Applications

Exercice 1:

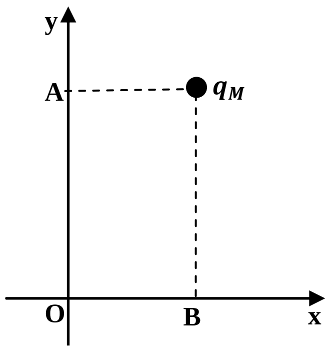
Soit une charge $\mathbf{q_M}$ placée au point **M (a, 2a)** (voir **figure ci-dessous**).

1- Déterminer et représenter le vecteur champ électrique crée par la charge $\mathbf{q_M}$ au point **A(0, 2a)** et au point **B(a, 0).**

2- Calculer le potentiel électrique crée par cette charge au point **A(0,2a)** et au point **B(a,0).**

3- On place une charge $\mathbf{q_A}$ au point **A(0,2a).**

- Déterminer la force appliquée sur cette charge $\mathbf{q_A}$.



On donne : $\mathbf{q_M = 2\times10^{-8} c}$ **,** $\mathbf{q_A = -1.2\times10^{-8} c}$**, a = 5 cm et K=1/4πε₀ = 9 10⁺⁹(SI)**

Solution:

1- Le vecteur champ électrique crée par la charge $\mathbf{q_M}$

Au point **A(0,2a)**

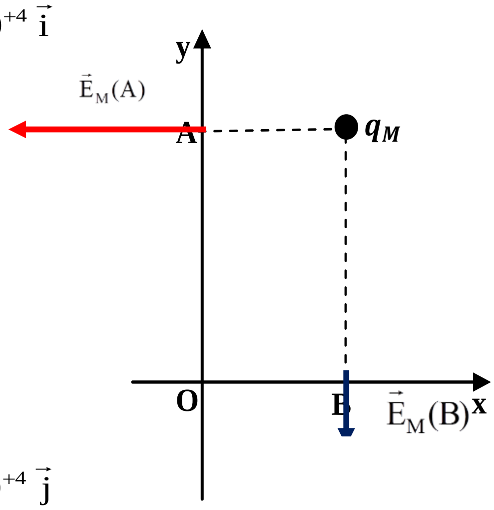
$$\vec{E}_M(A) = \frac{kq_M}{MA^2}\,\vec{u}_{M/A} \quad , \ \vec{u}_{M/A} = -\vec{i},$$

$$AM = a$$

$$\vec{E}_M(A) = -\frac{kq_M}{a^2}\,\vec{i} \ \rightarrow \vec{E}_M(A) = -7.2\times10^{+4}\,\vec{i}$$

Ou bien

$$\left\|\vec{E}_M(A)\right\| = \frac{k|q_M|}{a^2} = 7.2\times10^{+4}\ \ N/C$$



- Au point **B(a,0).**

$$\vec{E}_M(B) = \frac{kq_M}{MB^2}\,\vec{u}_{M/B} \quad , \ \vec{u}_{M/B} = -\vec{j},$$

$$BM = 2a$$

$$\vec{E}_M(B) = -\frac{kq_M}{4a^2}\,\vec{j} \ \rightarrow \vec{E}_M(A) = -1.8\times10^{+4}\,\vec{j}$$

Ou bien

$$\left\|\vec{E}_M(B)\right\| = \frac{k|q_M|}{4a^2} = 1.8\times10^{+4}\ \ N/C$$

2-Le potentiel électrique crée par cette charge

-au point **A(0, 2a) :** $V_M(A) = \dfrac{kq_M}{a} = 3.6\ 10^{+3}V$

-au point **B(a, 0) :** $V_M(B) = \dfrac{kq_M}{2a} = 1.8\ 10^{+3}V$

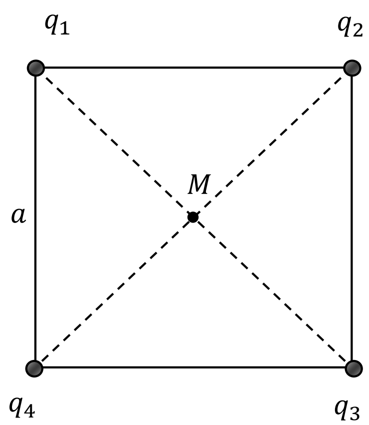
3- Calcul de la force appliquée sur $\mathbf{q_A}$

$$\vec{F} = q_A.\vec{E}_M(A) = 8.64\ 10^{-4}\ \ \vec{\imath}\ (N)$$

Exercice 2 :

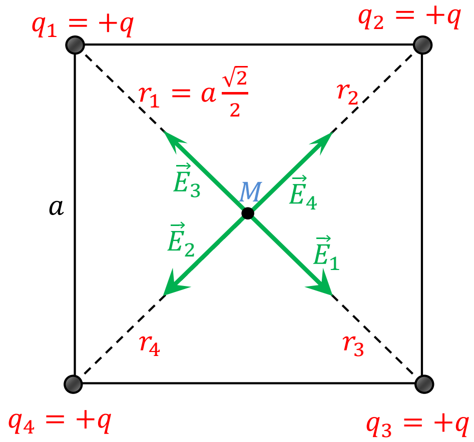
Soit la distribution de charges présenter par la figure ci-contre. Sachant que quatre charges de même valeur q et le carré de côté a .

Déterminer le champ et le potentiel électrostatiques crées au point M (centre du carré)



Solution :

D'après la figure ci-contre les distances qui séparent le point M et les quatre charges sont :



$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Et $$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = +q$$

- Calcul le potentiel au point M:

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M) + V_3(M) + V_3(M)V(= 4.K\frac{q}{r}$$

Alors

$$V(M) = 4\sqrt{2}.K\ \frac{q}{a}$$

Calcul le champ électrostatique au point M créé par les trois charges:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) + \vec{E}_3(M) + \vec{E}_4(M)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} K\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i \qquad \text{somme vectoreille}$$

En module

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = K\frac{q_i}{r_i^2} = 2K\frac{q}{a^2} \qquad (|\vec{u}_i| = 1)$$

Comme $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_3$ sont égaux en module et opposé en direction alors $\vec{E}_1 + \vec{E}_3 = \vec{0}$.

Comme $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_4$ sont égaux en module et opposé en direction alors $\vec{E}_2 + \vec{E}_4 = \vec{0}$.

Le champ électrique au centre du carré est nul ; $\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \vec{0}$

Cours Nº 4

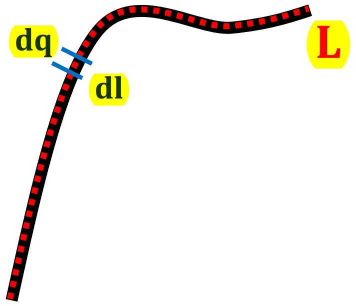
I.3 Distribution continue de charges.

Si les dimensions de la matière qui porte la charge **Q** ne sont pas négligeables et cette charge est répartie d'une manière continue (sur : la longueur, la surface ou le volume) de cette matière, alors la charge n'est plus ponctuelle (distribution continue de charge). Une telle distribution continue, entraîne la notion de **la densité** pour caractériser la distribution de la charge.

a- Distribution linéique :

La charge **Q** est répartie sur un fil, dans ce cas on définit la densité de charge linéique, notée par **λ,** donnée par l'équation :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{\text{Charge élémentaire}}{\text{Longueur élementaire}}$$



Où : **dq** est la charge élémentaire portée par la longueur élémentaire **dl.** Son unité est Coulomb/mètre (**C/m**).

La charge totale portée par le fil de longueur L est :

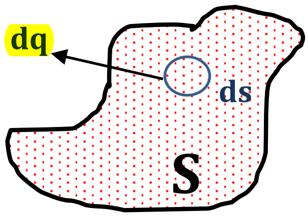
$$dq = \lambda\, dl \Rightarrow Q = \int_0^L \lambda\, dl$$

Si la charge **Q** est répartie uniformément le long du fil, alors **λ** est constant :

$$\boxed{Q = \lambda \int_0^L dl \Rightarrow Q = \lambda L}$$

b- Distribution surfacique

La charge **Q** est répartie sur une surface **S,** dans ce cas on définit la densité de charge surfacique, notée par **σ,** donnée par l'équation :



$$\boxed{\sigma = \frac{dq}{ds} = \frac{\text{Charge élémentaire}}{\text{Surface élementaire}}}$$

Où **:** **dq** est la charge élémentaire portée par la surface élémentaire **ds.**

Son unité est Coulomb/mètre² (C/m^2).

