24 شعبان، 1445

الموافق ل: 04 مارس 2024

تمارين محلولة تتعلق بالفصل الأول ، إحصاء (02)

P;Abderrahmane Toumi

جامعة أمحمد بوقرة ولاية بومرداس

بسم الله الرحمن الرحيم

السلسلة الثانية

الفرق بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي(النسبي)

التمرين الأول: ماهي قيمة احتمال الحدث A وفقا للشكل التالي

مستحيل	غير مرجح	متساو	مرجح	مؤكد

الحل:

قيمة احتمال الحدث A وفقا لما ورد في الشكل.

- الحدث مستحيل: معناه $P(A) = P(\text{¢}) = 0$
- الحدث غير مرجح : $P(A) = P(A<\frac{1}{2}) = \alpha \in IR$
- الحدث متساو: $P(A) = \frac{1}{2}$
- الحدث مرجح: $P(A) >\frac{1}{2}$
- الحدث مؤكد: $P(A) = 1$

التمرين الثاني: رمينا قطعة نقود **متزنة** **مرة واحدة**.

01 – هل هذا التمرين يدخل ضمن الاحتمال النظري أم الاحتمال التجريبي ...؟ علل إجابتك

02 – كيف نسمي رمي قطعة النقود...؟

03 - ما هو احتمال ظهور (P).

الحل:

01 – هذا التمرين يدخل ضمن الاحتمال النظري لأن القطعة النقدية متزنة (ليس بها عيب) ورميت مرة واحدة.

02 – نسمي رمي قطعة النقود ب: **تجربة**

03 – حساب احتمال ظهور(P) : $S =[F ; P]$ ، الحدث : $A = [P]$ وبالتالي $P(A) = \frac{1}{2}$

التمرين الثالث: عند القائنا قطعة نقود **100 مرة** سجلنا نتائج حسب الجدول الموالي.

X_i	P	F	$\sum$
F_i	56	44	100

01 – كيف نسمي رمي قطعة نقود 100 مرة...؟

02 – أوجد احتمال ظهور(P)، هل التجارب في هذا التمرين متساوية الفرص...؟ علل إجابتك

الحل:

01 – نسمي رمي قطعة النقود 100 مرة ب: **عدد من التجارب**

02 - $P(P) = \frac{56}{100} = 0.56$ ، التجارب في هذا التمرين ليست متساوية الفرص ، مما يدل على أن قطعة النقود غير متزنة (بها عيب) بدليل أن الصورة ظهرت 56 مرة فقط من بين 100 مرة من التجارب

التمرين الرابع:

01 - استنتج تعريفا لكل من الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي

02 – استنتج قانون حساب الاحتمال لكل منهما.

الحل:

من خلال التمارين السابقة، يمكن تقديم التعريف التالي:

01 – تعريف الاحتمال النظري: هو احتمال يعتمد على النتائج المتوقعة، حسب معرفة النتائج الممكنة (S)، أي أننا نجري التجربة مرة واحدة فقط، لأن الشيء الذي نجري عليه التجربة منتظم (متزن)

وبالتالي قاعدة حساب الاحتمال هي: P(A) = عدد النتائج المتوقعة / عدد النتائج الممكنة

-أما الاحتمال التجريبي: هو احتمال يقوم على عدد مرات وقوع الحدث، لأن الشيء الذي نجري عليه التجارب غير منتظم (غير متجانس) أي أن قيمة الاحتمال التجريبي تتغير كل مرة تجرى بها التجربة. لذلك فهو يعتمد على النتائج الفعلية لتجربة واقعية، بناء على هذا الأساس تكون قاعدة الحساب على النحو التالي.

P(A) = عدد مرات وقوع الحدث / عدد مرات إجراء التجربة

للفائدة: متى نستخدم الاحتمال التجريبي ...؟

الجواب: إذا كان لا يمكننا حساب الاحتمال النظري وذلك عندما تكون التجربة ليست متساوية الفرص، بمعنى، حينما تكون قطعة النقود أو النرد أو غيرهما غير متوازنة (يوجد عيب)

التمرين الخامس: إذا كان التكرار النسبي لظهور (P) عند القاء العملة هو 56 % فما هو احتمال ظهور (P) إذا ألقيت القطعة 1000 مرة.

الحل: $P\ (56\%) = 0.56 \times 1000 = 560$

التمرين السادس: إذا كان التكرار النسبي لظهور العدد 4 على حجر نرد هو 18 % وكان عدد مرات الرمي هو 200 مرة.

