Université de Boumerdès

Filière: Electronique

Spécialité: Electronique des systèmes embarqués

Chapitre 1: La transformée en Z

Dr. Belkacem Samia

2023/2024

1)Introduction

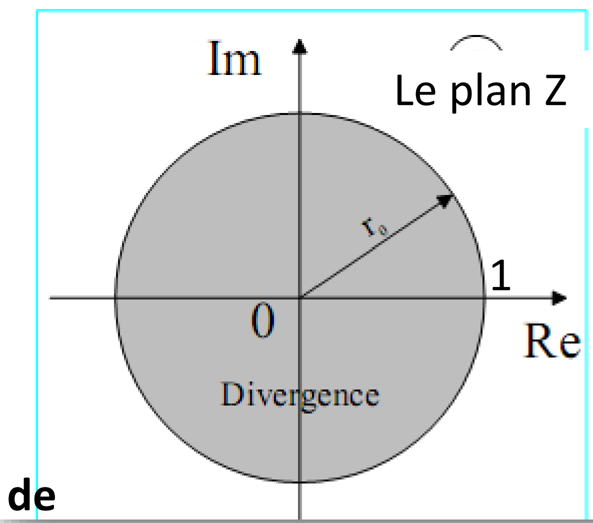
- La transformée en z (TZ) est l'équivalent dans le domaine discret de la transformée de Laplace dans le domaine continu.
- **Utilisation:**
- ✓ **Etude des systèmes de traitement numérique du signal**
- ✓ Conception de filtres numériques

2)Définitions: Ztrans

La TZ d'un signal à temps échantillonné quelconque x[n], noté par X(z) est définie par:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n) z^{-n}$$



Où Z c'est une variable complexe

Pour une séquence finie x[n], la transformée X(z) est un polynôme en z ou z^{-1}

La transformée en z doit toujours indiqué par sa région de convergence

2) Représentation d’un signal par pôles et zéros

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m Z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = A \frac{\prod_{m=1}^{M} (z - z_m)}{\prod_{n=1}^{N} (z - p_n)}$$

Zéros: [o] la valeur de Z pour *Y*(*z*)=0.

pôles : [x] la valeur de Z pour *X*(*z*)=0.

Exemple:

Qu’elles sont les pôles et les zéros de la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{z+1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{3}{4}\right)}$$

Les pôles et zéros de la H(z) sont:

Les zéros sont: $\{-1\}$

Les pôles ½ , −¾

2) Représentation d'un signal par des pôles et zéros

Exemple

$$H(z) = \frac{(z-i)(z+i)}{\left(z-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right)\left(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(z-1)}$$

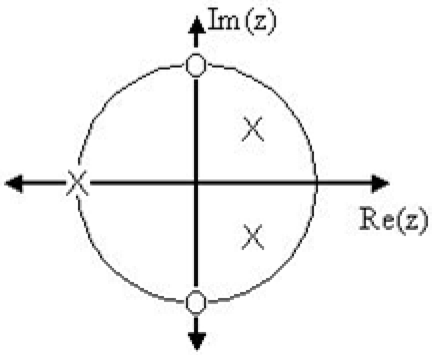
Les zéros sont: $: \{i, -i\}$

Les pôles sont : $: \left\{-1, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$

Zéros: [o]

pôles : [x]

Pole/Zero Plot



3)Région de convergence: ROC

a) On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forn $\sum_n a_n z^n$

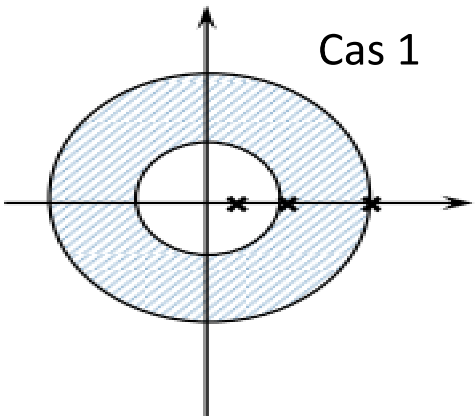
a) Rappel : Séries entières

- Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum^{+\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{N}$