La charge totale portée par la surface **S** est :

$$dq = \sigma\, ds \Rightarrow Q = \iint_S \sigma\, ds$$

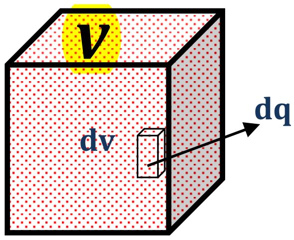
Si la charge **Q** est **répartie uniformément** sur la surface **S**, alors **σ** est constant :

$$\boxed{Q = \sigma \iint_S ds \Rightarrow Q = \sigma\, S}$$

c- Distribution volumique

La charge **Q** est répartie sur un volume ***v*,** dans ce cas on définit la densité de charge volumique, notée par **ρ,** donnée par l'équation :

$$\boxed{\rho = \frac{dq}{dv} = \frac{\text{Charge élémentaire}}{\text{volume élementaire}}}$$



Où **:** **dq** est la charge élémentaire portée par le volume élémentaire **dv.**

Son unité est Coulomb/mètre³ (**C/m^3**) .

La charge totale portée par le volume ***v*** est :

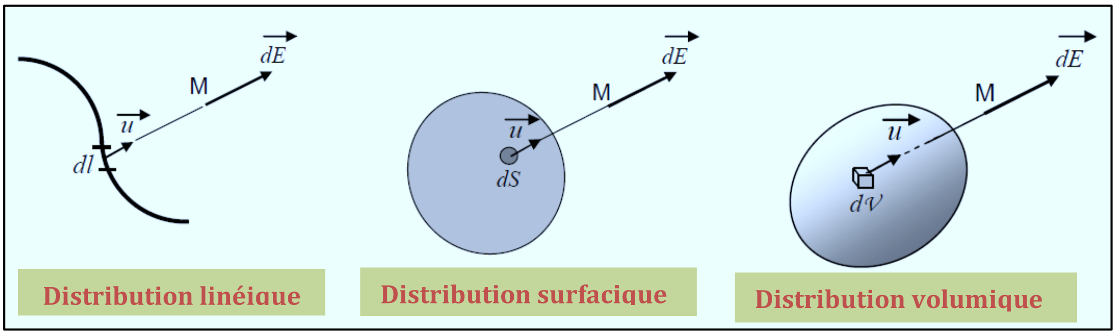
$$dq = \rho\, dv \Rightarrow Q = \iiint_v \rho\, dv$$

Si la charge **Q** est **répartie uniformément sur le volume** *v*, alors **ρ** est constant :

$$Q = \rho \iiint_v dv \Rightarrow Q = \rho\, v$$

I-3-1 Champ et le potentiel électrostatiques créés par une distribution continue de charges.

Pour calculer le champ $\vec{E}$ est le potentiel **V** au point **M** de l'espace crées par une distribution de charge continue, il faut commencer par l'expression du champ élémentaire $d\vec{E}$, et le potentiel élémentaire **dV** créé par une charge élémentaire **dq** au point **M** de l'espace . Par intégration des relations obtenues on obtient le champ et le potentiel total crée par cette distribution de charge (par la charge totale **Q)** au point **M**.



$$d\vec{E}_M = k\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{et} \qquad dV_M = k\frac{dq}{r}$$

- **Cas de distribution linéique :**

$$\vec{E}_M = \int d\vec{E}_M = k\int_L \frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}_r$$

$$V_M = k\int_L \frac{\lambda dl}{r}$$

- **Cas de distribution surfacique :**

$$\vec{E}_M = \int d\vec{E}_M = k\iint_S \frac{\sigma ds}{r^2}\vec{u}_r$$

$$V_M = k\iint_S \frac{\sigma ds}{r}$$

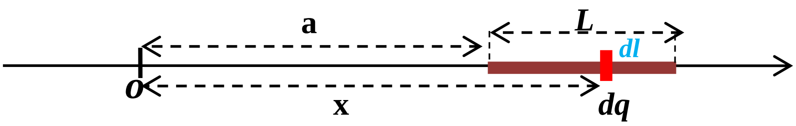
- **Cas de distribution volumique :**

$$\vec{E}_M = \int d\vec{E}_M = k\iiint_v \frac{\rho dv}{r^2}\vec{u}_r$$

$$V_M = k\iiint_v \frac{\rho dv}{r}$$

Exemple d'application

Une tige métallique de longueur **L** porte une charge **Q** répartie uniformément avec une densité de charge linéique λ **>0 (figure ci-dessous).**



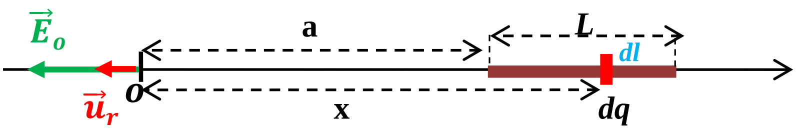
1)- Déterminer le champ élémentaire $d\vec{E}_o$ et le potentiel élémentaire dV_o crée par une charge élémentaire ***dq*** au point **O en fonction de *x, a et*** λ **.**

2)- Déterminer le champ total crée par la tige $\vec{E}_o$ au point **O .**

3) -Déterminer le potentiel totale V_o crée par a tige au point **O**.

Solution :

1- Déterminer le champ élémentaire $d\vec{E}_o$ **en fonction de *x, a et*** λ **.**



En premier lieu, vous devez tracer le vecteur champ élémentaire au point O créé par la charge élémentaire dq ainsi que et le vecteur unitaire $\vec{u}_r$. Ce champ sortant de dq vers O, car la charge est positive.

Le champ élémentaire est donné par la relation suivante :

$$d\vec{E}_o = k\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r$$

A partir de la figure on peut déduire que : $\vec{u}_r = -\vec{i}; \quad r = x, \quad et \quad dq = \lambda\, dx$.

D'où : $d\vec{E}_o = -k\frac{\lambda\, dx}{x^2}\vec{i}$

- Déterminer le champ élémentaire ***dV₀* en fonction de *x, a et* λ .**

$$dV_o = k\frac{dq}{r} \quad \Rightarrow dV_o = k\frac{\lambda\, dx}{x}$$

2)- Déterminer le champ total crée par la tige $\vec{E}_o$ au point **O .**

$$\vec{E}_o = \int_{Cte} d\vec{E}_o = -k\,\lambda\int_a^{L+a}\frac{dx}{x^2}\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_o = -k\lambda\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{L+a}\vec{i}$$

Le champ total crée par la tige au point O: $\vec{E}_o = -\frac{k\lambda L}{a(L+a)}\vec{i}$

3) -Déterminer le potentiel totale V_0 crée par a tige au point **O**.

$$V_0 = \int dV_o = k\lambda\int_a^{L+a}\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad V_o = k\lambda\left[Ln\ x\right]_a^{L+a}$$

Le potentiel total V_0 crée par la tige au point **O :** $V_o = k\lambda\ Ln\left(\frac{L+a}{a}\right)$

Cours No 5

Travail et Energie

I- Energie potentielle électrostatique :

Si on place une charge électrique $\boldsymbol{q}$ en un point $\boldsymbol{M}$ où le potentiel électrique est $\boldsymbol{V_M}$ (Voir la figure I-17), elle aura une énergie potentielle $\boldsymbol{E_p}$ donnée par :

$$\boxed{E_P = q\,V_M}$$

L'unité de $\boldsymbol{E_p}$ est le joule (**J**).