01 – ما هو الاحتمال الصحيح لظهور العدد 4 من بين الإجابات التالية.

36	11,10	111	63

02 – نفس السؤال الأول من أجل ظهور العدد 05 مع تكرار نسبي في التجربة بلغ 22%

34	22	44	11.1

الحل:

01 – الاحتمال الصحيح لظهور العدد 4 هو $P\ (0.18) = 0.18 \times 200 = 36$

02 – من أجل ظهور العدد 5: $P(0.22) = 0.22 \times 200 = 44$

التمرين السابع: طلب من رجل معصوب العينين رمي سهم على قرص الأسهم.

01 – أحسب احتمال إصابة العدد 6 خمسة عشر (15) مرة من أصل 135 رمية

الحل: $P(6) = \frac{15}{135} = 12\% = 0.12$

التمرين الثامن: يوضح الجدول التالي نتائج 80 مرة من دوران قرص دوار مقسم إلى 4 أجزاء متساوية المساحة ومرقمة من 01 إلى 04.

X_i	01	02	03	04	$\sum$
F_i	08	22	18	32	80

السؤال: ما هو التكرار النسبي للحدث عندما يتوقف القرص عند الرقم 02

الحل: $P(2) = P(22) = \frac{22}{80} = 0.275 = 27.5\ \% = 28$

التمرين التاسع: رمي حجر نرد **منتظم** وتم تسجيل العدد الظاهر على وجهه.

السؤال: أوجد احتمال ظهور الرقم (3)، عدد فردي، عدد أولي)

ملاحظة: العدد الأولي، هو العدد الذي لا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى واحد

الحل:

- احتمال ظهور الرقم (3) $P(3) = \frac{1}{6}$
- احتمال عدد فردي $P(1, 3, 5) = \frac{3}{6}$
- احتمال عدد أولي $P(2, 3, 5) = \frac{3}{6}$

التمرين العاشر: تحتوي علبة كعك على 05 كعكات بالسكر و15 بالفراولة، سحبت كعكة واحدة من العلبة عشوائيا.

السؤال: أحسب احتمال أن تكون كعكة بالسكر.

الحل: $P(A) = \frac{5}{20}$

التمرين الحادي عشر: في صندوق به 20 زوج من الجوارب، 08 منها حمراء اللون، 10 زرقاء والباقي خضراء.

السؤال: ما هو احتمال الحصول على زوج أخضر اللون عند السحب عشوائيا

الحل: $P(A) = \frac{2}{20}$

التمرين الثاني عشر: طلب من 07 رسامين تلوين كل منهم حرف من كلمة (**الجزائر**) بلون مختلف

السؤال: أوجد احتمال أن يحدد للرسام الحرف (ج)

- نفس السؤال من أجل (أ)، (أ أو ل)، (الحرف س)

الحل:

- احتمال الحرف (ج) $P(j)\ \frac{1}{7}$

- احتمال الحرف (أ) أو (ل) $P(A) = \frac{3}{7}$

- احتمال الحرف (س) $P(0) = \frac{0}{7} = 0$

التمرين الثالث عشر: إذا كان احتمال حضور الطالب (x) إلى المدرج صباحا هو 0,80، ما هو احتمال عدم حضوره

الحل:

نفرض احتمال الحضور هو الحدث A وبالتالي عدم الحضور هو العكس تماما أي $\tilde{A}$ (مكملة)

ومنه: $P(\tilde{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.80 = 0.20 = 20\%$

التمرين الرابع عشر: إذا كان احتمال نجاح الطالب في مادة الإحصاء هو (3/2)، فما هو احتمال فشله

الحل:

بنفس الطريقة للتمرين رقم 13 نجد: $P(\tilde{A}) = 1- \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

الأحداث المستقلة والاحداث المتنافية

التمرين الأول:

رمي حجر نرد من ستة أوجه ومنتظم (متزن) مرتين، أحسب احتمال أن يظهر

01 – العدد 06 مرتين، 02 – عددان زوجيان، 03 – نفس العددين، 04 – عددان مختلفان

الحل:

01 – حساب احتمال ظهور العدد 6 مرتين، معناه ظهور العدد (6 و6) أي أنهما حدثان مستقلان

وبالتالي $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36}$$

02 – عددان زوجيان، معناه: (عدد زوجي) و(عدد زوجي)

- نسمي العدد الزوجي الأول بالحدث A1 ونسمي الثاني بالحدث A2

- تعيين الحدثين: $A1 = \{2\,,4,6\}\,,\ \ A2 = \{2,4,6\}$

بنفس الطريقة السابقة: هما حدثن مستقلان وبالتالي: $P(A1\cap A2) = P(A1)\times P(A2)$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

03 – نفس العددين: بمعنى $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)$ مع العلم أن فضاء العينة هو 36 ثنائية.

