درس مقاييس الشكل والتمركز

المحتوى:

- **العزوم**
- **العزوم البسيطة**
- **العزوم المركزية**
- **العزوم حول قيمة**
- **الالتواء**
- **معامل فيشر**
- **معامل يول وكندال**
- **التفلطح**
- **معامل كيلي**
- **مقاييس التمركز**
- **معامل جيني**

المدة حصتان (6 ساعات)

تمهيد:

إذا كانت مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت تسمح بتلخيص بيانات أي ظاهرة في صورة أرقام بسيطة تعطي فكرة عن خصائص توزيع هده البيانات ودرجة تجانسها أو اختلافها فإن هذا الوصف الذي تعطيه يبقى تنقصه الدقة الكافية المطلوبة للتعرف على خواص التوزيع خاصة من حيث انتشار البيانات على المنحنى البياني الممثل لها من حيث التوائه أو تفلطحه عن الوضع الطبيعي، لذا دعت الحاجة لاستخدام مقاييس أخرى لتحقيق هذا الغرض سميت بمقاييس الشكل.

1- العزوم: Moments

العزوم قد تكون حول نقطة الأصل أو حول المتوسط الحسابي أو حول أي نقطة معينة، فالعزم الأول حول نقطة الأصل مثلا هو متوسط قيم الظاهرة والعزم حول المتوسط الحسابي هو متوسط انحرافات قيم التوزيع عن المتوسط الحسابي لها. أما رتبة العزم فتحدد بدرجة القوة (الأس) التي ترفع إليها القيم أو انحرافاتها عن المتوسط الحسابي. وتستخدم العزوم في إيجاد المعامل العزمي للالتواء وكذلك معامل التفلطح.

ويمكن قياس العزوم حول الصفر وتسمى بالعزوم الصفرية أو حول المتوسط الحسابي وتسمى في هذه الحالة بالعزوم المركزية أو يتم قياس العزوم حول أي نقطة ثابتة.

1-1 العزوم حول نقطة الصفر (العزوم البسيطة): les moments non centrés

إذا كانت لدينا ظاهرة معينة X، نأخذ القيم: $X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots X_n$ فإن:

العزم الأول البسيط يمكن الحصول عليه من العلاقة: $m_1 = \frac{\Sigma X_i}{\ }$

العزم الثاني: $m_2 = \frac{\sum X_i^2}{\mathrm{n}}$

العزم الثالث: $m_3 = \frac{\sum X_i^3}{\mathrm{n}}$

.

.

.

العزم الكائي: $m_k = \frac{\sum X_i^k}{k}$. (العزم البسيط من الرتبة kهو عبارة عن الوسط الحسابي لقيم المتغير الإحصائي مرفوعة إلى القوة k)[1]

مثال:

إذا كانت لدينا القيم 2، 4، 5، 9. أوجد العزم الأول والثاني والرابع حول نقطة الصفر؟

الحل:

- العزم الأول: $m_1 = \frac{\sum X_i}{\mathrm{k}} = \frac{9+5+4+2}{4} = \frac{20}{4} = 5$

- العزم الثاني: $m_2 = \frac{\sum X_i^2}{k} = \frac{81+25+16+4}{4} = \frac{126.5}{4} = 31.5$

- العزم الثالث: $m_3 = \frac{\sum X_i^3}{k} = \frac{729+125+64+8}{4} = \frac{926}{4} = 231.5$

- العزم الرابع: $m_4 = \frac{\sum X_i^4}{k} = \frac{6581+625+256+16}{4} = \frac{7458}{4} = 1864.5$

نلاحظ أن: العزم الأول = المتوسط الحسابي، والتباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول، ومنه فإن التباين في المثال السابق = 23.5 – 16 = 7.5 أي:

$$V_X^2 = m_2 - m_1^2$$

[1]جيلالي جلاطو، مرجع سابق، ص 77.

- أما إذا كانت البيانات مبوبة في شكل توزيع تكراري يكون العزم الكائي حول الصفر كما يلي:

$m_k = \frac{\sum n_i X_i^k}{\sum n_i}$،حيث تشير x إلى القيم الظاهرة أو مراكز الفئات، أما فتشير إلى عدد مرات تكرار فئاتها. ومنه يمكن حسابها من الرتبة 1 إلى kكما يلي:

العزم الأول: $m_1 = \frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i}$

العزم الثاني: $m_2 = \frac{\sum n_i X_i^2}{\sum n_i}$

العزم الثالث: $m_3 = \frac{\sum n_i X_i^3}{\sum n_i}$

.