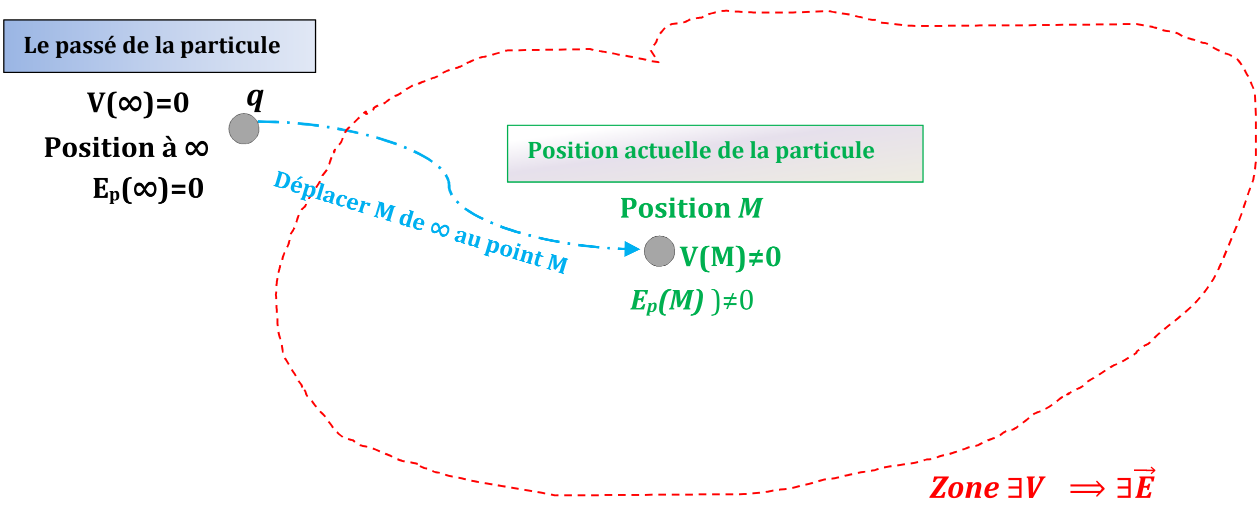


Figure I-17

Remarque :

L'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de cette particule de sa position actuelle à l'infini.

II- Travail de la force électrique

On place une charge électrique q en un point de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$.

Elle est alors soumise à l'action d'une force électrique :

$$\vec{F} = q.\vec{E}$$

Le travail de cette force lors d'un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ est :

$$dw = \vec{F}.\vec{dl}$$

Le travail total entre deux points A et B est donné par :

$$W(\vec{F})_A^B = \int_A^B \overbrace{\vec{F}}^{q.\vec{E}}.\vec{dl} \Rightarrow \quad W(\vec{F})_A^B = q\int_A^B \overbrace{\vec{E}.\vec{dl}}^{-dV}$$

$$\Rightarrow \quad W(\vec{F})_A^B = -q\int_A^B dV$$

$$\Rightarrow \quad W(\vec{F})_A^B = -q(V_B - V_A)$$

$$\boxed{W(\vec{F})_A^B = q(V_A - V_B)} \quad (*)$$

On sait que l'énergie potentielle $E_P = q\,V$

$$(*) \quad \Rightarrow W(\vec{F})_A^B = qV_A - qV_B$$

$$W(\vec{F})_A^B = E_P(A) - E_P(B)$$

Le travail de la force électrique $\vec{F}$ (force de coulomb)entre entre deux positions **A** et **B dépend de son énergie potentielle à ces deux positions**

$$\boxed{W(\vec{F})_A^B = -\Delta E_p\big]_A^B}$$

La force électrique $\vec{F}$ est donc conservative et son travail entre deux points quelconques ne dépend pas du chemin suivi. C'est une force qui dérive d'une énergie potentielle E_p .

Exemple :

Un plan **xoy**, rapporté au repère orthogonal ($O\vec{\imath}, O\vec{\jmath}$) est introduit dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ (voir la figure I-18).

Sachant Le potentiel électrostatique est nul en **O** et $\vec{E} = 1450(\vec{\imath} + \vec{\jmath})(V.m^{-1})$.

1- Calculer les potentiels V_A et V_B aux points **A (10, 0)** et **B (10, 10)** ; L'unité de longueur est le cm.

2- On place une charge $q = 3\mu C$, Calculer le travail effectué par la force électrostatique agissant sur cette charge lorsqu'elle se déplace de **O à A** ; puis de **A à B** ; et enfin de **O à B** selon les chemins indiqués sur la figure.

3- Dessiner les surfaces équipotentielles et les lignes de champs qui traversent les points **O, A et B.**

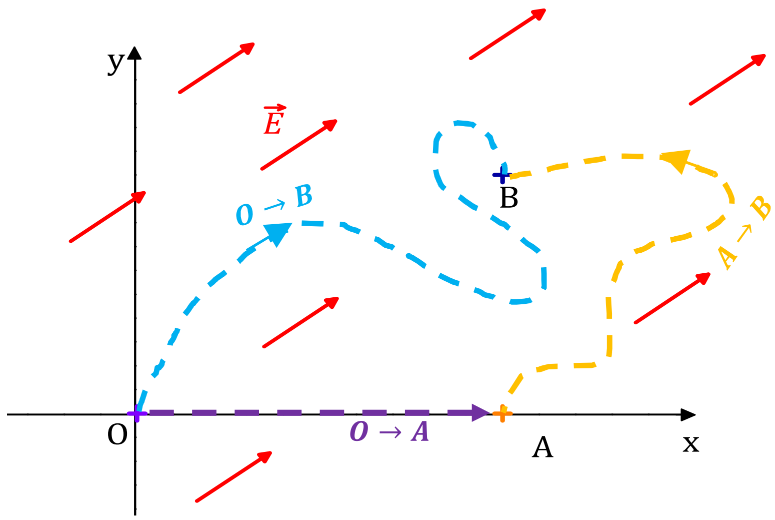


Figure I-18

Solution

1 - Calcul les potentiels V_A **et** V_B **:**

On sait que : $dV = -\vec{E}.d\vec{l}$ et $d\vec{l} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$

$\Rightarrow dV = 1450(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\,)\big(dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}\,\big) \Rightarrow dV = 1450dx + 1450dy$

$\int_{V_O}^{V_A} dV = -1450\int_0^{x_A} dx - 1450\ \int_0^{y_A} dy \ \ \Rightarrow\ \ V_A - V_O = -1450[x]_0^{x_A} - 1450\ [y]_0^{y_A}$

$$V_A - V_O = -1450x_A - 1450\ y_A$$

AN : $V_A - 0 = -1450(0.01) - 1450\ (0)$

$$V_A = -14.5\ V$$

De même Pour V_B : $V_B - V_O = -1450x_B - 1450\ y_B$

AN $V_B - 0 = -1450(0.01) - 1450\ (0.01)$

$$V_B = -29\ V$$

2- Calcul le travail effectué par la force électrostatique $\vec{\boldsymbol{F}}$

La force électrostatique $\vec{F}$ est une force consevative son travail ne dépand pas du chemin suivie, il dépend que de la position finale et initiales.

$$W(\vec{F})_0^A = -\Delta E_p\Big]_O^A$$

$$W(\vec{F})_O^A = q(V_O - V_A)$$

$$W(\vec{F})_A^B = q(V_A - V_B)$$

$$W(\vec{F})_O^B = q(V_O - V_B)$$

AN : $W(\vec{F})_O^A = 3\ 10^{-6}(0 + 14.5) = 4.3510^{-5}J$

$$W(\vec{F})_A^B = 3\ 10^{-6}(-14.5 + 29) = 4.3510^{-5}J$$

$$W(\vec{F})_O^B = 3\ 10^{-6}(0 + 14.5) = 4.3510^{-5}J$$

3- Les lignes de champ sont des lignes tangentes au vecteur de champ électrique en chacun de ses points, dans cet exercice le champ est constant en direction $\vec{\mathrm{E}} = 1450(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\,)$, Alors les lignes de champ sont toutes les droites parallèle à la droite $y = x$.

- Les Surfaces équipotentielles sont des surfaces où en tout point le potentiel est le même, et le champ électrique (ou bien ligne de champ) est perpendiculaire à l'équipotentielle V. Voir la figure I-19.