إذن: $P\ (A1, A2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

04 – عددان مختلفان وهو كما ترى عكس عبارة (نفس العددين) التي مرت بنا، لذلك من الأفيد استعمال المتممة

$$P(\grave{A}1,\grave{A}2) = 1 - P(A1,A2) = 1 - \frac{6}{36} \ll\gg \frac{36}{36} - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

التمرين الثاني:

تحتوي حقيبة على (12) كرة ملونة، خمس (05) منها حمراء والباقية زرقاء. سحبت كرة واحدة عشوائيا من الحقيبة، ثم أعيدت إلى الحقيبة (مستقلان) وسحبت كرة ثانية. تم تسجيل كل من الكرتين

01- أكتب قائمة النواتج الممكنة للتجربة

02 – أحسب احتمال أن تكون (الكرة الأولى زرقاء، الثانية حمراء، الأولى زرقاء والثانية حمراء، الكرتان لهما نفس اللون، الكرتان مختلفتا اللون، كل من الكرتين ليست حمراء، إحدى الكرتين على الأقل حمراء).

الحل:

01 – كتابة قائمة النواتج الممكنة للتجربة، تكتب بأي شكل من الأشكال المعروفة وليكن مخطط جون فن

ك1 \ ك2	R	B
R	RR	RB
B	BR	BB

02 – حساب احتمال أن تكون:

- الكرة الأولى زرقاء، تسمى بالحدث A والكرة الثانية حمراء، تسمى بالحدث B، الأولى زرقاء والثانية حمراء.

$$P(A)=\frac{7}{12},\qquad P(B)=\frac{5}{12},$$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\left(\frac{7}{12}\right)\times\left(\frac{5}{12}\right)=\frac{35}{144}$$

تابع نفس التمرين: أحسب احتمال أن تكون الكرتان لهما نفس اللون ، الكرتان مختلفتان في اللون

- الكرتان لهما نفس اللون، معناه: الأولى زرقاء والثانية زرقاء أو الأولى حمراء والثانية حمراء

أي أن: $\left(\frac{7}{12}\right)\times\left(\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{5}{12}\right)\times\left(\frac{5}{12}\right)=\left(\frac{49}{144}\right)+\left(\frac{25}{144}\right)=\left(\frac{25}{144}\right)$

- الكرتان مختلفتان في اللون، معناه: (الأولى زرقاء والثانية حمراء) أو (الأولى حمراء والثانية زرقاء)

$$\left(\left(\frac{7}{12}\right)\times\left(\frac{5}{12}\right)\right)+\left(\left(\frac{5}{12}\right)\times\left(\frac{7}{12}\right)\right)=\frac{35}{144}+\frac{35}{144}=\frac{70}{144}=\frac{35}{72}$$

تابع نفس التمرين من أجل: أحسب احتمال أن تكون.

- كل من الكرتين ليست حمراء - إحدى الكرتين على الأقل حمراء

≠ ليست حمراء، يعني ذلك: (الأولى زرقاء) و (الثانية زرقاء)

$$P(A1 \cap A2) = P(A1) \times P(A2) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$$

$\neq$ إحدى الكرتين على الأقل حمراء، معناه:

- احتمال: (الأولى زرقاء) و (الثانية حمراء) $P(A \cap B) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$
- احتمال: (الأولى حمراء) و (الثانية زرقاء) $P(A \cap B) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$
- احتمال: (الأولى حمراء) و (الثانية حمراء) $P(A \cap A) = \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$

وعليه يكون حساب إحدى الكرتين على الأقل حمراء هو:

$$\left(\frac{35}{144}\right) + \left(\frac{35}{144}\right) + \left(\frac{25}{144}\right) = \frac{95}{144}$$

التمرين الثالث:

يلعب كل من عبد الله وأحمد لعبة يستخدمان فيها حجر نرد، له 12 وجه، يرمي عبد الله حجر النرد **ثم** يرميه أحمد

01 – أوجد احتمال أن يكون العدد الظاهر في كلتا الرميتين (07)

