

Université de Boumerdès



Filière: Electronique

Spécialité: Electronique des systèmes embarqués

Chapitre 1: La transformée en Z

Dr. Belkacem Samia

2023/2024

1)Introduction

- La transformée en z (TZ) est l'équivalent dans le **domaine discret** de la transformée de Laplace dans le **domaine continu**.
- **Utilisation:**
 - ✓ Etude des systèmes de **traitement numérique du signal**
 - ✓ Conception de filtres numériques

2) Définitions: Ztrans

La TZ d'un signal à temps échantillonné quelconque $x[n]$, noté par $X(z)$ est définie par:

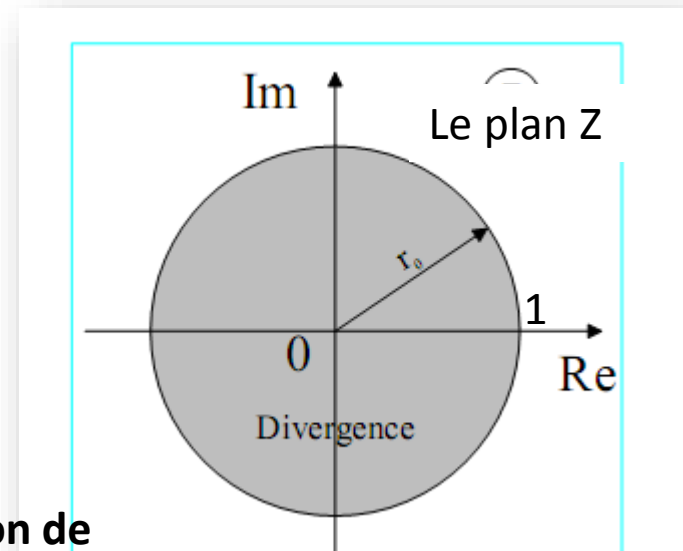
$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n)z^{-n}$$

Où Z c'est une variable complexe

Pour une séquence finie $x[n]$, la transformée $X(z)$ est un polynôme en z ou z^{-1}

La transformée en z doit toujours indiquée par sa région de convergence



2) Représentation d'un signal par pôles et zéros

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \Lambda \frac{\prod_{m=1}^M (z - z_m)}{\prod_{n=1}^N (z - p_n)}$$

Zéros: [o] la valeur de Z pour $Y(z)=0$.

pôles : [x] la valeur de Z pour $X(z)=0$.

Exemple:

Qu'elles sont les pôles et les zéros de la fonction de transfert
Les pôles et zéros de la $H(z)$ sont:

Les zéros sont: $\{-1\}$

Les pôles $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

$$H(z) = \frac{z + 1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{3}{4}\right)}$$

2) Représentation d'un signal par des pôles et zéros

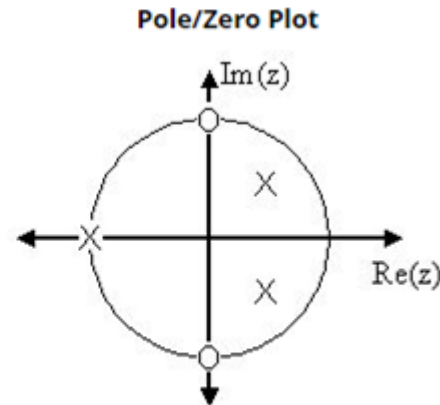
Exemple

$$H(z) = \frac{(z-i)(z+i)}{\left(z - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right)\left(z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z-1)}$$

Les zéros sont: $\{i, -i\}$
Les pôles sont : $\left\{-1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

Zéros: [o]

pôles : [x]



3) Région de convergence: ROC

a) On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum_n a_n z^n$

a) Rappel : Séries entières

- Le **rayon de convergence** R d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{N}$