Les lignes de champs ⊥ les surfaces équipotentielles

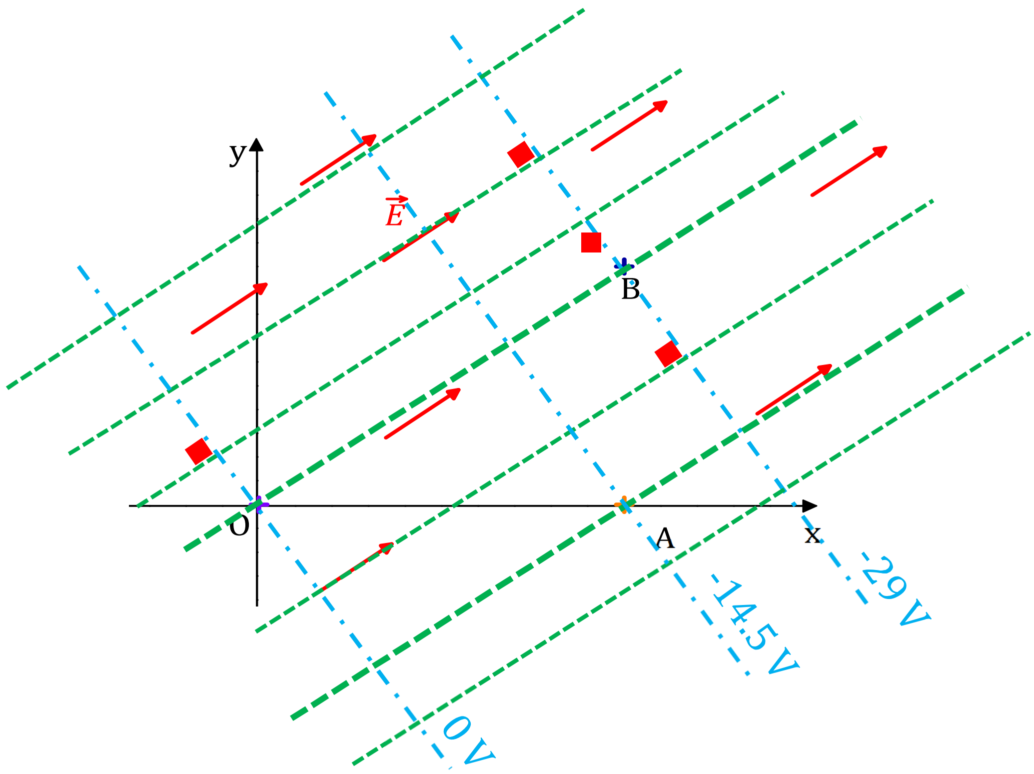


Figure I-19 les lignes de champs et les surfaces équipotentielles

III- Energie interne d'une distribution de charges électriques.

L'énergie interne d'un système de n charges est définie comme le travail fourni par un opérateur pour assembler les deux charges, initialement sans interaction.

a-Système constitué de deux charges ponctuelles

L'énergie interne d'un système de deux charges est définie comme le travail fourni par un opérateur pour assembler les deux charges, initialement sans interaction. C'est l'énergie potentielle de la deuxième charge dans le champ de la première (ou l'énergie potentielle de la première charge dans le champ de la seconde), donnée par la relation :

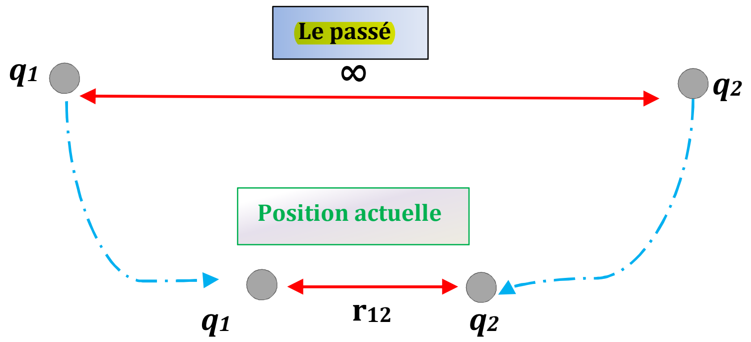
$$U = K\frac{q_1\, q_2}{r_{12}}$$

$$U = K\frac{q_1\, q_2}{r_{12}}$$

$$U = E_p(q_2) = \underbrace{q_2 V_2(q_1)}_{E_p \text{ de } q_2 \text{ dans le champ de } q_1}$$

$$U = K\frac{q_1\, q_2}{r_{12}}$$

$$U = E_p(q_1) = \underbrace{q_1 V_1(q_2)}_{E_p \text{ de } q_1 \text{ dans le champ de } q_2}$$



b-Système constitué de trois charges ponctuelles

Dans ce cas l'énergie interne d'un système est la somme de toutes les énergies potentielles entre charges prises deux à deux (sans répéter la même énergie potentielle deux fois), donc

$$U = K\frac{q_1\, q_2}{r_{12}} + K\frac{q_1\, q_3}{r_{13}} + K\frac{q_2\, q_3}{r_{23}}$$

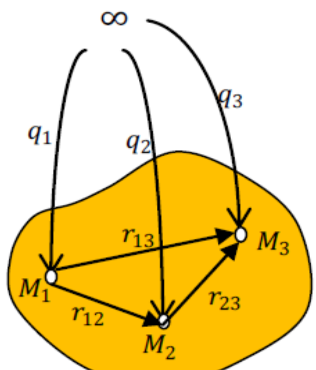


Figure I-20

C -Système constitué de n charges ponctuelles

L'énergie interne d'un système constitué de n charges est donnée par la relation :

$$\boxed{U_{syst} = \sum_i \sum_j U_{ij} = \frac{k}{2}\sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{r_{ij}}} \qquad (i \neq j)$$

On peut écrire l'énergie potentielle en fonction du potentiel

$$\boldsymbol{V(i) = \sum_j k \frac{q_j}{r_{ij}}} \qquad\qquad (\boldsymbol{i \neq j})$$

$\boldsymbol{V(i)}$ est le potentiel crée au point ou se trouve la charge q_i par le reste des charges.

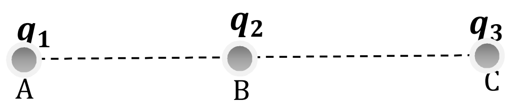
On alors :

$$\boxed{\boldsymbol{U_{\text{syst}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i . V(i)}}$$

Exemple :

Soient trois charges électriques $\boldsymbol{q_1, q_2\ et\ q_3}$ placées aux points A,B et successivement (voir la figure ci-dessou).

On donne : $\boldsymbol{q_1 = -3\mu C , q_2 = 2\mu C\ et\ q_3 = 8\mu C}$
$\boldsymbol{BC = AB = 3cm}$



- Calculer l'énergie interne de ce système.

Solution :

L'énergie interne de ce système est :

$$U = K\frac{q_1\, q_2}{AB} + K\frac{q_1\, q_3}{AC} + K\frac{q_2\, q_3}{BC}$$

AN :

$$U = 9\,10^9 * 10^{-12}\left(\frac{-3 * \ 2}{3\ 10^{-2}} + \frac{-3 * \ 8}{6\ 10^{-2}} + \frac{2 * 8}{3\ 10^{-2}}\right)$$

$$U = \ -0.6\, J$$

Cours No 6

I.5 Dipôle électrique

1. Définition :

Le dipôle électrique est constitué de deux charges électriques identiques et de signe contraire (+q) et (-q) séparée par une distance « **a** » très petite voire la figure I.6.

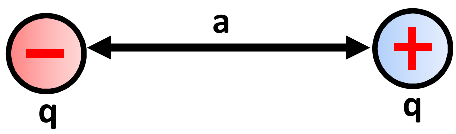


Figure I-6. Dipôle électrique

2. Moment dipolaire électrique

Chaque dipôle est caractérisé par son moment dipolaire $\vec{p}$ orienté de la charge négative vers la charge positive, définit par :

$$\boxed{\vec{p} = q\,\vec{a}}$$

Son unité dans le système internationale est (coulomb. mètre) **C.m**

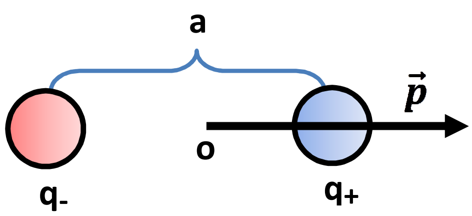


Figure I-7. Moment dipolaire

Dans la nature il existe des molécules naturellement popularisées, comme : HCl, H_2O, SO_2.