.

.

العزم الكائي: $m_k = \frac{\sum n_i X_i^k}{\sum n_i}$

حيث: $\sum n_i$ =مجموع التكرارات.

X_i =القيم أو مراكز الفئات

مثال: أوجد العزم الأول والثاني والثالث للبيانات المبوبة في جدول التوزيع التالي، ثم أوجد التباين والانحراف المعياري؟

الفئة	[3-1]	[5-3]	[7-5]	[9-7]	[11-9]	المجموع
التكرار	2	3	4	5	6	**20**

الحل:

الفئة	التكرار (n_i)	مركز الفئة (x_i)	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	$n_i x_i^3$
]3-1]	2	2	4	8	16
]5-3]	3	4	12	48	192
]7-5]	4	6	24	144	864
]9-7]	5	8	40	320	2560
]11-9]	6	10	60	600	6000
المجموع	**20**		**140**	**1120**	**9632**

$$m_1 = \frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i} = \frac{140}{20} = 7 = \bar{X} = \text{العزم الأول}$$

$$m_2 = \frac{\sum n_i X_i^2}{\sum n_i} = \frac{1120}{20} = 56 = \text{العزم الثاني}$$

$$m_3 = \frac{\sum n_i X_i^3}{\sum n_i} = \frac{9632}{20} = 481.6 = \text{العزم الثالث}$$

التباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول

.7 = 49 – 56 =

ومنه الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{v_x} = \sqrt{7} = 0.83$$

2-1 العزوم المركزية les moments centrés:

بالحصول على انحرافات قيم الظاهرة xعن الوسط الحسابي يمكن الحصول على العزوم المركزية حول الوسط الحسابي ذو الرتبة kفي حالة بيانات غير مبوبة من العلاقة التالية:

$$\mu_k = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^k}{n}$$

حيث نرمز للعزم المركزي حول المتوسط الحسابي بالرمز μ.

العزم الأول حول المتوسط الحسابي:

$$\mu_1 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})}{n}$$

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي:

$$\mu_2 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n}$$

العزم الثالث حول المتوسط الحسابي:

$$\mu_3 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^3}{n}$$

.

.

.

العزم الكائي حول المتوسط الحسابي:

$$\mu_k = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^k}{n}$$

مثال: أوجد العزم الأول والثاني والثالث حول المتوسط الحسابي للقيم التالية 2، 4، 9؟

الحل: $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{\sum} = \frac{2+4+9}{3} = 5$

x_i	$(X_i - \overline{X})$	$(Xi - \overline{X})^2$	$(Xi - \overline{X})^3$
2	3-	9	-27

4	0	0	0
8	3	9	27
المجموع	0	16	0

$\mu_1 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})}{n} = \frac{0}{3} = 0$

$\mu_2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{16}{3} = 5.33$

$\mu_3 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^3}{n} = \frac{0}{3} = 0$

ويلاحظ من خلال هذه النتائج أن:

- العزم الأول حول المتوسط الحسابي يساوي صفر دائما.

- العزم الثاني جول المتوسط الحسابي يساوي التباين.

أما اذا كانت البيانات متكررة أو مبوبة في جداول توزيع تكراري فإن العزوم حول المتوسط الحسابي يمكن حسابها على النحو التالي: $\mu_k = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^{nk}}{\sum n_i}$ حيث:[1]

العزم الأول المركزي: $\mu_1 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})}{\sum n_i}$

العزم الثاني المركزي: $\mu_2 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^2}{\sum n_i}$

العزم الثالث المركزي: $\mu_3 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^3}{\sum n_i}$

.

[1] Jean-Louis Monino, jean Michel kosianski, François le cornu, é& « statistique descriptive 3 Edition, DUNOD, paris. 2000. P38.

..

العزم الكائي المركزي: $\mu_k = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^{nk}}{\sum n_i}$

مثال: أوجد العزم الأول والثاني حول المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة في الجدول التالي:

الفئة	[2-0]	[4-2]	[6-4]	[8-6]	المجموع
التكرار	1	2	3	6	12

الحل:

الفئة	n_i	x_i	nx_i	$(x_i-\overline{x})$	$n_i(x_i-\overline{x})$	$n_i(x_i-\overline{x})^2$
[2-0]	1	1	1	4-	4-	16
[4-2]	2	3	6	2-	4-	4
[6-4]	3	5	15	0	0	0
[8-6]	4	7	28	2	8	16
المجموع	**10**		**50**		**0**	**36**