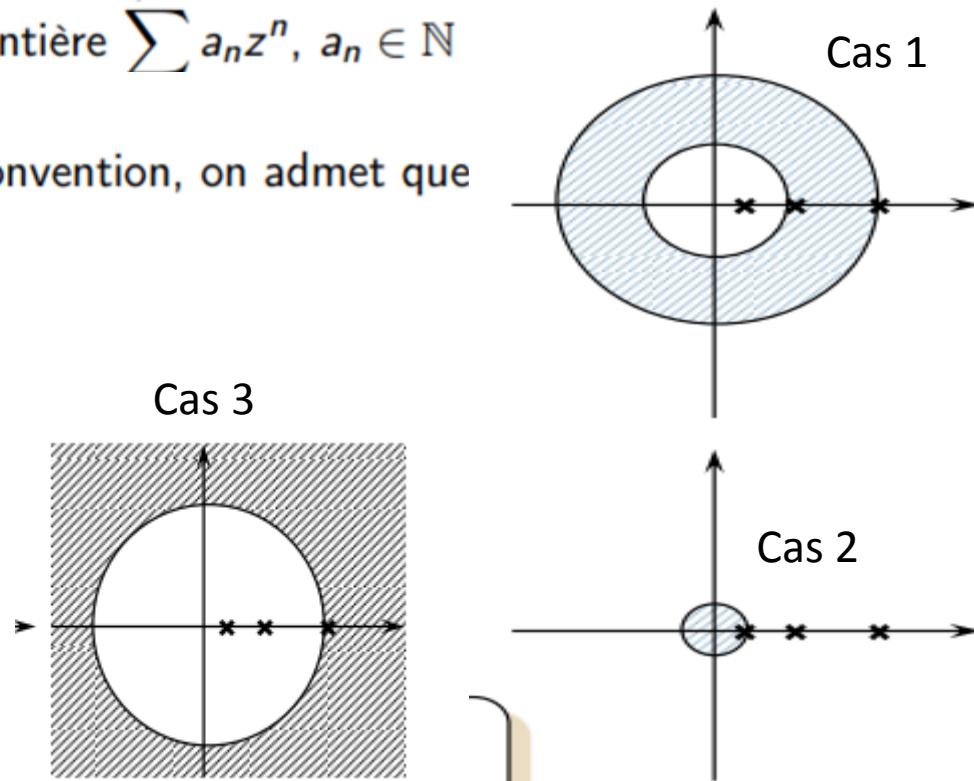
chaque n , est $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ où, par convention, on admet que

$$|z| > \frac{1}{R}$$

Cas 1- ROC c'est un anneau

Cas 2- à l'intérieur du cercle

Cas 3- à l'extérieur du cercle



3) Région de convergence: ROC

b) Propriétés de RDC (ROC)

➤ Le domaine de convergence de la transformée en Z correspond aux valeurs de Z pour lesquelles $X(z)$ est de valeur finie

➤ La transformée en z converge lorsque la série réelle suivante converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n) \cdot z^{-n}|$$

➤ la région de convergence est toujours un anneau, c'est-à-dire est définie par l'ensemble des points z tels que $r_1 < z < r_2$, où r_1 peut être nul et r_2 peut être l'infinie

- RDC est bornée par les pôles
- RDC ne contient aucun pôles

3) Région de convergence: RdC

Table de la transformée en Z

Sequence	Transform	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$\delta[n - m]$	z^{-m}	$ z > 0, m > 0; z < \infty, m < 0$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$a^n \cos(bn) u[n]$	$\frac{1 - a \cos(b)z^{-1}}{1 - 2a \cos(b)z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \sin(bn) u[n]$	$\frac{a \sin(b)z^{-1}}{1 - 2a \cos(b)z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

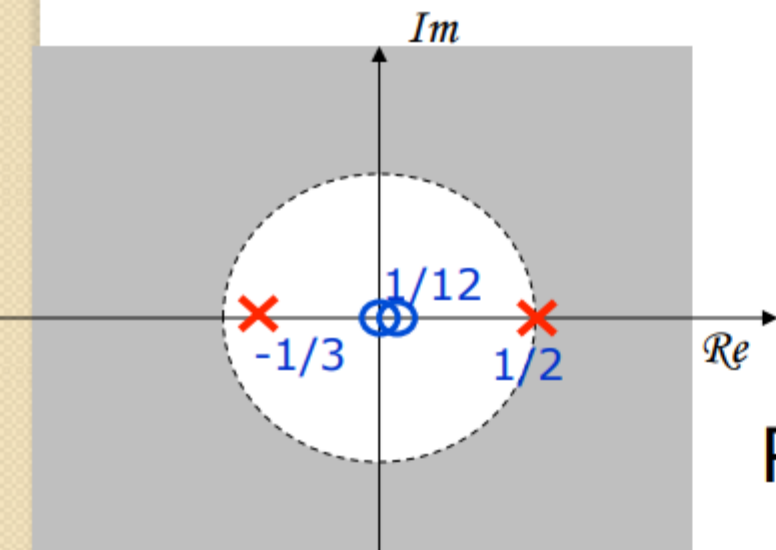
T est la période d'échantillonnage du signal transformé dans lequel on a posé $t = nT$.

Exemple

Exemple 1: trouvez la région de convergence RdC

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$


$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z}{z + \frac{1}{3}} = \frac{2z(z - \frac{1}{12})}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})}$$



RdC est **bornée par les pôles** et elle est **extérieure au cercle**.

RdC ne contient aucun pôle.