Explication : Dans une liaison, le doublet électronique peut ne pas être partagé équitablement entre les deux atomes : l'un des deux atomes peut avoir une force d'attraction sur le nuage électronique plus grande que l'autre. On appelle électronégativité cette capacité pour les atomes à attirer le nuage électronique. Ce partage inéquitable de la charge électronique transforme alors le couple atomique en dipôle. Tout se passe alors comme s'il y avait un transfert électronique partiel de l'atome le moins électronégatif vers l'atome le plus électronégatif. On introduit ce transfert fictif par des charges partielles : à l'atome le plus électronégatif qui attire à lui le doublet électronique, sera attribuée une charge partielle négative, notée -δ, à l'autre une charge partielle positive, notée +δ.

3. Potentiel électrique créé par un dipôle

Soit un dipôle constitué de deux charges ponctuelle (+q et –q) séparées par une distance **a**. On va calculer le potentiel électrostatique créé par ce dipôle en un point **M (**très éloignés des charges) situé à une distance **r** du milieu **O** du dipôle (figure I-8).

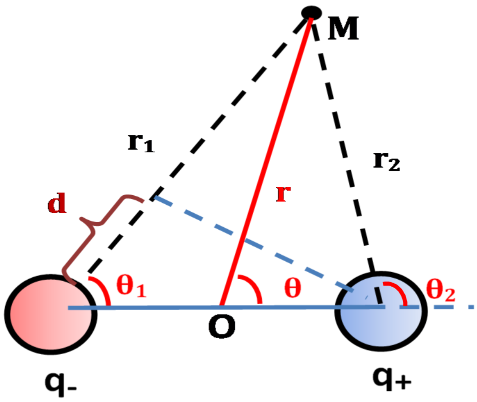


Figure I-8. Potentiel crée par un dipôle.

$$V(M) = V(q_+) + V(q_-) \Rightarrow \quad V = k\left(\frac{q_+}{r_2}\right) + k\left(\frac{q_-}{r_1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad V = k\left(\frac{q}{r_2}\right) + k\left(\frac{-q}{r_1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad V = k\,q\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right) \qquad (*)$$

Comme : $\quad r \gg a \Rightarrow \begin{cases} r_1 \approx r_2 \approx r \\ \theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta \end{cases}$

Alors on peut approcher
$$\begin{cases} d = r_1 - r_2 = a\cos\theta \\ \text{et} \\ r_1\, r_2 = r^2 \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation (*), on obtient :

Le moment dipolaire.

$$(*) \Rightarrow V = k\frac{\overbrace{qa}^{P}\cos\theta}{r^2} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{P\cos\theta}{r^2}\right)$$

D'où le potentiel électrique crée par un dipôle électrique en un point **M** détecté par les coordonnées polaires **(r , θ), M(r , θ)** (figure I.9), est définit par :

$$\boxed{V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p\cos\theta}{r^2}\right)}$$

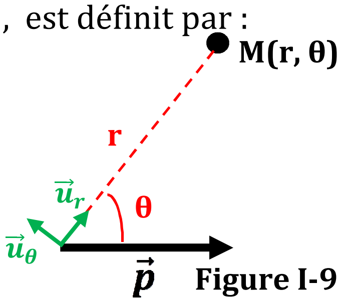


Figure I-9

4. Champ créé par un dipôle à grande distance :

Pour calculer le champ électrostatique, il nous suffit maintenant d'utiliser la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V(r,\theta)$ en coordonnées cylindriques.

On obtient ainsi : $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta - \cancelto{0}{\frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z}$

Les composantes du champ électrique en coordonnées polaires (voir la figure I-10) :

$$\vec{E}(r,\theta) = \begin{cases} E_r = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}p\left(\dfrac{\cos\theta}{r^3}\right) \\ E_\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}p\left(\dfrac{\sin\theta}{r^3}\right) \end{cases}$$

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}p\left(\frac{\cos\theta}{r^3}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p\left(\frac{\sin\theta}{r^3}\right)\vec{u}_\theta$$

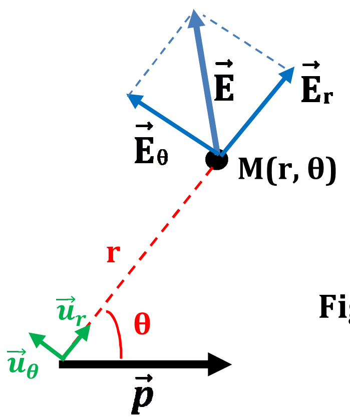


Figure I-10

5. Dipôle placé dans un champ électrique uniforme.

Si on place un dipôle, de moment électrique $\vec{p}$, dans un champ extérieur $\vec{E}$ uniforme (le champs en tout point de l'espace est constant en module et direction), les charges qui le constituent sont soumises à des forces égales et opposées.

$$\vec{F}_+ = -\vec{F}_-$$

Le dipôle subit alors l'action d'un couple $\vec{\Gamma}$:

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} \qquad \vec{\Gamma} \perp \text{Plan } (\vec{p}\,,\vec{E})$$

En module : $\|\vec{\Gamma}\| = \|\vec{p}\| \|\vec{E}\| \, |\sin\alpha| \;\Rightarrow \|\vec{\Gamma}\| = a\,q\,E\,|\sin\alpha|$

Ce couple fait pivoter (tourner) le dipôle pour l'aligner parallèlement au champ extérieur $\vec{E}$ **.**

Alors si on libère un dipôle(figure I-11) dans un espace où le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme, le dipôle tend sous l'action de $\vec{\Gamma}$ à tourner pour atteindre une position d'équilibre (à $la\ fin\ \vec{\Gamma} = \vec{0}$)dans laquelle $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires.

On pose α l'angle entre $(\vec{p}, \vec{E})$

- Pour α=0 ($\vec{p}$ a le même sens que $\vec{E}$), c'est la position d'équilibre stable.
- Pour α=π ($\vec{p}$ et $\vec{E}$ de sens opposé), c'est la position d'équilibre instable.

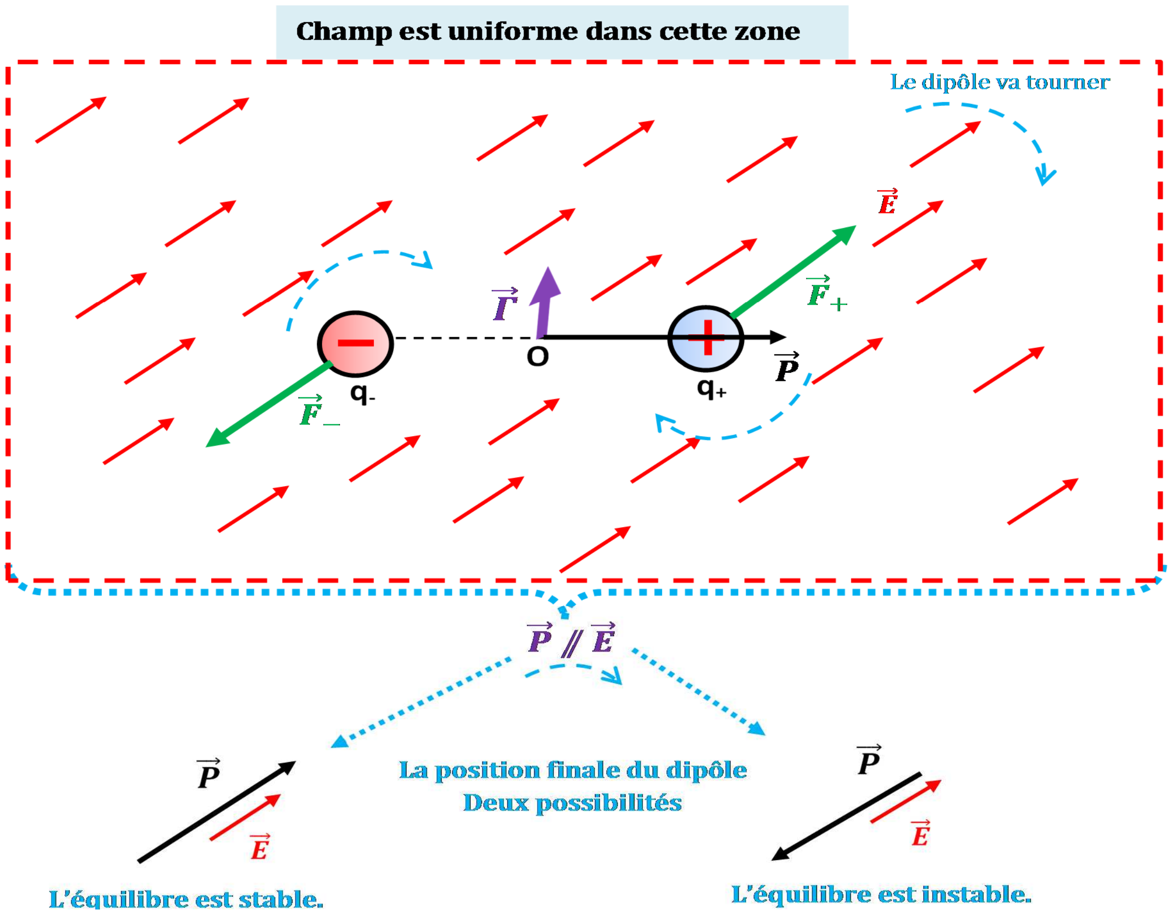


Figure I-11 Dipôle dans un champ électrique

6. Energie potentielle d'un dipôle

L'énergie potentielle E_p d'un dipôle, placé dans un champ électrique $\vec{E}$ est définit par :

$$\boxed{E_p = -\vec{p}.\vec{E} \text{ (produit scalaire)} \Rightarrow E_p = -p\,E\cos\alpha}$$