العزم الأول حول المتوسط الحسابي $=0 = \frac{0}{4} = \frac{\sum ni(x_i - \overline{x})}{\sum n_i} = \mu_1$

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي $=9 = \frac{36}{4} = \frac{\sum ni(x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i} = \mu_2$

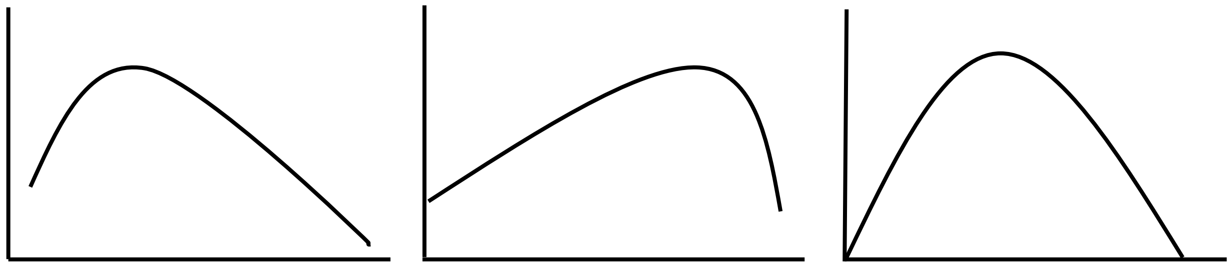
2 تحديد شكل التوزيع

يحدد شكل التوزيع التكراري بالنسبة للقيم المركزية (الوسط الحسابي أو الوسيط)، ويمكن تحديد شكل التوزيع باستخدام مقاييس الالتواء والتفلطح.

1-2 الالتواء asymétrie

عدم التناظر من اليمين أو من اليسار مقارنة بتوزيع متناظر بالنسبة للقيمة المركزية، ويعتبر منحنى التوزيع التكراري المتعدل هاما جدا في الدراسات والتحليلات الإحصائية. إن هذا المنحنى الذي تتساوى عنده مقاييس النزعة المركزية الثلاث ($\bar{X}$= Me=Mo)نظري ونادر الوقوع، فالمنحنيات التي نحصل عليها عادة تكون ملتوية ناحية اليمين أو ناحية اليسار أو قريبة من الاعتدال.

فقد عرفنا عند دراستنا لمقاييس النزعة المركزية أن التوزيعات الإحصائية يمكن أن تأخذ أحد الأشكال التالية حسب العلاقة بين المقاييس الثلاث:[1]



توزيع متناظر $\bar{X} = Me = M_0$

التواء ناحية اليمين $\bar{X} > Me > M_0$

التواء ناحية اليسار $\bar{X} < Me < M_0$

سنحاول معرفة درجة تناظر (تماثل) توزيع البيانات حول المتوسط الحسابي باستخدام العزوم والانحراف المعياري.

من الطبيعي أن يكون هناك أساس يمكن استخدامه لقياس درجة الالتواء يعتمد على التوزيع المعتدل. والذي يكون له توزيع متماثل معامل التواءه يساوي الصفر. وعلى ذلك فإن المقارنة تكون على أساس أن التوزيع يكون متماثلا إذا كان معامل الالتواء يساوي الصفر. وذلك إذا كان

[1] Bernard py, opit, p 138.

ذيل التوزيع الأيمن يساوي ذيل التوزيع الأيسر كالناقوس. ويكون التوزيع ملتويا إلتواءا موجبا إذا كان معامل الالتواء موجب وذلك عندما يكون ذيل التوزيع الأيمن أطول من ذيله جهة اليسار.[1]

أ- معامل فيشر للالتواء coefficient de ficher

يعتمد هذا المعامل على قيمة العزم الثالث المركزي، الذي نقسمه على الانحراف المعياري من نفس المرتبة ونرمز له بالرمز γ وصيغته هي:

$$\gamma_i = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

حيث: σ_x يمثل الانحراف المعياري للظاهرة . x و $\sigma_x^3 = \sqrt{\mu_2^3}$

ويكون لدينا ثلاث حالات هي:

- توزيع إحصائي متناظر: $\gamma_1 = 0$

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليمين: $\gamma_1 > 0$

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليسار: $\gamma_1 < 0$

ب- معامل بيرسون للالتواء Coefficient de Pearson

$$P_1 = \frac{(\mu_3)^2}{(\mu_2)^3}$$

وتكون لدينا ثلاث حالات كذلك:

- توزيع إحصائي متناظر: $P_1 = 0$

---

[1] مصطفى عبد المنعم الخواجة، مرجع سابق، ص 159.