02 – أوجد احتمال أن يكون العددين الظاهرين فرديين

03 – العدد الظاهر عند عبد الله فردي **و** عند أحمد زوجي

04 – العدد الظاهر عند عبد الله (09 أو أكثر) **و** عند أحمد (10أو أكثر)

05 – العددين الظاهرين مختلفين

الحل:

تلاحظ معي أن الأحداث مستقلة، حيث يرمي عبد الله ثم أحمد وبالتالي

01 – حساب احتمال العدد الظاهر في كلا الرميتين هو 07

$$P(A) = P(7) = \frac{1}{12} \quad , \quad P(B) = P(7) = \frac{1}{12}$$

ومنه يكون حساب احتمال العدد الظاهر في كلتا الرميتين

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{144}$$

02 – احتمال العددين الظاهرين فرديين.

- تعيين الحدث A $\quad A = \{1 ,3 ,5 ,7 ,9 ,11\}$

- تعيين الحدث B $\quad B = \{1 ,3 ,5 ,7 ,9 ,11\}$

حساب احتمال حدث كل منهما $\quad P(A \cap B) = P\left(\frac{6}{12}\right) \times P\left(\frac{6}{12}\right) = \frac{1}{4}$

03 – حساب احتمال العدد الظاهر عند عبد الله فردي وعند أحمد زوجي

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

04 – العدد الظاهر عند عبد الله 9 أو أكثر وعند أحمد 10 أو أكثر

- تعيين الحدث A $\quad A = \{9 , 10 , 11 ,12\}$

- تعيين الحدث B $\quad B = \{10 , 11 , 12\}$

- حساب الحدث: $\quad P(A \cap B) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$

05 – العددين الظاهرين مختلفين

لمعرفة عدد العناصر التي تشكل لنا عددين ظاهرين مختلفين، نحسب الثنائيات التي تظهر بعددين غير مختلفين عن طريق رسم فضاء العينة كما يلي:

- فضاء العينة S هو: $\quad S = (12)^2 = 144$

أو عن طريق مخطط جون فن

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
01	(1 ,1)											
02		2,2										
03			3,3									
04				4,4								
05					5,5							
06						6,6						
07							7,7					
08								8,8				
09									9,9			
10										10,10		
11											11,11	
12												12,12

$$S - 12 \;\ll\gg\; (144) - (12) = 132$$

$$P(A) = \frac{132}{144} = \frac{11}{12}$$

التمرين الرابع:

يستعد كل من كريم وسعيد لاختبار قيادة السيارة، تعلم كل منهما القيادة منفردا، لدى ستكون نتائج الاختبار مستقلة. إذا كان احتمال نجاح كريم في الاختبار هو (0,6) وكان احتمال نجاح سعيد هو 0,4

01 – أحسب احتمال أن: (ينجح الاثنان في الاختبار، لا ينجح أي منهما في الاختبار، ينجح أحدهما على الأقل، ينجح واحد منهما فقط).

الحل:

- نسمي احتمال نجاح كريم بالحدث A ، احتمال عدم النجاح بالحدث $\grave{A}$

- نسمي احتمال نجاح سعيد بالحدث B ، احتمال عدم النجاح بالحدث $\grave{B}$

كريم	**A احتمال نجاح**	**$\grave{A}$ احتمال عدم نجاح**
النسبة	**0,6**	$1 - 0.6 = \mathbf{0.4}$
سعيد	**B احتمال نجاح**	**$\grave{B}$ احتمال عدم نجاح**
النسبة	**0,4**	$1 - 0.4 = \mathbf{0.6}$

- ينجح الاثنان معناه: (ينجح كريم) **و** (ينجح سعيد) $P(A \cap B) = (0.6) \times (0.4) = 0.24$

- لا ينجح أي منهما: $P(\grave{A} \cap \grave{B}) = (0.4) \times (0.6) = 0.24$

- ينجح أحدهما على الأقل: ينجح كريم **ولا** ينجح سعيد (أو) ينجح سعيد ولا ينجح كريم (أو) ينجح كريم وسعيد

$$P\left(A \cap \grave{B}\right) \cup P\left(B \cap \grave{A}\right) \cup P(A \cap B) =$$

$$\{(0.6) \times (0.6)\} + \{(0.4) \times (0.4)\} + \{(0.6) \times (0.4)\} = 0,76$$

- ينجح واحد منهما فقط: ينجح كريم (ولا) ينجح سعيد (أو) ينجح سعيد (ولا) ينجح كريم

$$P\left(A \cap \grave{B}\right) \cup P\left(B \cap \grave{A}\right) = (0.6) \times (0.6) + (0.4) \times (0.4) = 0.52$$

....