- Cette énergie est minimale pour : $\alpha = 0 \implies E_p = -p\,E$
- Et maximale pour : $\alpha = \pi \implies E_p = p\,E$

7. Exemple d'application

Exemple 1

On considère un dipôle formé de deux charges électriques (- q et + q) séparées par une distance a . Sachant que : q = 1.5 nC et a = 5 mm.

1)- Quel est le module de son moment dipolaire p.

2)- Calculer son énergie interne.

3)- Ce dipôle est placé dans un champ électrique uniforme E = 45 kV /m. Exprimer en joules puis en électron- volts, l'énergie potentielle maximale qui résulte de l'interaction de ce dipôle et du champ. (1eV = 1,6 10 -19 J).

Solution :

1°) Moment dipolaire :

$$\vec{p} = q\vec{a} \Rightarrow \|\vec{p}\| = |q|\|\vec{a}\|$$

$$\Rightarrow P = q\,a \qquad\qquad \text{AN: } P = 7.5\ 10^{-12}\ \text{C.m}$$

2)- Calculer son énergie interne.

L'énergie interne de deux particules est :

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow U = k\frac{(-q)(+q)}{a^2}$$

$$U = -k\frac{q^2}{r^2} \quad \text{AN}: U = 2.7\ 10^{-4}\ \text{J}$$

3)- Calcul l'énergie potentielle maximale :

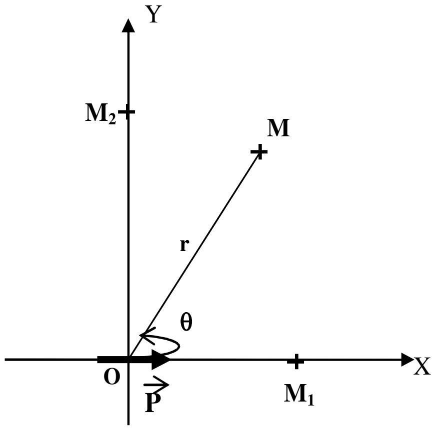
L'energie est maximale pour les position instable α = π .

$$E_p = \text{-}p\,E\cos\alpha = pE \ (\cos\pi = \text{-}1)$$

$$\text{AN}: E_p = 3.375\,10^{-7}\,\text{J} = 2.11\ \ 10^{12}\,\text{eV}$$

Exemple 2

Soit un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$, le potentiel crée par ce dipôle en point $\mathbf{M(r, \theta)}$ est définit par : $\mathbf{V = k\,P\frac{\cos\theta}{r^2}}$



1- Déterminer le champ électrique au point M créé par ce dipôle.

2- Déduire la valeur du champ et le potentielle électrique crée par ce dipôle au point $\mathbf{M_1(a,0)}$ **et** $\mathbf{M_2(0,b)}$.

On donne : $\mathbf{p=7.5\ 10^{-12}}$ **C.m, a= 2 mm, b=4mm.**

Solution :

3- Déterminer le champ électrique au point M créé par ce dipôle.

On sait que : $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$

Alors, en dérivant l'expression de V on obtient les composantes du champ crée par le dipôle électrique :

$$\vec{E}(r,\theta) = \begin{cases} E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}p\left(\frac{\cos\theta}{r^3}\right) \\ E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p\left(\frac{\sin\theta}{r^3}\right) \end{cases}$$

2- Déduire la valeur du champ et le potentielle électrique crée par ce dipôle au point M_1 et M_2.

Il faut déterminer les position de chaque point en coordonnées polaires.

Au point M_1 : r=2mm et $\theta=0$

Au point M_2 :r=4mm et $\theta=\pi/2$

<u>Le potentiel :</u>

$$V(M_1) = 9\ 10^{\ 9}\ 7.5\ 10^{-12}\frac{\cos 0}{(2\ 10^{-3})^2} = 16875\,\mathrm{V}$$

$$V(M_2) = 9\ 10^{\ 9}\ 7.5\ 10^{-12}\ \frac{\cos(\pi/2)}{(4\ 10^{-3})^2} = 0\,V$$

<u>Le champ électrique</u>

$$\vec{E}(M_1) = \begin{cases} E_r = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0} p\left(\dfrac{\cos 0}{r^3}\right) = 1.6875\ 10^7\ V/m \\ E_\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} p\left(\dfrac{\sin 0}{r^3}\right) = 0\ V/m \end{cases}$$

$$\vec{E}(M_2) = \begin{cases} E_r = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0} p\left(\dfrac{\cos\pi/2}{r^3}\right) = 0\ V/m \\ E_\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} p\left(\dfrac{\sin\pi/2}{r^3}\right) = 8.4375\ 10^6\ V/m \end{cases}$$

Exemple 3

En première approximation, une molécule d'eau peut être considérée comme formée de deux ions H^+ et un ion O^{2-}. L'atome d'oxygène portant la charge -2δ relié à deux atomes d'hydrogène portant chacun la charge $+\delta$.

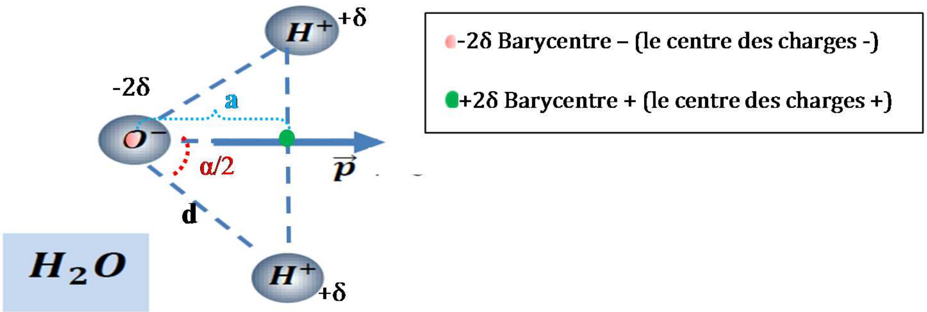
δ vaut 33% de la charge élémentaire ; l'angle entre les deux liaisons O-H est noté α ; la distance entre un atome d'oxygène et un atome d'hydrogène est notée d.

1) Faire un schéma de cette molécule.
2) Déterminer l'expression du moment dipolaire de la molécule d'eau et calculer sa valeur.

Données : Charge élémentaire : e = 1.60 × 10−19 C ; Distance O-H : d = 0.952° A (1° A = 1 × 10^{-10}m); Angle α : α = 104°45′ (1′=1/60ième de degré).

Solution

1) Schéma de la molécule H_2O :



2) Déterminer l'expression du moment dipolaire de la molécule d'eau et calculer sa valeur, en C m.