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليمين: $P_1 > 0$

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليسار: $P_1 < 0$

ج- **معامل يول وكندال للالتواء coefficient de yule et kendall**[1]

ويستعمل هذا المعامل بالنسبة للجداول الإحصائية المفتوحة.

$$cyk = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

أما الحالات الممكنة فهي:

- توزيع إحصائي متناظر: $cyk = 0$

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليمين: $cyk > 0$

- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليسار: $cyk < 0$

2-2 **التفلطح aplatissment (تطاول أو تفلطح المنحنى مقارنة بالتوزيع الطبيعي)**

ويقصد بالتفلطح مدى اتساع وضعف قمة منحنى التوزيع ولقد أصطلح على اعتبار منحنى التوزيع الطبيعي متوسط التفلطح.

وتوجد لذلك عدة معاملات لقياس التفلطح أهمها:

أ-معامل بيرسون للتفلطح

[1] عبد الناصر موسى، مرجع سابق، ص 105.

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{(\sigma_x)^4} = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

والحالات الممكنة هي:

- توزيع معتدل التفلطح (توزيع طبيعي) $\beta_2 = 3$

- منحنى التوزيع متطاول (مدبدب) $\beta_2 > 3$

- منحنى التوزيع متفلطح $\beta_2 < 3$

ب- معامل للتفلطح coeffcient de ficher[1]:

وهو عبارة عن معامل بيرسون مطروحا منه 3.

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3$$

والحالات الممكنة هي:

- منحنى التوزيع معتدل التفلطح: $\gamma_1 = 0$

- منحنى التوزيع معتدل التفلطح $\gamma_2 > 0$

- منحنى التوزيع متفلطح $\gamma_2 < 0$

مثال: أدرس شكل منحنى التوزيع التكراري الآتي باستخدام معامل فيشر للالتواء ومعامل بيرسون للتفلطح؟.

x_i	1	2	3	4	المجموع

Jean-Louis Monino, jean Michel kosianski, François le cornu, opcit , p40.2[1]

n_i	2	4	6	8	**20**

الحل:

x_i	n_i	$n_i X_i$	$(x_i-\bar{X})$	$n_i(x_i-\overline{X})$	$n_i(x_i-\bar{X})^2$	$n_i(x_i-X)^3$	$n_i(x_i-\bar{X})^3$
1	2	2	-2	-12	8	-16	32
2	4	8	-1	-4	4	-4	4
3	6	18	0	0	0	0	0
4	8	32	1	8	8	8	8
المجموع	**20**	**60**		**8**	**20**	**-12**	**44**

$$\bar{X} = \frac{\sum niX_i}{\sum n_i} = \frac{60}{20} = 3$$

العزم الأول: $\mu_1 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})}{\sum n_i} = \frac{8}{20} = 0.4$

العزم الثاني: $\mu_2 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^2}{\sum n_i} = \frac{20}{20} = 1$

$$\sigma_x = \sqrt{1} = 1$$

العزم الثالث: $\mu_3 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^3}{\sum n_i} = \frac{-12}{20} = -0.6$

العزم الرابع: $\mu_4 = \frac{\sum ni(X_i - \overline{X})^4}{\sum n_i} = \frac{44}{20} = 2.2$

ومنه معامل فيشر للالتواء $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-0.6}{(1\ )^3} = (-0.6)$

نلاحظ أن معامل فيشر للالتواء سالب، هذا يعني أن منحنى التوزيع التكراري ملتوي ناحية اليسار.

معامل بيرسون للتفلطح:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{(\mu_x)} = \frac{2.2}{1} = 2.2$$

معامل بيرسون للتفلطح أقل من 3 هذا يعني أن منحنى التوزيع يميل لتفلطح.

ج- معامل كيلي للتفلطح

هناك معامل آخر يمكن استعماله في حساب معامل التفلطح اعتمادا على الربيعيات والمئينات ويستخدم عندما يكون جدول التوزيع التكراري مفتوح من البداية أو من النهاية، ويعطي هذا المعامل بالعلاقة التالية:

$$c_k = \frac{1}{2} . \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1}$$

مثال: لتك لدينا المعلومات التالية:

الفئات	]4-2]	]6-4]	]8-6]	]10-8]	]10-فأكثر	المجموع
التكرار	2	8	10	15	25	**60**

احسب معاملات الالتواء والتفلطح؟

الحل:

الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد
]4-2]	2	2
]6-4]	8	10
]8-6]	10	20
]10-8]	15	40
]10 فأكثر	25	60

المجموع	**60**	