التمرين الخامس: تطبيق على نظرية (بييز)

نفرض لدينا مصنع يحتوي على 03 آلات إنتاج، كلها تنتج ما مجموعه 100 عبوة عصير في الدقيقة الواحدة (من نفس الحجم والسعة والذوق)، حيث قدرة إنتاج الآلة الأولى 20 % والثانية 35 % والثالثة 45%. بعد عمليات الرقابة والفحص، تبين أن الآلة الأولى تنتج 1% معيب والثانية 2%والثالثة 3% على الترتيب. قمنا **بتجربة سحب وحدة عشوائيا** من إنتاج المصنع للفترة الزمنية (دقيقة واحدة).

السؤال:

01 – احسب احتمال أن تكون العبوة المسحوبة معيبة

02 – أحسب احتمال أن تكون العبوة المعيبة من إنتاج الآلة الأولى

03 – أحسب احتمال أن تكون العبوة المعيبة من إنتاج الآلة الثانية

04 – أحسب احتمال أن تكون العبوة المسحوبة سليمة (جيدة)

05 – أحسب احتمال أن تكون العبوة السليمة من إنتاج الآلة الأولى

06 – أحسب احتمال أن تكون العبوة السليمة من إنتاج الآلة الثالثة.

الحل:

نرمز الى **الآلات** على التوالي بالرمز (A_1، A_2، A_3) والعبوة **المعيبة** بالرمز (B) والعبوة **الجيدة** بالرمز (G)

A_1

$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0.02$ $\begin{cases} P(B/A1) = \frac{1}{100} \\ P(G/A1) = \frac{99}{100} \end{cases}$

A_2

$P(A_2) = \frac{35}{100} = 0,35$ $\begin{cases} P(B/A2) = \frac{2}{100} \\ P(G/A2) = \frac{98}{100} \end{cases}$

A_3

$P(A_3) = \frac{45}{100} = 0.45$ $\begin{cases} P(B/A3) = \frac{3}{100} \\ P(G/A3) = \frac{97}{100} \end{cases}$

01 – حساب احتمال أن تكون العبوة المسحوبة معيبة

$$P(B) = \{P(A1) \times P(B/A1)\} + \{P(A2) \times P(B/A2)\} + \{P(A3) \times P(B/A3)\} =$$

$$\left\{\frac{20}{100} \times \frac{1}{100}\right\} + \left\{\frac{35}{100} \times \frac{2}{100}\right\} + \left\{\frac{45}{100} \times \frac{3}{100}\right\} =$$

$$\frac{20}{10000} + \frac{70}{10000} + \frac{135}{10000} = 0.0225$$

02 – حساب احتمال أن تكون العبوة **المعيبة** من انتاج الآلة الأولى (شرط)

$$P(A1/B) = \frac{P(A1) \times P(B / A1)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{20}{100}\right) \times \left(\frac{1}{100}\right)}{0.0225} = 0.00889$$

03 – بنفس الطريقة يمكن حساب احتمال العبوة **المعيبة** من انتاج الآلة الثانية

$$P(A2 / B) = \frac{P(A2) \times P(B / A2)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{35}{100}\right) \times \left(\frac{2}{100}\right)}{0.0225} = \boxed{0.3111}$$

04 – حساب احتمال أن تكون العبوة المسحوبة سليمة (جيدة)

بنفس الطريقة الأولى أو نلجأ إلى استعمال المكملة للاختصار

$$P(G) = 1 - P(B) \gg 1 - 0.0225 = 0.9775$$

05 – حساب احتمال أن تكون العبوة السليمة من إنتاج الآلة الأولى

$$P(A1/G) = \frac{P(A1) \times P(G/A1)}{P(G)} = \frac{\left(\frac{20}{100}\right) \times \left(\frac{19}{100}\right)}{0.9775}$$

$$= \frac{\frac{380}{10000}}{0.9775} = \frac{0.038}{0.9775} = \boxed{0.0388}$$

06 – حساب احتمال أن تكون العبوة السليمة من انتاج الآلة الثالثة

$$P(A3/G) = \frac{P(A3) \times P(G / A3)}{P(G)} = \frac{\left(\frac{45}{100}\right) \times \left(\frac{3}{100}\right)}{0.9775} = \frac{0.0135}{0.9775} = \boxed{0.0138}$$

....