On sait que : $\vec{p} = q\vec{a}$ avec $q = 2\delta = 2 * \underbrace{0.33\ e}_{\delta}$ et $a = d\cos\frac{\alpha}{2}$

Calcul δ :

D'où :

$$p = 2\delta\, d\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$p = 0.66 e\, d\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{AN} : p = 6.137 10^{-30}\ \text{C.m}$$

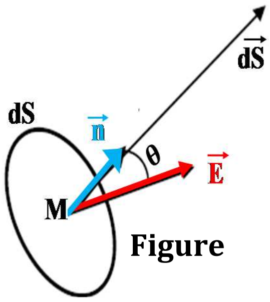
Cours No 7

I.5 THÉORÈME DE GAUSS

I.5.1 Flux du champ électrostatique

On définit le flux élémentaire du champ électrique $\vec{E}$ à travers une surface élémentaire $d\vec{s}$ par la grandeur scalaire (voir la figure I-) :

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{s}$$



$d\vec{s}$ est un vecteur normal à la surface élémentaire ds ($d\vec{s} \perp ds$)

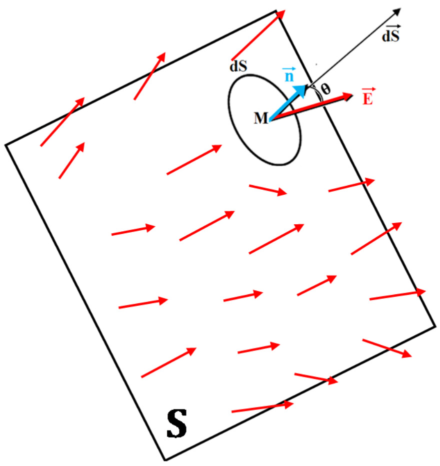
Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire porté par $d\vec{s}$, alors :

$d\vec{s} = ds\,\vec{n}$

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{n}\ ds$$

Le flux total Φ à travers une surface S est donné par l'intégrale :

$$\Phi = \int d\Phi = \iint_S \vec{E}.d\vec{s}$$



$$\Phi = \iint_S \overbrace{\vec{E}.\vec{n}}^{\text{Le produit scalaire}}\ ds$$

D'où $\Phi = \iint_S ds\,\|\vec{E}\|.\overbrace{\|\vec{n}\|}^{1}\cos\theta$

θ est l'angle entre le champ électrique $\vec{E}$ et la normale à la surface ds ($\theta = (\vec{E},\vec{n})$)

L'unité de Φ dans le système international est Volte . mètre (V.m)

Remarque :

- Dans le cas d'une surface fermée le vecteur unitaire $\vec{n}$ est toujours orienté de l'intérieur vers l'extérieur.

I.5.2 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss établit une relation entre le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée et la charge dans le volume délimitée par cette surface, appelée surface de Gauss (S_G).

Enoncé : Dans le vide , le flux total du champ électrostatique sortant d'une surface fermée S_G (réelle ou fictive) est égal à la somme algébrique des charges se trouvant à l'intérieur de cette surface divisée par ε_0

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

$\sum q_i$ est la somme algébrique des charges dans le volume délimité par la surface fermée (surface de Gauss S_G).

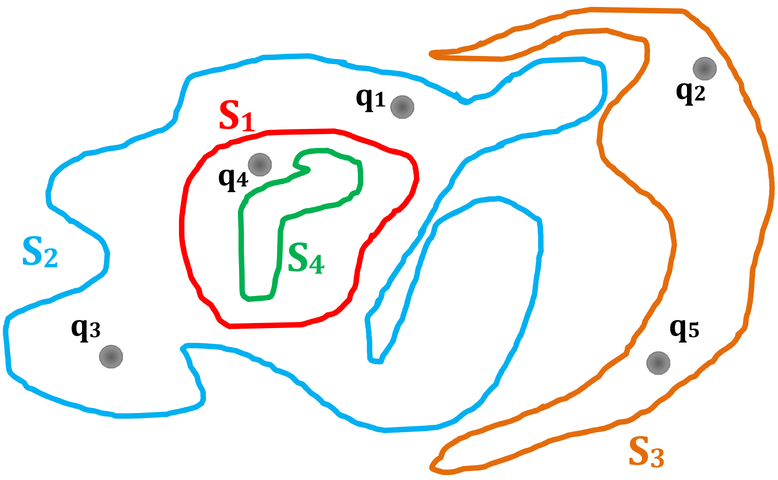
Exemple 1 :

Soit la distribution de charges et les surfaces fermées ci-jointes avec les valeurs de charges suivantes (voir la figure ci-dessou) :

q_1=+50µC, q_2=-20µC, q_3=+35 µC ,q_4=-15µC et q_5= -42 µC.

On donne : ε_0 =8.845 10^{-12} (UI)

- Quels sont les flux électriques respectifs traversant les surfaces S_1, S_2, S_3 et S_4 ?



Solution :

D'après le théorème de Gauss, le flux à travers une surface fermée est :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \Phi = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

1- Le flux à travers S_1 :

$$\Phi_{S_1} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{q_4}{\varepsilon_0} \quad \text{, AN: } \Phi_{S_1} = -1.69587\ 10^6\ \mathrm{V.m}$$

2- Le flux à travers S_2 :

$$\Phi_{S_2} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{(q_4 + q_1 + q_3)}{\varepsilon_0} \quad \text{, AN: } \Phi_{S_2} = 7.91407\ 10^6\ \mathrm{V.m}$$

3- Le flux à travers S_3 :

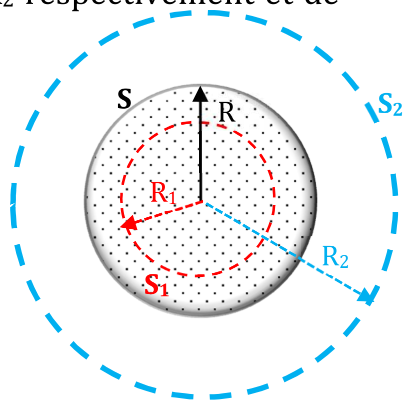
$$\Phi_{S_3} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{(q_2 + q_5)}{\varepsilon_0} \quad \text{, AN: } \Phi_{S_3} = -7.00961\ 10^6\ \mathrm{V.m}$$

1- Le flux à travers S_4 :

$$\Phi_{S_4} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{0}{\varepsilon_0} \quad \text{, AN: } \Phi_{S_4} = 0\ \mathrm{V.m}$$

Exemple 2 :

Soit une sphère de rayon R chargée uniformément en volume avec une densité ρ>0. Quels sont les flux électriques respectifs traversant les surfaces sphériques imaginaires (fictives ,non réelles) S_1 et S_2 de rayon R_1 et R_2 respectivement et de même centre que la sphère S (voir la figure ci-contre).



Solution :

Détermination l'expression de flux :

1- A travers S_1 :

On sait que : $\Phi_{S_1} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{q_{S_1}}{\varepsilon_0}$, En observant la figure, on remarque que la charge qui se trouve à l'intérieure de S_1 est la charge totale portée par la sphère elle-même (sphère S_1). Tout le volume de S_1 est chargé par la densité ρ.

$$q_{S_1} = \iiint_{v_{S_1}} \rho dv = \overbrace{\rho}^{Cte} \iiint_{v_{S_1}} dv = \rho v_{S_1} = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

D'où : $\Phi_{S_1} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{S_1} = \rho\frac{4}{3\varepsilon_0}\pi R_1^3$

2 - A travers S_2

On sait que : $\Phi_2 = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{q_{S_2}}{\varepsilon_0}$, en observant la figure , on remarque que la charge à l'intérieure de la sphère S_2 est la charge totale portée par la sphère réelle S.

Comme la distribution de charge est volumique, alors :

$$q_{S_2} = q_S = \iiint_{v_S} \rho dv = \overbrace{\rho}^{Cte} \iiint_{v_S} dv = \rho v_S = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

D'où : $\Phi_{S_2} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{S_2} = \rho\frac{4}{3\varepsilon_0}\pi R^3$

Remarque

- Si $\vec{E}$ est parallèle à la surface S $\left(\vec{E} \perp d\vec{s}\right) \Rightarrow \vec{E}.d\vec{s} = 0 \Longrightarrow$le flux est nul.
- Si $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface $(\vec{E} \parallel d\vec{s}\ )$ **et** $E = \text{Cte} \Rightarrow$ le flux $\Phi = \iint_S \vec{E}.d\vec{s} = E\ S$
- Si le flux à travers une surface est nul, cela signifie qu'il n'y a pas de charges à l'intérieur de la surface de GAUSS.

I.5.2 Applications de théorème de Gauss

Ce théorème permis dans certain cas de problèmes qui présentent une symétrie, de calculer le champ électrique. La méthode est plus simple que celle du calcul direct.