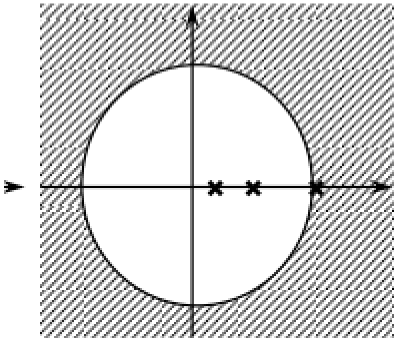
chaque n, est $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ où, par convention, on admet que

$$|z| > \frac{1}{R}$$

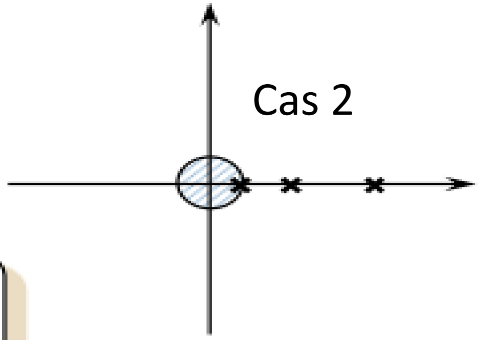
Cas 1



Cas 3



Cas 2



Cas 1- ROC c'est un anneau
Cas 2- à l'intérieur du cercle
Cas 3- à l'extérieur du cercle

3)Région de convergence: ROC

b) Propriétés de RDC (ROC)

➢Le domaine de convergence de la transformée en Z correspond aux valeurs de Z pour lesquelles X(z) est de valeur finie

➢La transformée en z converge lorsque la série réelle suivante converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| x(n) \cdot z^{-n} \right|$$

➢la région de convergence est toujours un anneau, c'est-à-dire est définie par l'ensemble des points z tels que r1 < z < r2, où r1 peut être nul et r2 peut être l'infinie

- RDC est bornée par les pôles
- RDC ne contient aucun pôles

3)Région de convergence: RdC

Table de la transformée en Z

Sequence	Transform	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$\delta[n-m]$	z^{-m}	$\lvert z\rvert > 0,\ m > 0;\ \lvert z\rvert < \infty,\ m < 0$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$a^n \cos(bn)u[n]$	$\frac{1-a\cos(b)z^{-1}}{1-2a\cos(b)z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n \sin(bn)u[n]$	$\frac{a\sin(b)z^{-1}}{1-2a\cos(b)z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

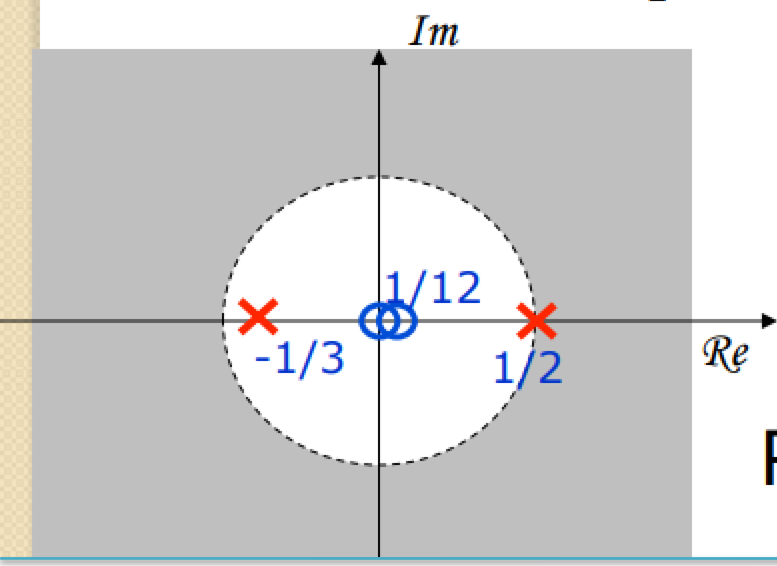
T est la période d’échantillonnage du signal transformé dans lequel on a posé t = nT.

Exemple

Exemple 1: trouvez la région de convergence RdC

$$x(n) = (\tfrac{1}{2})^n u(n) + (-\tfrac{1}{3})^n u(n)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z+\frac{1}{3}} = \frac{2z(z-\frac{1}{12})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})}$$



RdC est bornée par les pôles et elle est extérieure au cercle.

RdC ne contient aucun pôle.

4) Propriétés de la TZ

- ***Linéarité***

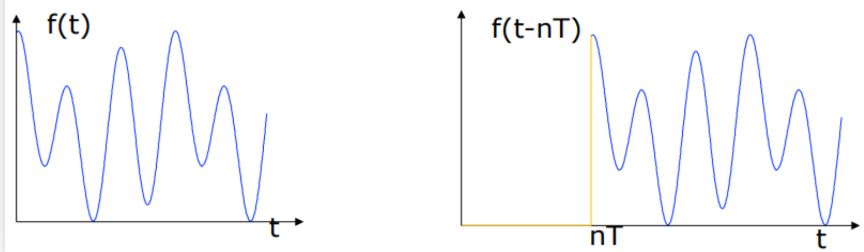
$$TZ\left(a\ x(n)+b\ y(n)\right)=a\ X(z)+bY(z)$$

- ***Retard temporel*** Division par Zi

$$TZ\left(x(n\text{-}1)\right)=z^{-1}X(z)+x(-1)$$

Théorème du retard:

La transformée en z de f(t) est F(z), trouver la transformée en z de f(t-nT).