4) Propriétés de la TZ

- *Linéarité*

$$\mathcal{TZ}(a x(n) + b y(n)) = a X(z) + b Y(z)$$

- *Retard temporel* Division par z^i

$$\mathcal{TZ}(x(n-1)) = z^{-1} X(z) + x(-1)$$

- *Avance temporel*

Multiplication par z^i

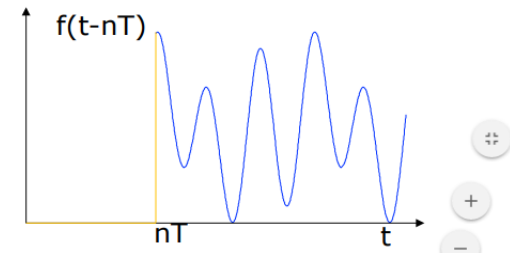
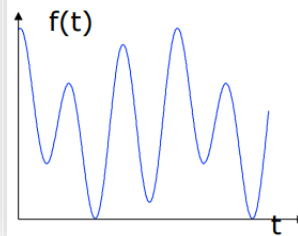
$$\mathcal{TZ}(x(n+i)) = z^i X(z) - z^i \sum_{m=0}^{i-1} x(m) z^{-m}$$

Convolution à temps discret

$$g[n] * h[n] \xrightarrow{\mathcal{TZ}} H(z)G(z)$$

Théorème du retard:

La transformée en z de $f(t)$ est $F(z)$, trouver la transformée en z de $f(t-nT)$.



Propriété de la dérivée

TZ

$$nx(n) \xrightarrow{\quad\quad\quad} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

4) Propriétés de la TZ

Exemple 1

Déterminer la transformée de z de $x(n)$:

$$x(n) = u(n) \cos(n\omega_0)$$

Sachant que : $u(n) \left[\frac{e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}}{2} \right] \xrightarrow{TZ} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}$ avec $|z| > 1$

En utilisant la formule d'Euler :

$$X(n) = u(n) \left[\frac{e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}}{2} \right]$$

$$\text{Donc : } X(z) = \frac{1/2}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \text{ avec } |z| > 1$$

4) Propriétés de la TZ

Déterminer la transformée en z

Exemple 2

Soit le signal $x(n]$ définit par:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

- 1) Exprimer $x[n]$ en fonction d'échelon unité
- 2) Utiliser le théorème du retard pour déterminer la transformée en z d'une fonction rectangle causale.

5) Transformée en Z inverse

✓ La transformée en Z inverse permet de retrouver les échantillons du signal.

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

Méthodes

1. Méthode des résidus
2. Méthode de division polynomiale
3. Méthode de fraction simple

5) Transformée en Z inverse

a) Méthode des résidus

Le calcul des résidus dépend de la présence de pôles simples ou multiples sur $R(z)$, i.e. dépend de la présence de zéros simples ou doubles sur $D(z)$.

1) Cas de pôles simples

$$x(n) = \sum_{\text{Tous les pôles } p_i \text{ de } R(z)} \text{Résidus de } R(z) \text{ aux pôles } p_i$$

Tel que:

$$R(z) = z^{n-1} X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$x(n) = \text{Res}(R(z), p_i) = \frac{N(z)}{\frac{d}{dz} D(z)}$$

5) Transformée en Z inverse

b Cas de pôles multiples d'ordre m de R(z):

Si $D(z) = (z - p_i)^m F(z)$ avec $F(p_i) \neq 0$ alors

$$\mathcal{R}es(R(z), p_i) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - p_i)^m \frac{N(z)}{D(z)} \right]_{z=p_i}$$

5) Transformée en Z inverse

Exemple : soit la fonction $X(z)$ suivante

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-a}} \quad \text{avec } a > 0$$

Calculer Tz inverse par la méthode des résidus $x(n)=?$

Il existe un pôle simple $p_1 = e^{-a}$.

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathcal{Res} \left(z^{n-1} X(z), p_1 \right) = \mathcal{Res} \left(\frac{z^n}{z - e^{-a}}, p_1 \right) \\ &= z^n \big|_{z=p_1} = e^{-an} \cdot u(n) \end{aligned}$$

5) Transformée en Z inverse

b) Méthode de division polynomiale

La division du polynôme numérateur par celui du dénominateur:

Exemple

Soit
$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

1. Calculer la TZ inverse et exprimer le résultat par des impulsions de Dirac (6termes)

7) Transformée en Z inverse

c) Décomposition en fraction simples

Consiste à décomposer $X(z)$ en éléments simples dont on trouve les originaux dans les tables. Ces éléments sont en général des fractions rationnelles.

Les éléments le plus fréquemment rencontrés sont de la forme :

$$\frac{z}{z-1} \text{ d'original } u(n) \text{ (échelon unité discret)}$$

$$\frac{z}{z-b} \text{ d'original } b^n u(n)$$

$$\frac{z}{(z-1)^2} \text{ d'original } nu(n) \text{ (rampe unité causale)}$$

Exemple: décomposition en fraction simples

Trouver $x[n]$ par la méthode de la décomposition en fraction simples,

$$X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$x(n)=?$