En générale si le champ électrique $\vec{E}$ est constant (en direction et en module) sur la surface de Gauss, alors on peut le faire sortir de l'intégrale ce qui donne :

- Pour $\theta = \left(\vec{E},\vec{n}\right) = 0 \Longrightarrow \Phi = \oiint_S E\ ds = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E \oiint_S ds = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$

$$\Longrightarrow \mathrm{E} = \frac{\sum q_{\mathrm{i}}}{\varepsilon_0 \oiint_S \; ds}$$

➤ Pour $\theta = (\vec{E}, \vec{n}) = \pi \;\Longrightarrow\; \Phi = \oiint_S \; -E\, ds = \frac{\sum q_{\mathrm{i}}}{\varepsilon_0} \;\Longrightarrow -E \oiint_S \; ds = \frac{\sum q_{\mathrm{i}}}{\varepsilon_0}$

$$\Longrightarrow \mathrm{E} = -\frac{\sum q_{\mathrm{i}}}{\varepsilon_0 \oiint_S \; ds}$$

- Etapes à suivre pour déterminer *E*

Pour déterminer le champ électrique crée par une charge qui présente une symétrie, il faut suivre c'est étapes :

- Distinguer le point **M** où on veut calculer le champ ***E***.
- Prédire la direction du champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ au point **M**.
- Choisir une surface fermée passant par **M**, c'est la surface de Gauss $\mathbf{S_G}$ (réelle ou fictive).
- Calculer $\oiint_S \; \vec{E}.d\vec{s}$.
- Identifier (déterminer) la charge Q_{int} qui se trouve à l'intérieure de la surface de Gauss S_G. Plusieurs cas existent :
  - Si à l'intérieur de S_G se trouve *n* charges ponctuelles $q_i \Longrightarrow Q_{int} = \sum_1^n q_i$
  - Si à l'intérieur de SG se trouve une distribution de charge continue :
    1- Cas de distribution linéique : $Q_{int} = \int \lambda\, dl$

    2- Cas de distribution surfacique : $Q_{int} = \iint \; \sigma\, ds$

    3- Cas de distribution volumique : $Q_{int} = \iiint \; \rho\, dv$
- Ecrire l'égalité de Gauss :

$$\overbrace{\oiint_S \; \vec{E}.d\vec{s}}^{on\ remplace\ par\ le\ tèrme\ calculé} \quad = \quad \frac{\overbrace{Q_{int}}^{on\ remplace\ par\ Q_{int}\ calculée}}{\varepsilon_0}$$

Et en déduire le champ E au point M.

Exemples D'application :

Exemple 01 : Champ créé par un fil rectiligne infini

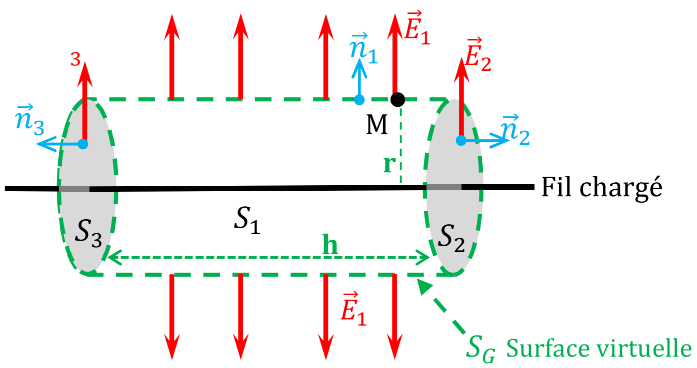
Soit un fil rectiligne de longueur infini chargé uniformément avec une densité $\lambda>0$.

- Déterminer le champs en tout point de l'espace créé par ce fil.

Solution :

Expression du champ électrique :

On remarque que la distribution de charge est invariante par rotation autour du fil et par translation parallèle au fil. La surface de Gauss S_G dans ce cas est un cylindre fermé d'axe confondu avec le fil chargé (Voir la figure). Soit h et r respectivement la hauteur et le rayon de ce cylindre.



Suivant le théorème de gauss :

$$\Phi = \oint\!\!\oint_{S_G} \vec{E}.d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- Calcul le flux du champ électrique à travers la surface S_G

Le flux total : $\Phi_{S_G} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$

$$\oint\!\!\oint_{S_G} \vec{E}.d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1.d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2\,.d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3.d\vec{s}_3$$

Comme $\vec{E}_2 \perp d\vec{s}_2$ et $\vec{E}_3 \perp d\vec{s}_3$ alors

$$\iint_{S_2} \vec{E}_2.d\vec{s}_2 = \iint_{S_3} \vec{E}_3.d\vec{s}_3 = 0$$

Et comme $\vec{E}_1 \parallel d\vec{s}_1$ et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E}.d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1.d\vec{s}_1 = \iint_{S_1} E \ \ ds_1$$

Nous obtenons donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E_1.2\pi.r.h$$

Calcul de la charge intérieure de la surface S_G

Distribution linéique uniforme : $dq = \lambda.dl \ \Rightarrow \ Q_{int} = \int dq = \lambda \int_{\mathrm{h}} \ dl \ \Rightarrow$

$Q_{int} = \lambda.h$

En remplaçant dans l'égalité de Gauss on obtient :

$$E_1.2\pi.r.h = \frac{\lambda.h}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{2K\,\lambda}{r}}$$

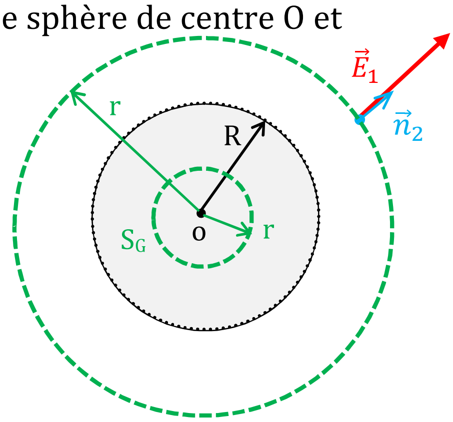
Exemple 02 : Champ créé par sphère uniformément chargée en surface

Soit une sphère S de centre O et de rayon R, uniformément chargée **en surface par** une densité surfacique σ>0 .

Calculer le champ électrostatique créé par cette sphère en tout point de l'espace.

Solution

On remarque que la distribution de charge est de symétrie sphérique alors le champ est radial. La surface de Gauss S_G dans ce cas est une sphère de centre O et de rayon r .



- Lorsque r< R (à l'intérieure de la sphère S)

C'est claire que à l'intérieure de S_G la charge est nulle.

Si $Q_{int} = 0 \quad \Longrightarrow \quad E(r) = 0$

- Lorsque r>R (à l'extérieure de la sphère S)

Calcul le flux du champ électrique à travers la surface S_G

Dans ce cas $\vec{E} \parallel \vec{n}$

$$\Phi_{S_G} = \oiint_{S_G} \vec{E}.d\vec{s} = \oiint_{S_G} \overbrace{\vec{E}.\vec{n}}^{E}.ds = E \oiint_{S_G} ds$$

$$\Phi_{S_G} = ES_G \quad \Rightarrow \Phi_{S_G} = 4\pi\, r^2 E$$

- Déterminer la charge qui se trouve à l'intérieure de la surface de Gauss

C'est claire que à l'intérieure S_G la charge est distribuée sur la surface de sphère chargée S.

D'où

Distribution surfacique : $Q_{int} = \iint_S \overset{Cte}{\sigma}\ ds \quad \Rightarrow Q_{int} = \sigma \iint_S \ ds\, Q_{int}$

$$Q_{int} = \sigma\, S = 4\pi R^2\, \sigma$$

En remplaçant dans l'égalité de Gauss on obtient :

$$4\pi\, r^2 E = \frac{4\pi R^2\, \sigma}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}$$

Alors le champ créé par sphère chargée uniformément en surface est :

$$E(r)\begin{cases} E(r) = 0 & , r < R \\ E(r) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{r^2} & , r \geq R \end{cases}$$

Remarque :

Des solutions détaillées sur d'autre cas d'applications de théorème de Gauss se trouvent dans le **livre électrostatique et l'électrocinétique** de **page 66 à 81.**

Le lien :https://www.academia.edu/5783722/LA_PHYSIQUE_EN_FAC