- ***Avance temporel*** Multiplication par Zi

$$TZ\left(x(n+i)\right)=z^{i}X(z)\text{-}z^{i}\sum_{m=0}^{i-1} x(m)\ z^{-m}$$

Convolution à temps discret

$$g[n]*h[n]\xleftrightarrow{TZ}H(z)G(z)$$

Propriété de la dérivée

$$nx(n)\xrightarrow{\quad TZ\quad}-z\frac{dX(z)}{dz}$$

4) Propriétés de la TZ

Exemple 1

Déterminer la transformée de z de x(n) :

$$x(n) = u(n)\cos(nw_0)$$

Sachant que : $u(n)e^{jnw0} \xrightarrow{TZ} \frac{1}{1-e^{jw_0}z^{-1}}$ avec $|z| > 1$

En utilisant la formule d'Euler :

$$X(n) = u(n)[\frac{e^{jnw0} + e^{-jnw0}}{2}]$$

Donc : $X(z) = \frac{1/2}{1-e^{jw_0}z^{-1}} + \frac{1/2}{1-e^{-jw_0}z^{-1}}$ avec $|z| > 1$

4) Propriétés de la TZ

Déterminer la transformée en z

Exemple 2

Soit le signal x(n) définit par:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

1) Exprimer x[n] en fonction d'échelon unité

2) Utiliser le théorème du retard pour déterminer la transformée en z d'une fonction rectangle causale.

5) Transformée en Z inverse

✓La transformée en Z inverse permet de retrouver les échantillons du signal.

$$x(n) = TZ^{-1}[X(z)]$$

Méthodes

1.Méthode des résidus

2.Méthode de division polynomiale

3.Méthode de fraction simple

5) Transformée en Z inverse

a) Méthode des résidus

Le calcul des résidus dépend de la présence de pôles simples ou multiples sur R(z), i.e. dépend de la présence de zéros simples ou doubles sur D(z).

1) Cas de pôles simples

$$x(n) = \sum_{\text{Tous les pôles } p_i \text{ de } R(z)} \text{Résidus de } R(z) \text{ aux pôles } p_i$$

Tel que: $R(z) = z^{n-1}X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

x(n)= $\mathcal{R}es\,(R(z), p_i) = \frac{N(z)}{\frac{d}{dz}D(z)}$

5) Transformée en Z inverse

b Cas de pôles multiples d'ordre m de R(z):

Si $D(z) = (z - p_i)^m F(z)$ avec $F(p_i) \neq 0$ alors

$$\mathcal{R}es\,(R(z), p_i) = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-p_i)^m \frac{N(z)}{D(z)}\right]_{z=p_i}$$

5)Transformée en Z inverse

Exemple : soit la fonction X(z) suivante

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-a}} \quad \text{avec } a > 0$$

Calculer Tz inverse par la méthode des résidus x(n)=?

Il existe un pôle simple $p_1 = e^{-a}$.

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathcal{R}es\left(z^{n-1}X(z), p_1\right) = \mathcal{R}es\left(\frac{z^n}{z - e^{-a}}, p_1\right) \\ &= z^n|_{z=p_i} = e^{-an}.u(n) \end{aligned}$$

5)Transformée en Z inverse

b) Méthode de division polynomiale

La division du polynôme numérateur par celui du dénominateur:

Exemple

Soit $X(z) = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$

1. Calculer la TZ inverse et exprimer le résultat par des impulsions de Dirac (6termes)

7) Transformée en Z inverse

c) Décomposition en fraction simples

Consiste à décomposer X(z) en éléments simples dont on trouve les originaux dans les tables. Ces éléments sont en général des fractions rationnelles.

Les éléments le plus fréquemment rencontrés sont de la forme :

$\frac{z}{z-1}$ d'original $u(n)$ (échelon unité discret)

$\frac{z}{z-b}$ d'original $b^n u(n)$

$\frac{z}{(z-1)^2}$ d'original $nu(n)$ (rampe unité causale)

Exemple: décomposition en fraction simples

Trouver x[n] par la méthode de la décomposition en fraction simples,

$$X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

X(n)=?